Práctica 3. Complementos Matemáticos II.
Aproximación numérica a la transformada de Fourier.

1. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ una función suficientemente regular, con soporte en $(-L, L)$ que admite serie de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{\pi i n(t+L)}{L}}, \\ c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) e^{-\frac{\pi i n(t+L)}{L}} dt, \end{aligned}$$

en dicho intervalo.

- Comprueba que

$$\hat{f}(\omega) = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n c_n h_L(\omega - \omega_n), \tag{1}$$

con

$$h_L(\omega) = \frac{\sin(L\omega)}{L\omega}, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

- Comprueba que

$$\hat{f}(\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = 2L(-1)^n c_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

- De (1) y (2) deduce que

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_n) h_L(\omega - \omega_n), \tag{4}$$

2. Las fórmulas (1)-(4) permiten implementar un procedimiento numérico para aproximar la transformada de Fourier de una función con soporte en $[-L, L]$. Elabora un programa MATLAB (tfourier.m) para computar la aproximación

$$\sum_{n=-M}^{M-1} \hat{f}(\omega_n) h_L(\omega - \omega_n). \tag{5}$$

Datos de entrada: $L, N = 2M$, vector de muestras y sobre $[-L, L]$ de la función f cuya transformada se quiere aproximar y vector ω de frecuencias sobre el que representar la aproximación. El vector de muestras y el tamaño N deben cargarse de un fichero externo, donde se puedan cambiar las funciones que sirvan como ilustración (véase el apartado 3).

Datos de salida: Valores de la aproximación (5) en el vector de frecuencias ω y gráfica de ω frente a (5).

Explica cómo podríamos aproximar una transformada inversa usando la función MATLAB anterior.

3. Usa el programa anterior para aproximar la transformada de Fourier de $f(t) = \exp(-t^2)$. Para ello toma $N = 2^9$ muestras sobre la ventana $[-10, 10]$. Las evaluaciones se piden para el vector $\omega = -100 + 200 * [0 : 2^{10} - 1]'/2^{10}$. Usando ahora como muestras de la transformada los valores de la aproximación obtenidos para ω, computa numéricamente la transformada inversa. En un plot, dibuja la transformada y, en otro, conjuntamente la función original y la obtenida al invertir numéricamente la transformada. Comenta si el resultado es aceptable o no.

Repite el experimento para la función $f(x) = 1$, si $-1 \leq x \leq 1$, y $f(x) = 0$ en otro caso (pulso rectangular) . Comenta el resultado.

RESULTADOS. Escribe un informe que incluya:

1. Los resultados teóricos del apartado 1.
2. Las gráficas del apartado 3.
3. Los comentarios a los resultados, que se solicitan a lo largo de la práctica.
4. Un listado del programa.

Plazo de entrega: tres semanas desde la publicación de la práctica en la página de la asignatura.