SERIES DE FOURIER.

$\boxed{1.}$ INTRODUCCIÓN.

$\boxed{2.}$ POLINOMIOS TRIGONOMÉTRICOS Y SERIES DE FOURIER.

2.1. Algunas definiciones.

2.2. Serie de Fourier.

2.3. Polinomios trigonométricos.

$\boxed{3.}$ CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER.

3.1. Convergencia puntual. Fenómeno de Gibbs.

3.2. Convergencia uniforme.

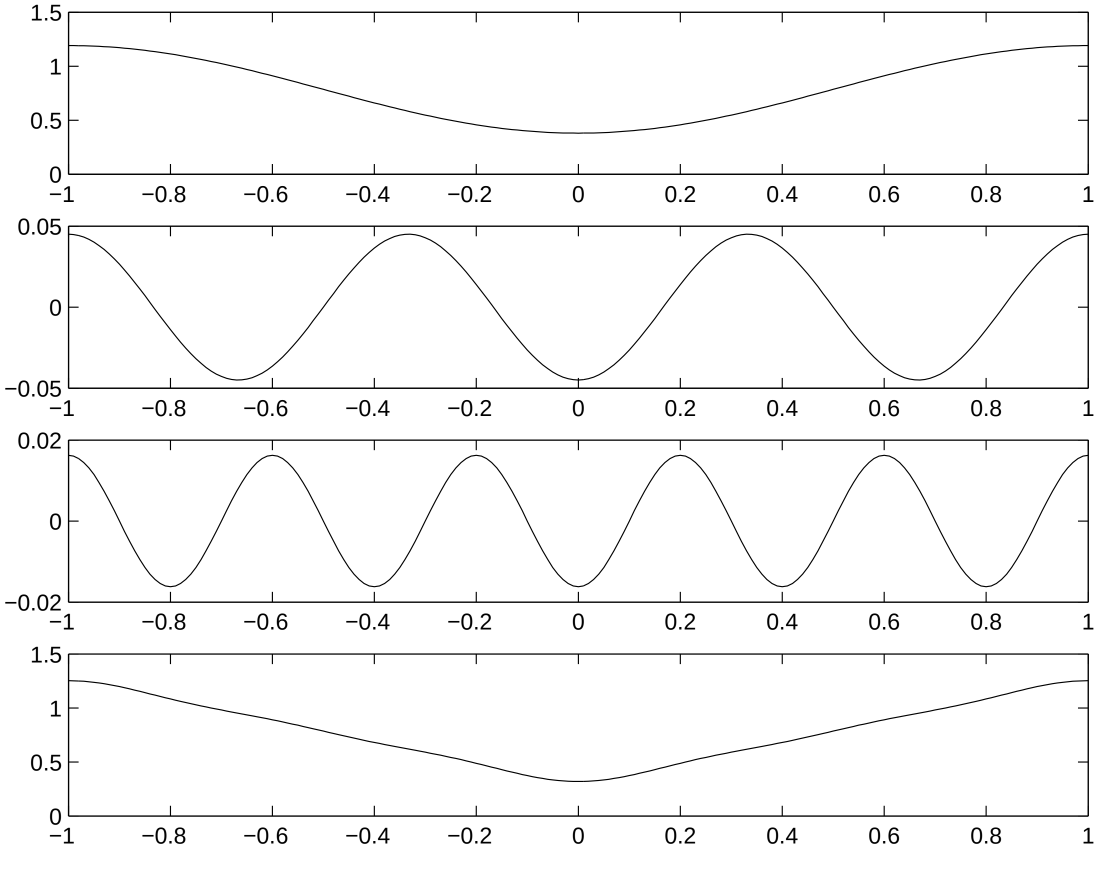
$\boxed{1}$ INTRODUCCIÓN.

Representación de señales continuas

- Señales T-periódicas

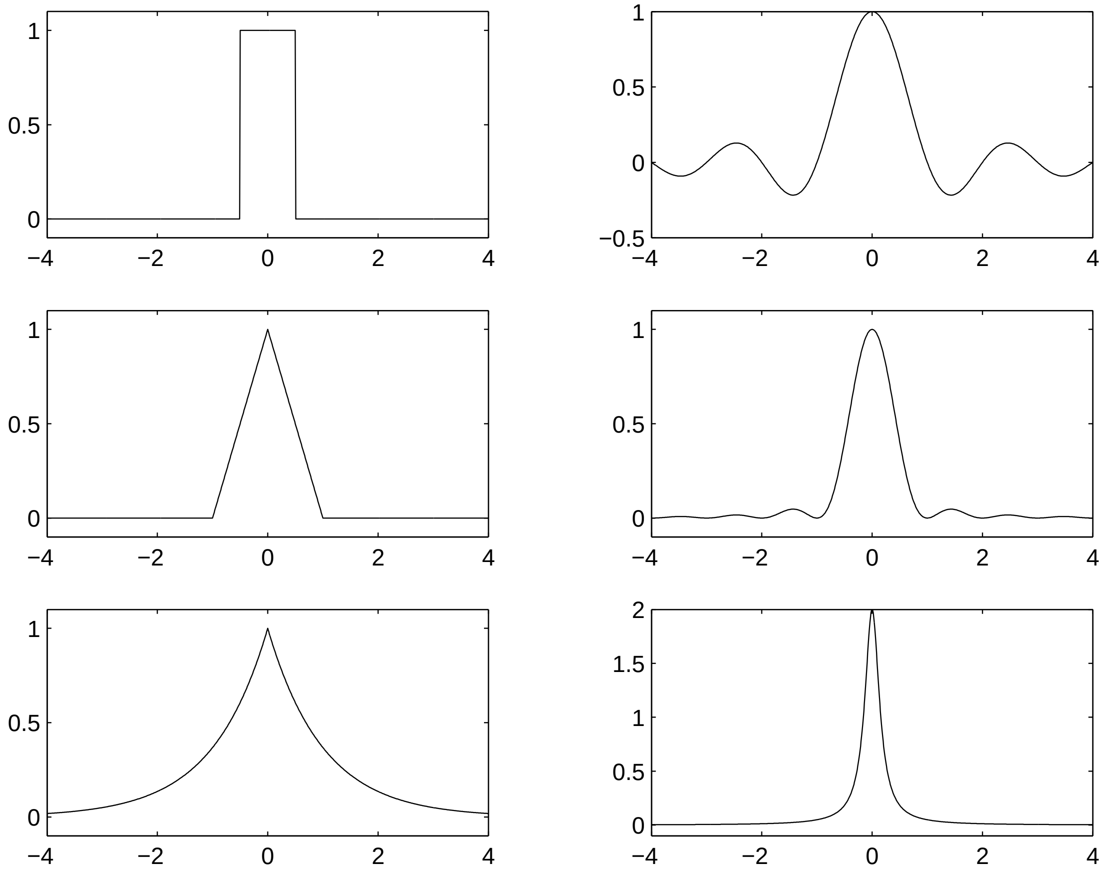
$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikt/T},$$

