Universidad de Valladolid
E.T.S. de Ingenieros
de Telecomunicación.

FORMULARIO DE

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS de la Ingeniería I

1er Curso de
Ingeniero de Telecomunicación

§ 1 INTERVALOS EN $\mathbb{R}^p$.

Definición 1.1.- Llamaremos *intervalo* (*acotado*) de $\mathbb{R}^p$ a todo producto cartesiano I de intervalos acotados $I_1, I_2, \ldots, I_p$ de $\mathbb{R}$: $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_p$.
Si a_j, b_j son números reales, $a_j < b_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, el intervalo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ se dice *cerrado* y el intervalo $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_p, b_p)$, se dice *abierto*.

Observación 1.2.- Los intervalos cerrados son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^p$. Los intervalos abiertos son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^p$. Además el interior de un intervalo es el intervalo abierto de iguales extremos.

Definición 1.3.- Sea I un intervalo compacto de $\mathbb{R}^p$. Se llama *partición* de I a toda familia finita $\boldsymbol{P} = \{I_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ de intervalos compactos verificando las dos condiciones siguientes:
i) $I = \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$. *ii)* Si $k \neq j$, entonces $\overset{\circ}{I_k} \cap \overset{\circ}{I_j} = \emptyset$.
Los intervalos I_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, se denominan *subintervalos* de la partición.

Definición 1.5.- Sean $\boldsymbol{P} = \{I_k : 1 \leq k \leq n\}$ y $\boldsymbol{Q} = \{J_l : 1 \leq l \leq m\}$ dos particiones de un mismo intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. Se dice que $\boldsymbol{P}$ es *más fina* que $\boldsymbol{Q}$ si cada subintervalo J_l de $\boldsymbol{Q}$ puede ser escrito como unión de subintervalos de $\boldsymbol{P}$.

Definición 1.7.- Para cada intervalo compacto de $\mathbb{R}^p$, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p]$, se define su *medida* (*p-dimensional*) por

$$m(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_p - a_p)\,,$$

y de igual forma se define la medida de los demás intervalos comprendidos entre $\overset{\circ}{I}$ e I.

Observaciones 1.8.-
i) Los términos *longitud*, *área* y *volumen* se refieren a la medida en los casos $p = 1, 2, 3$, respectivamente.
ii) De forma rigurosa deberíamos denotar por m_p a la medida p-dimensional, pero por no recargar la notación omitiremos el subíndice en la mayoría de los casos, puesto que vendrá dado por el contexto.
iii) Cuando digamos que un conjunto es un intervalo admitiremos la posibilidad de que el conjunto sea vacío y, en ese caso, se define $m(\emptyset) = 0$.

Propiedades 1.9.-
i) La intersección de dos intervalos es un intervalo.
ii) Si I, J son dos intervalos de $\mathbb{R}^p$, con $I \subseteq J$, entonces $m(I) \leq m(J)$.
iii) Si I es un intervalo de $\mathbb{R}^p$ y J es un intervalo de $\mathbb{R}^q$, entonces $I \times J$ es un intervalo de $\mathbb{R}^{p+q}$ y $m_{p+q}(I \times J) = m_p(I)\, m_q(J)$.
iv) Si $\boldsymbol{P} = \{I_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ es una partición del intervalo compacto I, entonces $m(I) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(I_k)$.

Definición 1.10.- Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^p$ se dice *de medida nula* si para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia numerable de intervalos $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$ tales que:
i) $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$. *ii)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(I_k) < \varepsilon$.

Propiedades 1.13.-
i) Si $E \subset \mathbb{R}^p$ es de medida nula y $A \subset E$, entonces A es de medida nula.
ii) La unión finita o numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula.

Teorema 1.15.- Sea U un abierto de $\mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{f}: U \to \mathbb{R}^p$, con $m < p$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$, entonces $\boldsymbol{f}(U)$ es un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^p$.

Corolario 1.16.- Las variedades diferenciables en $\mathbb{R}^p$, de dimensión estrictamente menor que p son conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}^p$.

Observación 1.17.- El soporte de una curva de clase $\mathcal{C}^1$ en el plano o en el espacio tiene medida (área, volumen) nula en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, respectivamente. El soporte de una superficie de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$ tiene medida (volumen) nula en $\mathbb{R}^3$.

