COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICAS I
(Ingeniero de Telecomunicación)

Curso 2011/2012 - Ejercicios para entregar

Hoja 1 - Complementos de Cálculo Integral

Fecha de entrega: 4 de Abril de 2011

1.-

i) Sean $r > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que para todo $t \in [0, r]$ se verifica que

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|(-1)^k t^{2k}|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{2k}}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{k!} = e^{r^2} = g(t)\,.$$

ii) Deducir que para cada $x \geq 0$ se tiene que $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)\,k!}\, x^{2k+1}.$

iii) **(opcional)** se propone confeccionar un tabla de valores para la integral gaussiana $\int_0^x e^{-t^2}dt$ aproximados mediante las sumas parciales $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)\,k!}\, x^{2k+1}$; por ejemplo, para nodos $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{10^m} = 1$ equiespaciados por $h_i = x_i - x_{i-1} = 10^{-m}$. Para ello, prográmese el correspondiente código atendiendo al error tolerado, estimando la diferencia entre la suma total de la serie correspondiente y una suma parcial *(entregue sólo en papel un breve informe sobre los resultados; el resto, código, tablas de resultados, etc., entréguelo en formato digital).*

iv) **(opcional)** utilice cualquier método de cuadratura numérica (trapecio, Simpson, etc.) para aproximar las integrales $\int_0^x e^{-t^2}dt$. Compare este procedimiento con el de iii), analizando precisión y coste operativo *(entregue sólo en papel el informe; los datos en formato digital).*

2.- Se considera la función dada por $\displaystyle f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-yx}}{\mathrm{Ch}(x)}\,dx\,,\ \ y \in (-1, 1)\,.$

i) Comprobar que la función f está bien definida y es de clase $\mathcal{C}^1$ en $(-1, 1)$, y obtener una expresión integral de f'.

ii) Mediante el cambio de variable $e^x = t$, probar que $\displaystyle f(y) = \frac{\pi}{\cos\left(\pi\, y/2\right)}\,.$

Sugerencia: Relaciónese la integral resultante con las eulerianas.

iii) Deducir el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, e^{-x/2}}{\mathrm{Ch}(x)}\,dx\,.$

3.- Sobre transformadas de Fourier

i) Si f y la función $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \|\boldsymbol{x}\|\, f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}$ son integrables en $\mathbb{R}^n$, entonces $\widehat{f}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que $D_j \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \mathcal{F}(-i\, x_j\, f(\boldsymbol{x}))$, es decir,

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \omega_j}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^n} -i\, x_j\, e^{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_n x_n)}\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

ii) Sean $a, b > 0$. Haciendo uso de la convolución y de la fórmula de inversión de la transformada de Fourier, calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(a\,x)\,\mathrm{sen}(b\,x)}{x^2}\,dx\,.$$

Instrucciones: (aplicables a todas las entregas)

Grupos: Se permite presentar en grupos libremente formados y de, a lo sumo, 3 personas.

Formato: Preséntese mecanografiado o manuscrito con tinta indeleble (en este caso esmérese en la caligrafía). Si se desea, se pueden entregar aparte: hojas con cálculos, documentos digitales (imágenes, tablas de datos, códigos informáticos, etc.; esto por e-mail), o cualquier otro material relacionado.

Identificación: Se escribirán Apellidos y Nombre, en este orden, del alumno o de todos los integrantes del grupo, según el caso, en lugar bien visible de la primera página de la entrega.

Actividades adicionales recomendadas:
(sin fecha límite de entrega)

No se exige la realización ni presentación de estas actividades, pero se valorará positivamente **en el examen final** un informe o memoria de actividades mencionado aspectos tales como:
1.- fuentes de documentación: bibliografía, URL de páginas Web consultadas, etc.
2.- resultados gráficos y/o numéricos (según sea pertinente).
3.- material informático elaborado (códigos C++, applets de java, etc).
4.- relación de dificultades, dudas y cuestiones adicionales que puedan surgir en el estudio del tema.

A1.- Conjuntos fractales

Cuando se cotemplan subconjuntos de los espacios euclídeos más generales que las variedades diferenciables se encuentran sorpresas como, por ejemplo:

- que exista un subconjunto de $\mathbb{R}$ con una infinidad no numerable de puntos pero de medida (longitud, en este caso) nula; véase el *Conjunto Ternario de Cantor*,
- que existan conjuntos acotados del plano cuya frontera sea una curva continua de longitud infinita (no rectificable); ver la *Curva de Von Koch*,
- o que sea posible construir un conjunto de área nula en $\mathbb{R}^2$ que corte a toda recta del plano en infinitos puntos; el *Triángulo de Sierpinsky* genera una teselación o mosaico del plano con esa propiedad.

Se propone investigar sobre estos objetos en Internet. Esto puede servir de aliciente e introducción para una posterior profundización en el concepto de *Conjunto Fractal*.