$1/T$: frecuencia fundamental.
Superposición de sobretonos.
$c_k = |c_k|e^{i\phi_k}$: amplitudes/fases



- Señales no periódicas

$$f(t) \dashrightarrow \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt,$$



$\boxed{2}$ SERIES DE FOURIER.

2.1. Algunas definiciones.

- f periódica de período T:

$$f(t+T) = f(t), \quad \forall t$$

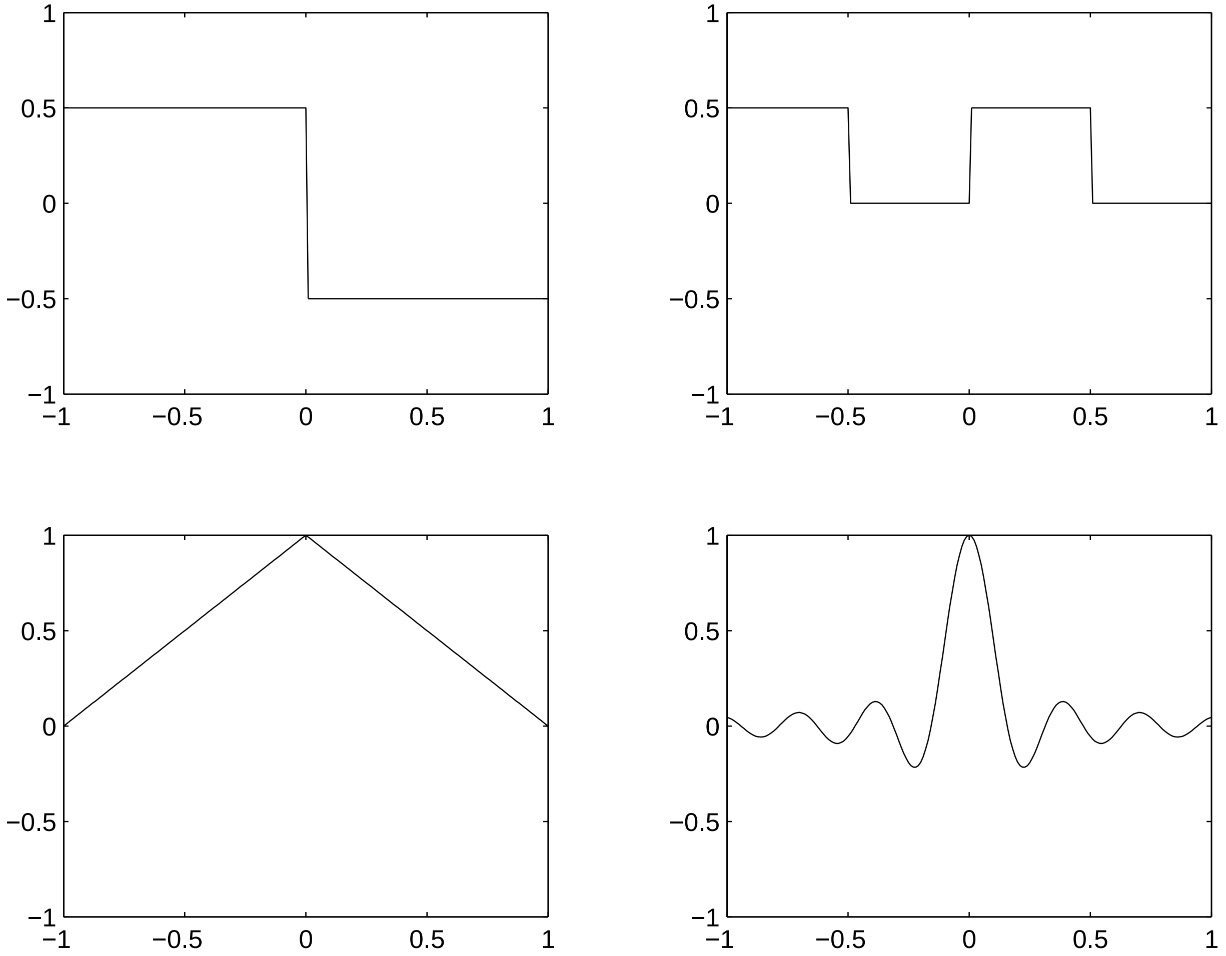
  $T > 0$ período fundamental.

Sea $f : I \longrightarrow \mathcal{C}$, con I intervalo finito

- f continua a trozos en I: f es continua en I salvo en un número finito de puntos.
- f diferenciable a trozos en I:
  - f continua a trozos en I, con sólo discontinuidades de salto (si las tiene).
  - f' existe en I salvo a lo sumo en un número finito de puntos.
  - f' es continua a trozos en I, con sólo discontinuidades de salto (si las tiene).