§ 2 INTEGRACIÓN EN INTERVALOS.

Definición 2.1.- Sea f una función real definida y acotada en el intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. Dada una partición de I, $\boldsymbol{P} = \{I_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$, para $k = 1, 2, \ldots, n$ se definen los números reales

$$\mu_k(f) = \inf\{f(\boldsymbol{x}) \,:\, \boldsymbol{x} \in I_k\} \qquad \text{y} \qquad M_k(f) = \sup\{f(\boldsymbol{x}) \,:\, \boldsymbol{x} \in I_k\}\,.$$

Los números reales $s(f, \boldsymbol{P}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k(f)\, m(I_k)$ y $S(f, \boldsymbol{P}) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(f)\, m(I_k)$ se denominan, respectivamente, *suma inferior de Darboux* de f asociada a $\boldsymbol{P}$ y *suma superior de Darboux* de f asociada a $\boldsymbol{P}$.

Elegido un punto $\boldsymbol{x}_k \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, el conjunto $T = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, se denomina *conjunto de puntos intermedios asociado a* $\boldsymbol{P}$ y el número dado por $\sigma(f, \boldsymbol{P}, T) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_k)\, m(I_k)$ se llama *suma de Riemann de* f *asociada a* $\boldsymbol{P}$ *y a* T.

Definición 2.4.- Sea f una función real definida y acotada en el intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. La *integral superior de Riemann* de f en I es el número $\overline{\int_I} f = \inf\big\{S(f, \boldsymbol{P}) \,:\, \boldsymbol{P} \text{ es partición de } I\big\}$. Análogamente, se define la *integral inferior de Riemann* de f en I como el número $\underline{\int_I} f = \sup\big\{s(f, \boldsymbol{P}) \,:\, \boldsymbol{P} \text{ es partición de } I\big\}$.

Definición 2.6.- Se dice que una función real f, definida y acotada en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$, es *integrable en el sentido de Riemann* o *Riemann-integrable* o simplemente *integrable* en I si $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$ y en este caso, al valor de ambas se le denomina *integral de* f *en* I y se denota por

$$\int_I f \qquad \text{o} \qquad \int_I f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \qquad \text{o} \qquad \int_I f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_p\,.$$

Observación 2.7.- En la práctica es habitual indicar la dimensión del espacio donde se integra mediante la repetición del símbolo de la integral y así las notaciones

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy\,; \qquad \iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,,$$

son usuales cuando se integra en intervalos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Teorema 2.8.- Sea f una función real definida y acotada en el intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. f es integrable en I si, y sólo si, existe un número real $\mathcal{I}(f)$ que verifica la siguiente propiedad: "Para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $\boldsymbol{Q}$ de I de modo que para toda partición $\boldsymbol{P}$ de I más fina que $\boldsymbol{Q}$ y para cada conjunto T de puntos intermedios asociado a $\boldsymbol{P}$ se tiene que $\big|\mathcal{I}(f) - \sigma(f, \boldsymbol{P}, T)\big| < \varepsilon$". En este caso resulta ser $\mathcal{I}(f) = \int_I f$.

Propiedades 2.9.- Sean f y g funciones reales definidas e integrables en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$.

2.9.1.- Linealidad: Las funciones $f + g$ y $k\, f$, $k \in \mathbb{R}$, son integrables en I, y se tiene que

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g \qquad \text{y} \qquad \int_I k\, f = k \int_I f\,.$$

2.9.2.- Monotonía: Si $f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x} \in I$, entonces $\displaystyle\int_I f \le \int_I g$.

2.9.3.- La función $|f|$ es integrable en I, y $\displaystyle\Big|\int_I f\Big| \le \int_I |f| \le \sup\{|f(\boldsymbol{x})| : \boldsymbol{x} \in I\}\, m(I)$.

El recíproco no es cierto, es decir, la integrabilidad de $|f|$ no implica la de f.

Proposición 2.10.- Sea f una función integrable en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$ y tal que $f(I) \subset [a, b]$. Si $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces, la función compuesta $g \circ f$ es integrable en I.

Corolario 2.11.- Sean f y g funciones integrables en un mismo intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. Entonces:

i) f^2 y $f\, g$ son integrables en I.

ii) Si existe $\delta > 0$ tal que $f(\boldsymbol{x}) \ge \delta$ para cada $\boldsymbol{x} \in I$, entonces, la función $1/f$ es integrable en I.

