CMII, PRACTICA 4

Para $N \geq 1$ y $j \leq 0$, denotemos $N_j = 1 + 2^{|j|}$. Por ejemplo, $N_0 = 1 + N$.

a) Dado un vector $\mathbf{h} = \{h_n\}_{n=0}^N \in \mathbb{C}^{1+N}$, se considera el operador $L : \mathbb{C}^{1+N} \to \mathbb{C}^{1+N}$ definido como sigue: si $\mathbf{u} = \{u_n\}_{n=0}^N \in \mathbb{C}^{1+N}$, entonces $\mathbf{v} = L\mathbf{u} = \{v_n\}_{n=0}^N \in \mathbb{C}^{1+N}$ tiene por componentes

$$v_n = \sum_{\max\{0,2n-N\}}^{\min\{2n,N\}} h_k u_{2n-k}, \qquad 0 \leq n \leq N.$$

Costruye una función MATLAB que genere el operador $\mathbf{v} = filtro(\mathbf{u}, \mathbf{h})$, así como otra para la matriz de $L = matfiltro(\mathbf{h})$.

b) Supongamos que el operador L anterior cumple: (1) L admite el autovalor $\lambda = 1$ y dicho autovalor es simple y (2) los restantes autovalores de L tienen módulo estrictamente inferior a 1. En estas condiciones, el subespacio propio asociado a $\lambda = 1$ es de dimensión 1.

Razona que para cualquier vector inicial $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{1+N}$ siempre va a existir

$$\mathbf{u}_\infty = \lim_{m\to+\infty} L^n \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{1+N}$$

y que $\mathbf{u}_\infty$ es un autovector de L asociado a 1, es decir, $L\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_\infty$. Razona que en ocasiones $\mathbf{u}_\infty$ puede ser cero.

Supongamos además que se sabe que existe un autovector $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n=0}^N \in \mathbb{C}^{1+N}$ de L asociado a 1 y que cumple

$$\sum_{n=0}^N f_n = 1.$$

Escribe un programa MATLAB, $\mathbf{f} = autesp(L)$, que permita obtener $\mathbf{f}$ con la mayor precisión posible. Hay que evitar el cálculo de las potencias L^m, $m \geq 1$.

c) Sea $H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \exp(-in\omega)$ el filtro de paso bajo asociado a una AMR con funci'on de escala ϕ que se supone soportada en $[0, N]$ y continua. Razonar (al menos un esbozo) que tomando $\mathbf{h} = \{h_n\}_{n=0}^N$, entonces L cumple las condiciones en b). Razona (al menos un esbozo) que

$$\sum_{n=0}^N \phi(n) = 1.$$

Demuestra que (con la notación anterior).

$$\mathbf{f} = \{\phi(n)\}_{n=0}^N.$$

d) En las condiciones de c), usando la ecuación de escala, escribe un programa MATLAB, $v = refinphi(u)$, que para un input de la forma

$$u = \{\phi(2^j n)\}_{n=0}^{N_j-1} \in \mathbb{C}^{N_j}$$

permita obtener

$$v = \{\phi(2^{j-1} n)\}_{n=0}^{N_{j-1}-1} \in \mathbb{C}^{N_{j-1}}.$$

e) En las condiciones de c), determina la ventana $[N_1, N_2]$ que soporta los coeficientes del filtro de paso alto $G(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \exp(-in\omega)$. Escribe una función MATLAB, $\mathbf{g} = filalto(\mathbf{h})$, que permita obtener los coeficientes $\mathbf{g} = \{g_n\}_{n=N_1}^{N_2}$ a partir de $\mathbf{h}$.

f) En las condiciones de c), se sabe que la función wavelet ψ está soportada en $[1/2 - N/2, 1/2 + N/2]$. Escribe una programa MATLAB, $v = obtenpsi(u)$, que para la entrada

$$u = \{\phi(2^j n)\}_{n=0}^{N_j-1}\mathbb{C}^{N_j}$$

permita obtener

$$v = \{\psi(1/2 - N/2 + 2^j n)\}_{n=0}^{N_j-1}\mathbb{C}^{N_j}$$

g) Para cargar los coeficientes $\mathbf{h}$ que corresponden al AMR de Daubechies, primero se carga el vector dbp, donde $p \geq 2$ es el número de momentos nulos de ψ (por ejemplo db3, db8, ...). Tras teclear en la venatana de comandos de MATLAB la instrucci'on

load dbp

obtenemos un vector fila, llamado dbp. El vector que necesitamos para ajustarnos a nuestra notación es

$$\mathbf{h} = \sqrt{2} * (fliplr(dbp))'$$

(hay que invertir el orden, trasponer para trabajar con vectores columna y renormalizar por $\sqrt{2}$).

Con la ayuda de los programas anteriores, escribe sendos programas para hacer los plots que corresponden a $db4$, tanto para las evaluaciones de ϕ como de ψ sobre los nodos diádicos con $j = 0 : -1 : -12$. Dichos plots se harán frente a los nodos diádicos correspondientes a las ventanas soporte.

h) Empleando interpolación lineal y los valores anteriores para $j = -12$, de nuevo para $db4$, escribe sendos programas MATLAB que permitan aproximar $\phi(t)$ y $\psi(t)$ para un valor arbitrario $t \in \mathbf{R}$.

i) Manteniendo el AMR para db4, dada una función $f \in L^2(\mathbf{R})$, regular a trozos, tomaremos como coeficientes aproximados

$$\langle f, \phi_{j,n}\rangle \approx 2^{j/2} f(2^j n).$$

Sea la función f, soportada en $[0, 2]$, y definida por $f(t) = t^3 - t^2 + t - 1$, si $0 \leq t \leq 11$, y por $(t-1)^5$, si $1 < t \leq 2$.

Para $j = -12$, haz un plot de $f(t)$ y de la apromimación de $P_{V_j} f(t)$ frente a $t = -1 : 0.01 : 2$.

j) Para la situación en g), empleando el algoritmo de Mallat, obten los coeficientes de $P_{V_{j+1}} f$ y de $P_{W_{j+1}} f$ a partir de los de $P_{V_j} f$.

Haz un plot de dichos coeficientes frente a los nodos diádicos corresppondientes a la ventana $[-1, 2]$. Interpreta.

Haz un plot de las funciones $P_{V_{j+1}} f(t)$ y $P_{W_{j+1}} f(t)$ frente a $t = -1 : 0.01 : 2$. Interpreta.

Haz un plot de $P_{V_j} f(t)$ y $P_{V_{j+1}} f(t) + P_{W_{j+1}} f(t)$ frente a $t = -1 : 0.01 : 2$. Interpreta.

NOTA. Los apartados desde el h) al j) constituyen la práctica opcional.