Sea $f : I \to \mathcal{C}$, con I intervalo infinito

- f diferenciable a trozos en I si f es diferenciable a trozos en cada subintervalo finito de I.



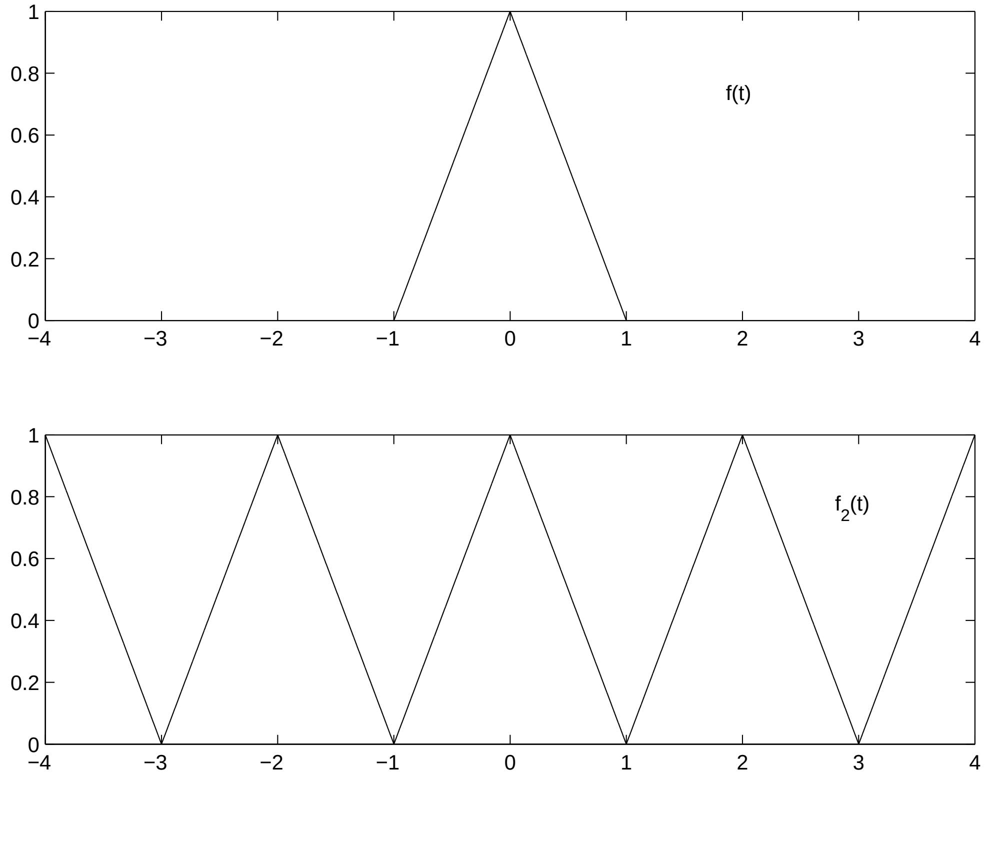
- Periodización. Extensión periódica

  $f : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad T = b - a$

  Extensión T-periódica de f:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT)$$

Copias de f 'pegadas' sobre $\mathbb{R}$ en intervalos de longitud T.



2.2. Serie de Fourier.

★ El conjunto

$$\{e_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad e_n(t) = e^{2\pi i n\frac{(t-a)}{T}},$$

es un sistema ortogonal y completo en $L^2([a,b])$.

Es completo: si $f \in L^2([a,b])$,

$$f =^{L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n$$

Es ortogonal: si

$$\langle g_1, g_2\rangle = \int_a^b g_1(t)\overline{g_2(t)}dt,$$

entonces

$$\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T & n = m \end{cases}$$

★ Coeficientes de Fourier

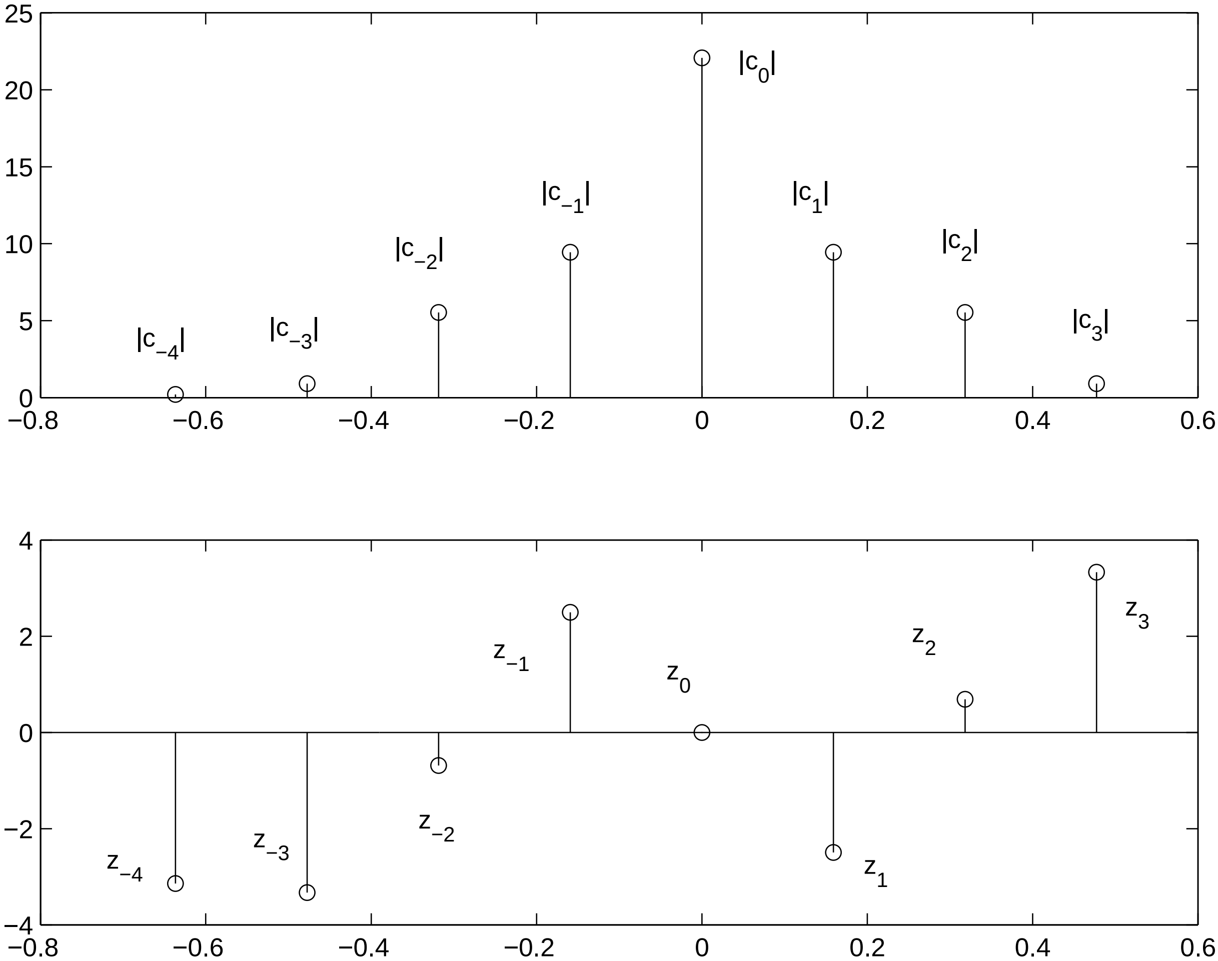
$$c_n(f) = \frac{\langle f, e_n\rangle}{\langle e_n, e_n\rangle} = \frac{1}{T}\int_a^b f(t) e^{-2\pi i n\frac{(t-a)}{T}}dt.$$

