Práctica 1. Complementos Matemáticos II.
Implementación del fenómeno de Gibbs.

El objetivo de esta práctica es ilustrar el fenómeno de Gibbs en series de Fourier. Se considera la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le \pi/2 \\ 1 & \pi/2 < t \le 3\pi/2 \\ 0 & 3\pi/2 < t \le 2\pi \end{cases}$$

1. Comprueba que los coeficientes de Fourier de f son

$$c_0 = 1/2, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n \neq 0,$$

y que la serie de Fourier puede escribirse

$$S(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(2k-1)} e^{it(2k-1)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(2k-1)} \cos((2k-1)t).$$

Estudia la convergencia de la serie en el intervalo $[0, 2\pi]$.

A partir de ahora, denotamos por $S_N(t)$ la suma parcial N-ésima de la serie de Fourier $S(t)$.

2. El primer programa busca representar las sumas parciales S_N en un intervalo $[a, b]$. Debe definirse un vector $t = a : h : b$, de extremos a y b, y una distancia entre dos componentes consecutivas dada por la longitud de paso h. Elabora un programa MATLAB (sumfourier.m) que evalúe S_N en las componentes de t y dibuje t frente a S_N.

Datos de entrada: N, a, b, h.

Datos de salida: $S_N(t)$ y gráfica de t frente a $S_N(t)$.

Ejecuta el programa para obtener las correspondientes gráficas con $a = 0, b = 2\pi, h = 0.001$ y $N = 100, 200, 300$. Un última nota: el programa debe cargar los coeficientes de Fourier c_n (o A_n, B_n, los que se elijan) de otro programa (coef.m), que los contenga.

3. El segundo programa MATLAB (maxim.m) calculará el máximo de S_N cerca y a la derecha del punto de discontinuidad $t = \pi/2$, utilizando la función apropiada de MATLAB. Debe también usarse el programa anterior para evaluar S_N en un vector de extremos a y b y longitud de paso h. El nuevo programa ha de calcular el máximo de los valores de S_N en ese vector y la componente en la que se alcanza.

Datos de entrada: N, a, b, h.

Datos de salida: máximo de $S_N(t)$ y punto t^* en el que se alcanza.
Ejecuta el programa con $a = \pi/2 + 1e - 03, b = \pi/2 + 1e - 01, h = 1e - 03$ y los sucesivos valores $N = 20, 40, 60, 80, 100$. Elabora una tabla que muestre N frente a los correspondientes máximos obtenidos. Comenta los resultados, si te sugieren algo.

4. El tercer programa (sumfejer.m) ha de evaluar las sumas de Fejér

$$\sigma_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} S_k,$$

en un vector t de extremos a y b, y longitud de paso h, así como elaborar la gráfica de t frente a σ_N. El programa debe hacer uso del programa sumfourier.m, del apartado 2.

Datos de entrada: N, a, b, h.

Datos de salida: $\sigma_N(t)$ y gráfica de t frente a $\sigma_N(t)$.
Ejecuta el programa para obtener las correspondientes gráficas con $a = 0, b = 2\pi, h = 0.001$ y $N = 40, 80, 120$.

RESULTADOS. Escribe un informe que incluya:

1. Los resultados teóricos del apartado 1.
2. Las gráficas de los apartados 2 y 4.
3. La tabla del apartado 3.
4. Un listado de los programas.

Plazo de entrega: tres semanas desde la publicación de la práctica en la página de la asignatura.