Proposición 2.12.- (*Aditividad de la integral respecto del intervalo*) Sean f una función real definida y acotada en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{P} = \{I_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ una partición de I. Entonces, f es integrable en I si, y sólo si, es integrable en cada subintervalo I_k, $1 \le k \le n$. Además, si es integrable se verifica

$$\int_I f = \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} f\,.$$

Proposición 2.13.- Sea f una función constante en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$, $f(\boldsymbol{x}) = c \in \mathbb{R}$ para cada $\boldsymbol{x} \in I$. Entonces f es integrable en I y $\int_I f = \int_I c = c\; m(I)$.

Teorema 2.14.- Toda función continua en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$ es integrable en dicho intervalo.

Teorema 2.18.- (*Criterio de Lebesgue de Riemann-integrabilidad*) Sea f una función real definida y acotada en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. Es condición necesaria y suficiente para que f sea integrable en el sentido de Riemann en I que el conjunto de puntos de discontinuidad de f sea de medida nula, es decir, que exista un subconjunto $A \subset I$ de medida nula tal que f es continua en $I \setminus A$.

Notación: Si $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_q) \in \mathbb{R}^q$, representaremos por $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ al elemento de $\mathbb{R}^{m+q}$ dado por $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_q)$.

Definición 2.19.- Sea I un intervalo de $\mathbb{R}^{m+q}$. La *proyección* de I en $\mathbb{R}^m$ es el intervalo $J_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in I \text{ para algún } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^q\}$, y la *proyección* de I en $\mathbb{R}^q$ es el intervalo $J_2 = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^q : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in I \text{ para algún } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\}$. Obviamente $I = J_1 \times J_2$.

Si f es una función real definida en I, y $\boldsymbol{x} \in J_1$, la *sección* de f por $\boldsymbol{x}$ es la función $f_{\boldsymbol{x}} \colon J_2 \to \mathbb{R}$ dada por $f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Análogamente, si $\boldsymbol{y} \in J_2$, la *sección* de f por $\boldsymbol{y}$ es la función $f_{\boldsymbol{y}} \colon J_1 \to \mathbb{R}$ dada por $f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Teorema 2.20.- (*de Fubini*) Sea f una función integrable en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{m+q}$. Entonces:

i) Las funciones $\varphi(\boldsymbol{x}) = \overline{\int_{J_2}} f_{\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{y} = \overline{\int_{J_2}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$ y $\psi(\boldsymbol{y}) = \overline{\int_{J_1}} f_{\boldsymbol{y}}\, d\boldsymbol{x} = \overline{\int_{J_1}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}$ son integrables en J_1 y J_2, respectivamente.

ii) Se verifica que:

$$\int_I f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y} = \int_{J_1} \varphi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{J_1} \left(\int_{J_2} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \right) d\boldsymbol{x} = \int_{J_2} \psi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = \int_{J_2} \left(\int_{J_1} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x} \right) d\boldsymbol{y}.$$

Corolario 2.22.- Si f es integrable en el intervalo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ de $\mathbb{R}^p$, entonces

$$\int_I f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{a_p}^{b_p} \left(\cdots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots \right) dx_p,$$

supuesto que todas las integrales en los intervalos $[a_j, b_j]$ tienen sentido. Lo mismo se puede decir para cualquier permutación del orden de las variables.

§ 3 INTEGRACIÓN EN CONJUNTOS MEDIBLES.

Definición 3.1.- Si $E \subset \mathbb{R}^p$ se define su *función característica*, $\chi_E \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, por $\chi_E(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \boldsymbol{x} \in E, \\ 0, & \text{si } \boldsymbol{x} \notin E. \end{cases}$

Definición 3.3.- Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^p$. Se dice que E es *medible en el sentido de Jordan* o simplemente *medible* si su función característica es integrable en cualquier intervalo compacto I con $E \subset I$. En este caso se define la *medida de* E, denotada $m(E)$, como el número real

$$m(E) = \int_I \chi_E(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x},$$

donde I es un intervalo compacto con $E \subset I$.

Teorema 3.5.- (*Caracterización de los conjuntos medibles*) Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^p$. El conjunto E es medible en el sentido de Jordan si, y sólo si, su frontera es de medida p-dimensional nula ($\mathrm{Fr}(E) = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^p \setminus E}$).