$$f =^{L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n$$

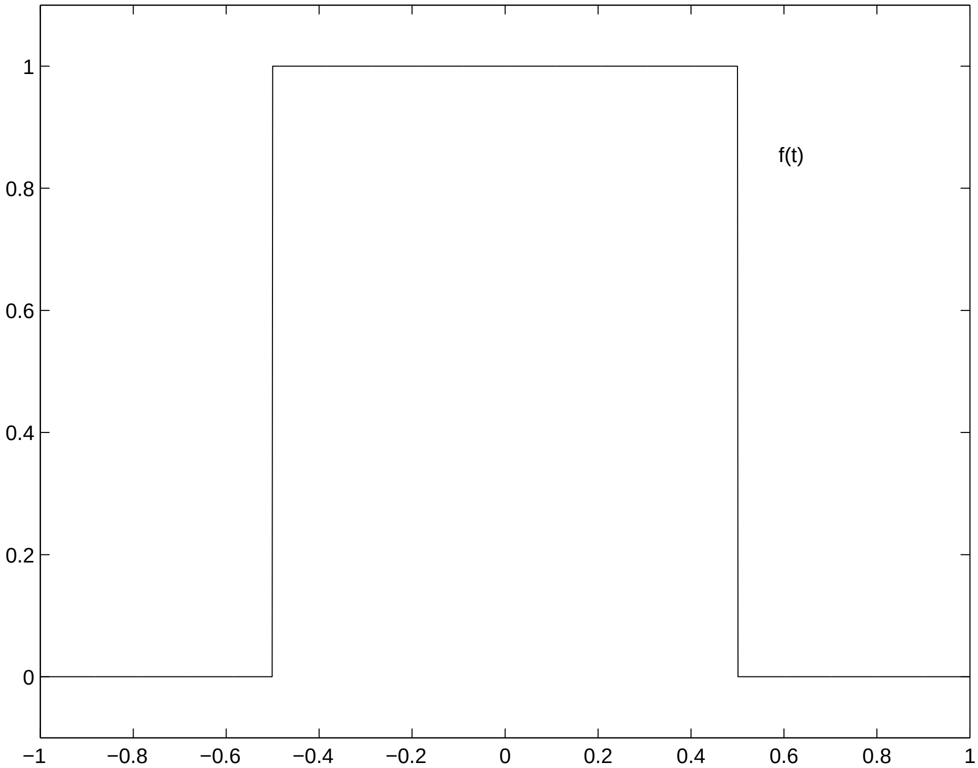
Descomposición de la señal periódica en suma de sinusoides complejas de frecuencias múltiplos de la fundamental $f_0 = 1/T$.

$$c_n = |c_n| e^{iz_n}$$

$|c_n|$: amplitud, $\qquad z_n = arg(c_n)$: fase.



Ejemplo



$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f = \chi_{[-1/2,1/2]}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= 1/2 \\ c_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \chi_{[-1/2,1/2]}(t) e^{-2\pi i n \frac{(t+1)}{2}} dt = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-\pi i n(t+1)} dt \\ &= \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 2k, k \neq 0 \\ \frac{(-1)^k}{\pi(2k-1)} & n = 2k-1 \end{cases} \end{aligned}$$

