

CMII, PRACTICA 4

Para $N \geq 1$ y $j \leq 0$, denotemos $N_j = 1 + 2^{|j|}$. Por ejemplo, $N_0 = 1 + N$.

a) Dado un vector $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n=0}^N \in \mathbb{C}^{1+N}$, se considera el operador $L : \mathbb{C}^{1+N} \rightarrow \mathbb{C}^{1+N}$ definido como sigue: si $\mathbf{u} = \{u_n\}_{n=0}^N \in \mathbb{C}^{1+N}$, entonces $\mathbf{v} = L\mathbf{u} = \{v_n\}_{n=0}^N \in \mathbb{C}^{1+N}$ tiene por componentes

$$v_n = \sum_{k=\max\{0, 2n-N\}}^{\min\{2n, N\}} b_k u_{2n-k}, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Costruye una función MATLAB que genere el operador $\mathbf{v} = \text{filtro}(\mathbf{u}, \mathbf{b})$, así como otra para la matriz de $L = \text{matfiltro}(\mathbf{b})$.

b) Supongamos que el operador L anterior cumple: (1) L admite el autovalor $\lambda = 1$ y dicho autovalor es simple y (2) los restantes autovalores de L tienen módulo estrictamente inferior a 1. En estas condiciones, el subespacio propio asociado a $\lambda = 1$ es de dimensión 1.

Razona que para cualquier vector inicial $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{1+N}$ siempre va a existir

$$\mathbf{u}_\infty = \lim_{m \rightarrow +\infty} L^m \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{1+N}$$

y que \mathbf{u}_∞ es un autovector de L asociado a 1, es decir, $L\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_\infty$. Razona que en ocasiones \mathbf{u}_∞ puede ser cero.

Supongamos además que se sabe que existe un autovector $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n=0}^N \in \mathbb{C}^{1+N}$ de L asociado a 1 y que cumple

$$\sum_{n=0}^N f_n = 1.$$

Escribe un programa MATLAB, $\mathbf{f} = \text{autesp}(L)$, que permita obtener \mathbf{f} con la mayor precisión posible. Hay que evitar el cálculo de las potencias L^m , $m \geq 1$.

c) Sea $H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \exp(-in\omega)$ el filtro de paso bajo asociado a una AMR con funci'ón de escala ϕ que se supone soportada en $[0, N]$ y continua. Razonar (al menos un esbozo) que tomando $\mathbf{b} = \sqrt{2}\mathbf{h} = \sqrt{2}\{h_n\}_{n=0}^N$, entonces L cumple las condiciones en b). Razona (al menos un esbozo) que

$$\sum_{n=0}^N \phi(n) = 1.$$

Demuestra que (con la notación anterior).

$$\mathbf{f} = \{\phi(n)\}_{n=0}^N.$$

d) En las condiciones de c), usando la ecuación de escala, escribe un programa MATLAB, $\mathbf{v} = \text{refinphi}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, que para un input de la forma

$$\mathbf{u} = \{\phi(2^j n)\}_{n=0}^{N_j-1} \in \mathbb{C}^{N_j}$$

permita obtener

$$\mathbf{v} = \{\phi(2^{j-1} n)\}_{n=0}^{N_{j-1}-1} \in \mathbb{C}^{N_{j-1}}.$$

e) En las condiciones de c), determina la ventana $[N_1, N_2]$ que soporta los coeficientes del filtro de paso alto $G(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \exp(-in\omega)$. Escribe una función MATLAB, $\mathbf{g} = \text{filalto}(\mathbf{h})$, que permita obtener los coeficientes $\mathbf{g} = \{g_n\}_{n=N_1}^{N_2}$ a partir de \mathbf{h} .

f) En las condiciones de c), se sabe que la función wavelet ψ está soportada en $[1/2 - N/2, 1/2 + N/2]$. Escribe una programa MATLAB, $v = \text{obtenpsi}(u)$, que para la entrada

$$u = \{\phi(2^j n)\}_{n=0}^{N_j-1} \mathbb{C}^{N_j}$$

permita obtener

$$v = \{\psi(1/2 - N/2 + 2^j n)\}_{n=0}^{N_j-1} \mathbb{C}^{N_j}$$

g) Para cargar los coeficientes \mathbf{h} que corresponden al AMR de Daubechies, primero se carga el vector `dbp`, donde $p \geq 2$ es el número de momentos nulos de ψ (por ejemplo `db3`, `db8`, ...). Tras teclear en la ventana de comandos de MATLAB la instrucción

```
load dbp
```

obtenemos un vector fila, llamado `dbp`. El vector que necesitamos para ajustarnos a nuestra notación es

$$\mathbf{h} = \sqrt{2} * (\text{fliplr}(\text{dbp}))'$$

(hay que invertir el orden, trasponer para trabajar con vectores columna y renormalizar por $\sqrt{2}$).

Con la ayuda de los programas anteriores, escribe sendos programas para hacer los plots que corresponden a `db4`, tanto para las evaluaciones de ϕ como de ψ sobre los nodos diádicos con $j = 0 : -1 : -12$. Dichos plots se harán frente a los nodos diádicos correspondientes a las ventanas soporte.

h) Empleando interpolación lineal y los valores anteriores para $j = -12$, de nuevo para `db4`, escribe sendos programas MATLAB que permitan aproximar $\phi(t)$ y $\psi(t)$ para un valor arbitrario $t \in \mathbf{R}$.

i) Manteniendo el AMR para `db4`, dada una función $f \in L^2(\mathbf{R})$, regular a trozos, tomaremos como coeficientes aproximados

$$\langle f, \phi_{j,n} \rangle \approx 2^{j/2} f(2^j n).$$

Sea la función f , soportada en $[0, 2]$, y definida por $f(t) = t^3 - t^2 + t - 1$, si $0 \leq t \leq 1$, y por $(t - 1)^5$, si $1 < t \leq 2$.

Para $j = -12$, haz un plot de $f(t)$ y de la aproximación de $P_{V_j} f(t)$ frente a $t = -1 : 0.01 : 2$.

j) Para la situación en g), empleando el algoritmo de Mallat, obten los coeficientes de $P_{V_{j+1}} f$ y de $P_{W_{j+1}} f$ a partir de los de $P_{V_j} f$.

Haz un plot de dichos coeficientes frente a los nodos diádicos correspondientes a la ventana $[-1, 2]$. Interpreta.

Haz un plot de las funciones $P_{V_{j+1}} f(t)$ y $P_{W_{j+1}} f(t)$ frente a $t = -1 : 0.01 : 2$. Interpreta.

Haz un plot de $P_{V_j} f(t)$ y $P_{V_{j+1}} f(t) + P_{W_{j+1}} f(t)$ frente a $t = -1 : 0.01 : 2$. Interpreta.

NOTA. Los apartados desde el h) al j) constituyen la práctica opcional.