A2.- Funciones Meseta

La construcción de funciones meseta expuesta en el ejercicio 1.20 es susceptible de ser representada gráficamente de una forma relativamente sencilla. Es posible incluso encontrar en la Web animaciones sobre la convolución.

Se sugiere que el alumno se documente en internet sobre este aspecto y que intente confeccionar representaciones gráficas (usando Matlab, applets de Java, etc.) de los dos métodos expuestos para construir tales funciones.

Asimismo, para funciones esaclonadas, o continuas a trozos, esto es, de las que aparecen habitualmente en los tratados de señales en tiempo continuo, el apartado iii) del citado ejercicio proporciona un método para aproximar en el sentido de la integral estas funciones por otras de clase $\mathcal{C}^\infty$, proceso también de fácil representación gráfica.

COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICAS I
(Ingeniero de Telecomunicación)

Curso 2011/2012 - Ejercicios para entregar:

Hoja 2 - Transformadas de Laplace

Fecha de entrega: 2 de Mayo de 2012

4.- Sea $c = a + i\,b$ un número complejo ($a = \mathrm{Re}(c)$, $b = \mathrm{Im}(c)$). Comprobar que la función $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(t) = \cos(c\,t)$$

admite transformada de Laplace. Calcular $\mathfrak{L}f(z)$ y determinar su abscisa de convergencia.

¿Observa alguna diferencia con el caso $c \in \mathbb{R}$?

5.- Sea $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ la aproximación de la identidad en $\mathbb{R}$ dada por $\theta_n = n\,\chi_{[0,1/n]}$. Pongamos

$$F_n(z) = \mathfrak{L}\,\theta_n(z)\,.$$

Calcular, si existe, $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(z)$. Interpretar y comentar el resultado en relación con los resultados teóricos expuestos.

6.- Sea $p > -1$. Se considera la función f de $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ definida por $f(t) = t^p$.

i) Demostrar que para $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ se tiene que $\mathfrak{L}f(s) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$.

ii) Aplicar el principio de identidad para concluir que

$$\mathfrak{L}f(z) = \frac{\Gamma(p+1)}{z^{p+1}}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) > 0$ (la potencia z^a se define en términos de la rama principal del logaritmo).

Actividades adicionales recomendadas:

Recabando información entre la bibliografía seleccionada, los fondos de la Biblioteca Universitaria en general, e incluso Internet, se propone confeccionar una tabla de transformadas de Laplace tan extensa como se quiera.

Una entrada típica de la tabla podría ser:

función $f(t)$	(si procede) gráfica de $f(t)$	transformada $F(z) = \mathfrak{L}f(z)$	abscisa de convergencia σ

Esta tabla puede ser añadida a la documentación de la asignatura suministrada por los profesores y ser utilizada en las pruebas de evaluación.

COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICAS I
(Ingeniero de Telecomunicación)

Curso 2011/2012 - Ejercicios para entregar:

Hoja 3 - Distribuciones

Fecha de entrega: 28 de Mayo de 2011

8.- Partes finitas de Hadamard. Pseudofunciones

Consideremos un número natural k. Entonces la función $g_k(x) = H(x)/x^k$, esto es, la definida en casi todo punto por

$$g_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1/x^k & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

no es integrable en ningún entorno de $x_0 = 0$, y por consiguiente no se puede considerar las función generalizada T_{g_k}. Se trata de asociar distribuciones a las funciones ordinarias g_k, que gocen de propiedades de derivación similares a las de las funciones clásicas.

i) Si $k \in \mathbb{N}$, escribir, para cada función test φ y cada $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x^k}\,\varphi(x)\,dx = I(\varepsilon) + F(\varepsilon)$$

siendo $I(\varepsilon)$ una combinación lineal de $\ln(\varepsilon)$ y potencias de ε con exponente negativo, y $F(\varepsilon)$ una función de ε que tenga límite finito cuando $\varepsilon \to 0^+$; este límite es la denominada *parte finita* de la integral de $g_k\,\varphi$, denotada por

$$Pf\int_{-\infty}^\infty \frac{H(x)}{x^k}\,\varphi(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^k}\,dx - I(\varepsilon)\right).$$

ii) Pruébese que las aplicaciones

$$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longmapsto Pf\int_{-\infty}^\infty \frac{H(x)}{x^k}\,\varphi(x)\,dx\,,$$

definen distribuciones, las denominadas *pseudofunciones* $\text{p.f.}\dfrac{H}{x^k}$.

iii) Para cada función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y cada $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se ha definido $f\,T$. Se pide analizar y describir de forma más sencilla las distribuciones siguientes:

$$x^k\,\text{p.f.}\frac{H}{x^k}\,,\quad x^{k+1}\,\text{p.f.}\frac{H}{x^k}\,,\quad \sin(x)\,\text{p.f.}\frac{H}{x}\,.$$

iv) Probar que, si $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left(\text{p.f.}\frac{H}{x^k}\right)' = -k\cdot\text{p.f.}\frac{H}{x^{k+1}} + \frac{(-1)^k}{k!}\,\delta^{(k)}.$$