★ Representación en senos y cosenos

$$f =^{L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \frac{(t-a)}{T}}$$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi(t-a)}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2n\pi(t-a)}{T}\right),$$

$$c_0 = A_0,$$

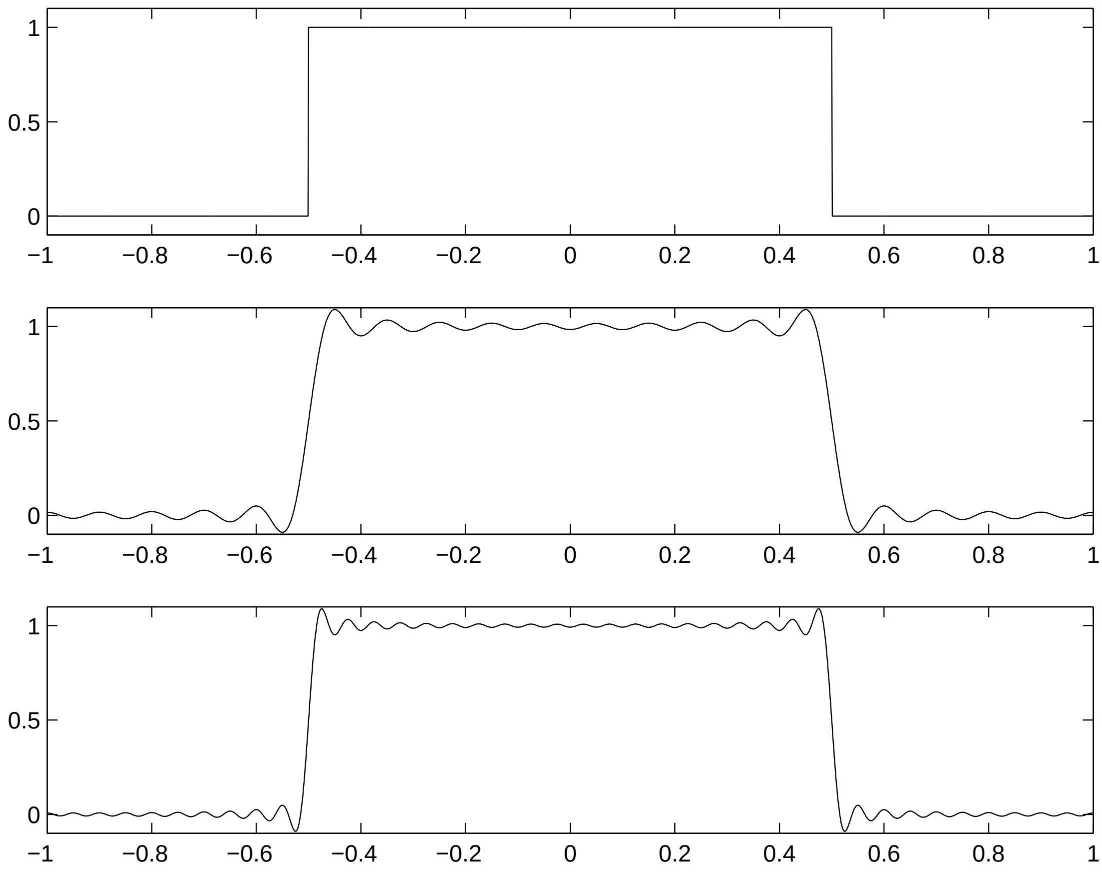
$$c_n = \frac{A_n - iB_n}{2}, c_{-n} = \frac{A_n + iB_n}{2}, \quad n > 0,$$

$$A_n = c_n + c_{-n}, B_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Ejemplo

$$f = \chi_{[-1/2,1/2]}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(2k-1)} e^{\pi i(2k-1)(t+1)} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(2k-1)} \cos\left(\pi(2k-1)(t+1)\right) \end{aligned}$$



2.3. Polinomios trigonométricos.

Polinomios trigonométrico de grado N ($\mathbb{PT}_N$):

$$\begin{aligned} P_N(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2n\pi(t-a)}{T}\right) \\ &\quad + b_n \sin\left(\frac{2n\pi(t-a)}{T}\right) \end{aligned}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad T\text{-periódica}$$

★ Si

$$\begin{aligned} S_N(t) &= \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{2\pi i n \frac{(t-a)}{T}} \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos\left(\frac{2n\pi(t-a)}{T}\right) \\ &\quad + B_n \sin\left(\frac{2n\pi(t-a)}{T}\right), \end{aligned}$$

entonces

$$\min\{||f - P_N||_2 : P_N \in \mathbb{PT}_N\} = ||f - S_N||_2.$$

La suma parcial N-ésima de la serie de Fourier da la aproximación óptima a f, en el sentido mínimos cuadrados, de entre todos los polinomios trigonométricos de grado N.

$\boxed{3}$ CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER.

3.1. Convergencia puntual. Fenómeno de Gibbs

★ Si $f \in L^2([a,b])$, su serie de Fourier converge hacia f en "casi todo punto".

★ **Teorema 1** (Dirichlet). Supongamos que f tiene período T y es diferenciable a trozos en $\mathbb{R}$ y sea

$$S_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{2\pi i k \frac{(t-a)}{T}}$$
$$c_k(f) = \frac{1}{T}\int_a^b f(t) e^{-2\pi i k \frac{(t-a)}{T}} dt.$$

Entonces $\{S_N(t)\}_{N\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función

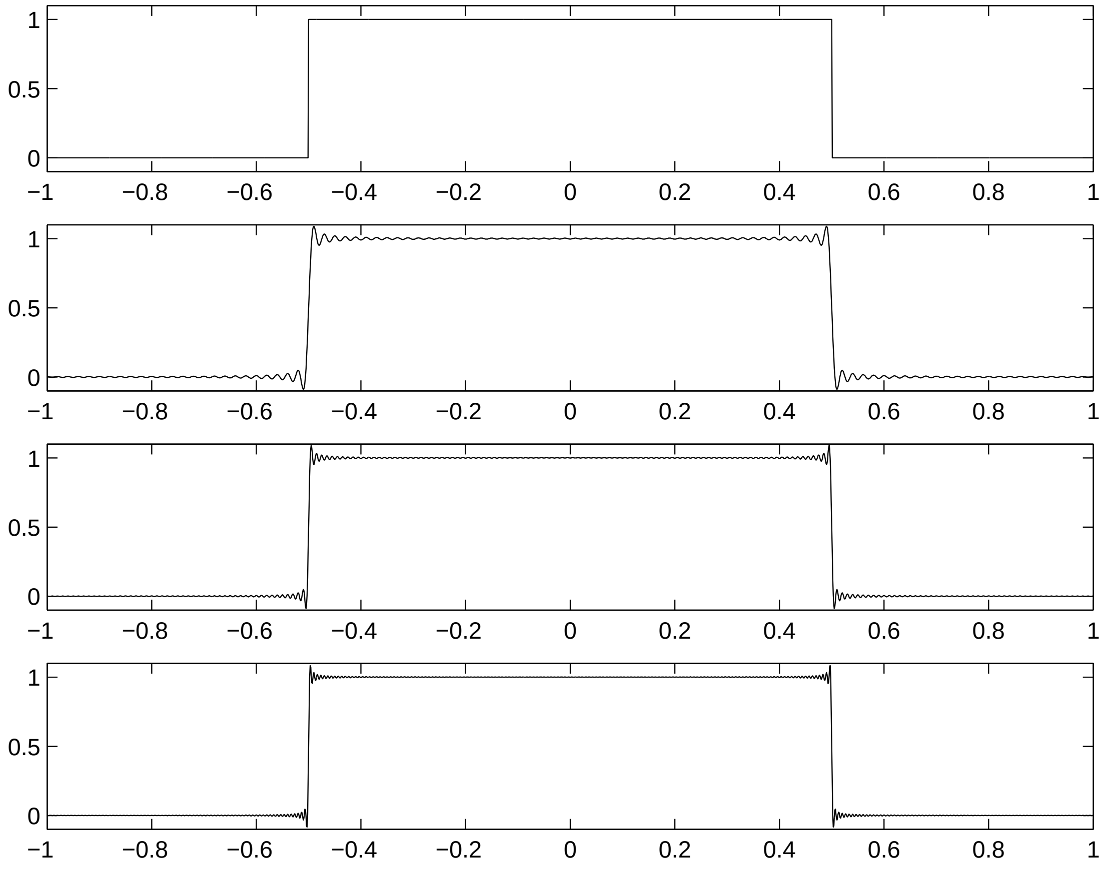
$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to t+} f(x) + \lim_{x\to t-} f(x)\right).$$

$\tilde{f}(t) = f(t)$ si f es continua en t.

$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\left(f(t+) + f(t-)\right)$ si f tiene un salto de discontinuidad en t.

★ Fenómeno de Gibbs: $f = \chi_{[-1/2,1/2]}$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(2k-1)} e^{\pi i(2k-1)(t+1)} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(2k-1)} \cos\left(\pi(2k-1)(t+1)\right) \end{aligned}$$



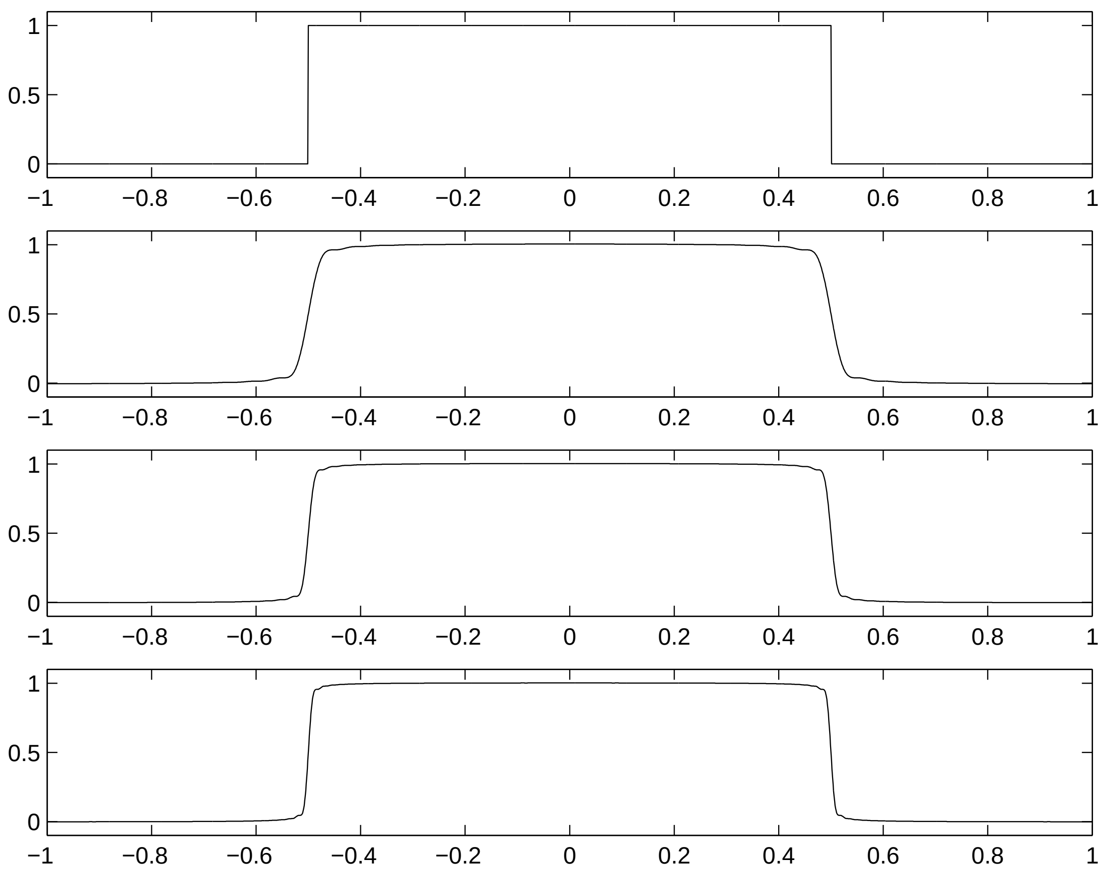
Las oscilaciones de las sumas parciales en los puntos de discontinuidad son aprox. un 17% del salto de la función.

★ Si f es T-periódica, continua y diferenciable a trozos en $\mathbb{R} \Rightarrow S_N \to f$ uniformemente.

3.2. Convergencia uniforme.

Sumas parciales de Fejér

$$\sigma_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(t)$$



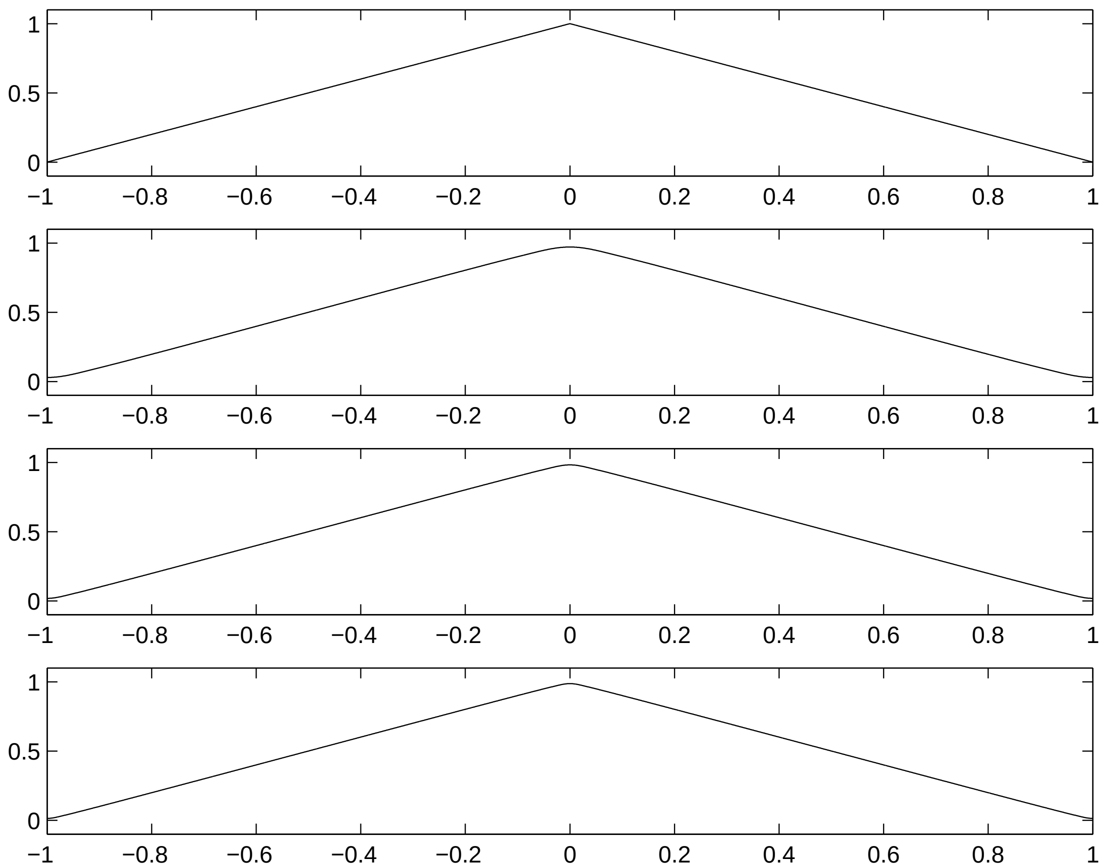
★ **Teorema 2** (Fejér). Supongamos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tiene período T y es continua en $\mathbb{R}$. Entonces

$$\sigma_N(t)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}S_k(t)$$

converge uniformemente a f en $\mathbb{R}$ si $N\to\infty$.

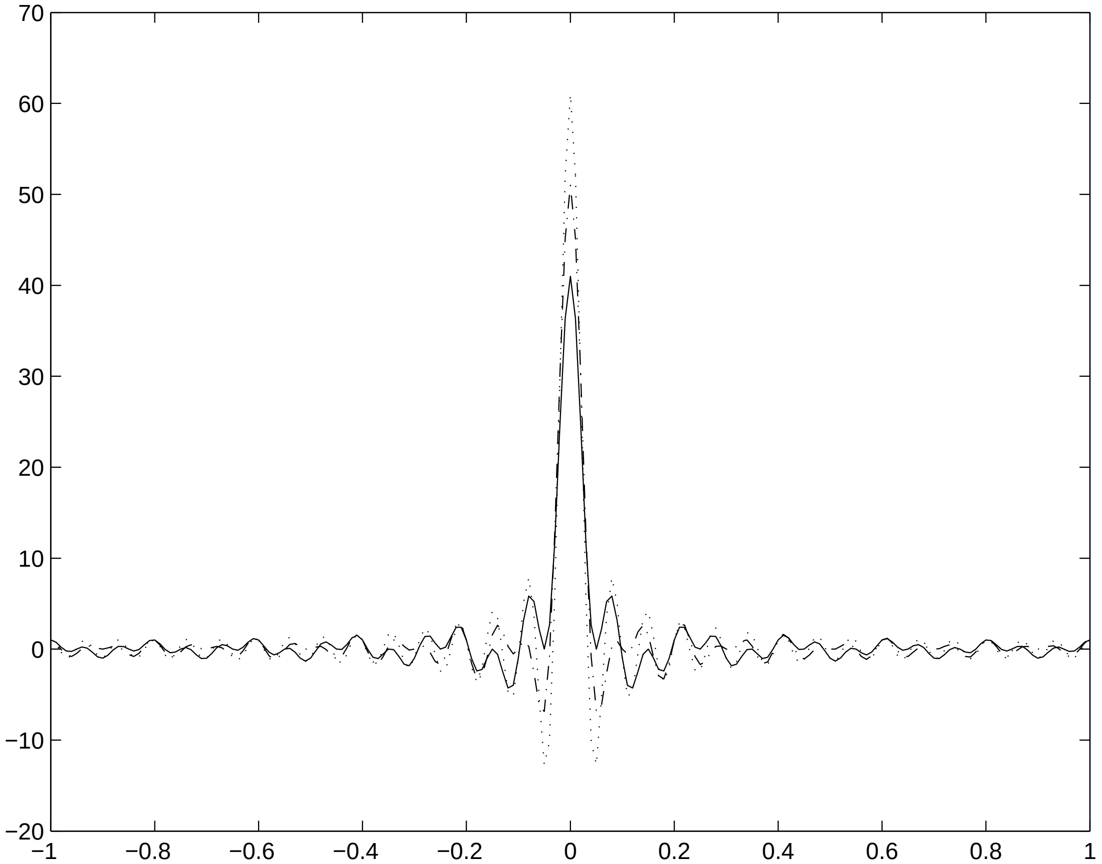
$$f:[-1,1]\to\mathcal{R},\quad f(t)=\begin{cases}1+t & \text{si}\quad -1\le t\le 0\\ 1-t & \text{si}\quad 0\le t\le 1\end{cases}.$$

$$f(t)\ \approx\ \frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)\pi(t+1)).$$



Núcleo de Dirichlet

$$D_k(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-k}^{k} e^{2\pi i m t/T}, \quad T > 0.$$



Demostración del Teorema 1 (pasos)

- Si $0 < t < T$,

$$D_k(t) = \frac{1}{T}\frac{\sin\left((k+1/2)\frac{2\pi t}{T}\right)}{\sin\frac{\pi t}{T}}$$

- Si f tiene período T,

$$S_k(t) = \int_0^T f(t-x)D_k(x)dx$$

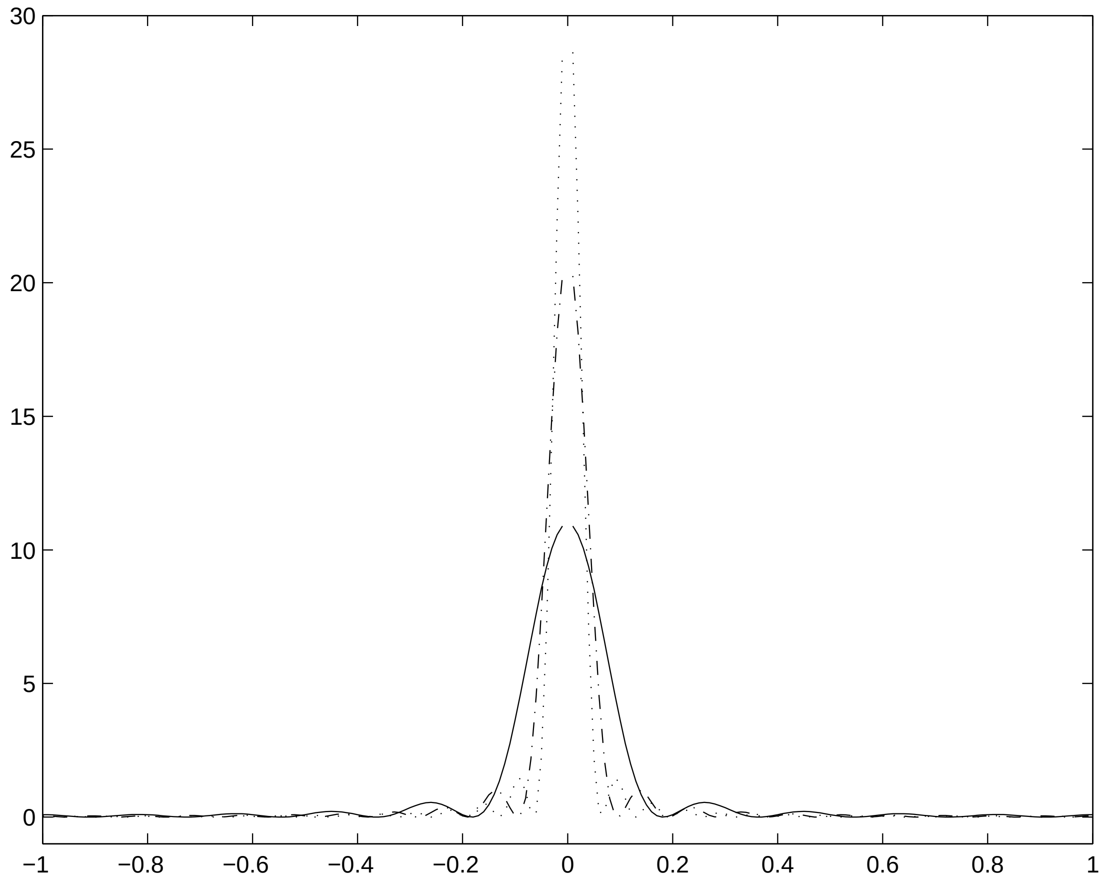
- En las condiciones del Teorema 1 (f diferenciable a trozos, de período T),

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T f(t-x)D_k(x)dx = \tilde{f}(t),$$

puntualmente.

Núcleo de Fejér

$$F_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(t), \quad T > 0.$$



Propiedades (unidades aproximadas de convolución)

1. Si $T > 0$,

$$\int_0^T F_N(t)dt = 1; \quad N \geq 1.$$

2. Existe $M > 0$ tal que

$$\int_0^T |F_N(t)|dt \leq M.$$

3. Si $0 < \delta < T$,

$$\int_{\delta \leq t < T} |F_N(t)|dt \to 0, \quad N \to \infty.$$

Demostración del Teorema 2 (pasos)

- Si $0 < t < T$,

$$F_N(t) = \frac{1}{NT} \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\frac{2\pi t}{T}\right)}{\sin\frac{2\pi t}{2T}} \right)^2$$

- Si f tiene período T,

$$\sigma_N(t) = \int_0^T f(t-x) F_N(x) dx$$

- En las condiciones del Teorema 2 (f de período T y continua en $\mathbb{R}$),

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T f(x-t) F_N(x) dx = f(t),$$

uniformemente.