Notación: Dada una función real f definida y acotada en un subconjunto E de $\mathbb{R}^p$, se denota por $f^* \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ la función definida por $f^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \text{si } \boldsymbol{x} \in E; \\ 0, & \text{si } \boldsymbol{x} \notin E. \end{cases}$

Definición 3.7.- Sean K un conjunto compacto y medible de $\mathbb{R}^p$ y $f \colon K \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f es *integrable en el sentido de Riemann* o simplemente *integrable* en K si la función f^* es integrable en cualquier intervalo compacto I que contenga a K. En este caso se define la *integral de* f *en* K como el número real $\int_I f^*(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ (que es igual para todo intervalo I que contenga a K) que se denota por

$$\int_K f \qquad \text{o} \qquad \int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \qquad \text{o} \qquad \int_K f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_p.$$

En los casos $p = 2$ y $p = 3$ se usan también notaciones similares a las introducidas en la observación 2.7.

Observación 3.8.- Las propiedades de la integral de Riemann en intervalos se trasladan a este contexto y así son igualmente válidos los siguientes resultados, cuyos enunciados omitimos pues consisten, en todos los casos, en sustituir el intervalo I por el conjunto compacto y medible K:

- Las propiedades **2.9**.
- La proposición **2.10** y el corolario **2.11**.
- La proposición **2.13**.
- El teorema **2.14**.
- El criterio de integrabilidad de Lebesgue **2.18**.

Teorema 3.9.- Sean f y g dos funciones reales definidas y acotadas en un mismo conjunto compacto y medible K de $\mathbb{R}^p$. Se supone que f y g coinciden en todos los puntos de K excepto quizá en los de un cerrado de medida nula, es decir, que existe un subconjunto cerrado y de medida nula $N \subset K$ tal que $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x} \in K \setminus N$. Entonces, las funciones f y g son simultáneamente integrables o no integrables en K; además, en caso de serlo se verifica que $\displaystyle\int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_K g(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$.

Proposición 3.11.- Sea f una función real definida y acotada en un subconjunto compacto y medible K de $\mathbb{R}^p$. Se supone que $\{K_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$ es una familia de compactos medibles de $\mathbb{R}^p$ tales que:

i) $K = \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_j$. *ii)* Si $j \neq l$, entonces $K_j \cap K_l$ es de medida nula.

Entonces, f es integrable en K si, y sólo si, es integrable en cada K_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Además, si es integrable, se verifica que $\int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \int_{K_j} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$.

Observación 3.13.- En cuanto a la integración iterada, para funciones integrables f en compactos medibles K el teorema de Fubini se aplica a la función f^* en un intervalo I que contenga a K, pero en ciertas situaciones es posible dar expresiones más operativas en la práctica. Veamos algunos ejemplos:

1. Sean $[a, b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y φ_1, φ_2 funciones continuas en $[a, b]$ tales que $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ para cada $x \in [a, b]$. El conjunto A de $\mathbb{R}^2$ definido por $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ es compacto y medible. Si f es una función integrable en A, se tiene que

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Un resultado análogo se tiene intercambiando los papeles de las variables x e y.

Nota: Puede ocurrir que, siendo f integrable en A, la integral $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$ no tenga sentido para algún $x \in [a, b]$; no obstante, el resultado es cierto si para estos puntos se considera la integral superior o la integral inferior. Lo mismo se puede decir en los siguientes ejemplos y ya no volveremos a hacer más comentarios al respecto.

2. Sean A un compacto medible de $\mathbb{R}^2$ y $\psi_1, \psi_2 \colon A \to \mathbb{R}$ continuas y tales que $\psi_1(x, y) \leq \psi_2(x, y)$ para cada $(x, y) \in A$. El subconjunto E de $\mathbb{R}^3$ dado por $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$ es compacto y medible. Si f es una función integrable en E se tiene que

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_A \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy. \qquad (1)$$

3. Si el conjunto A considerado en el caso anterior es a su vez del tipo presentado en el ejemplo 1, es decir

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

φ_1, φ_2 continuas en $[a, b]$, ψ_1, ψ_2 continuas en A, la integral doble que aparece en (1) se calcula de nuevo iteradamente, resultando

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

4. Sea E un compacto y medible de $\mathbb{R}^3$ contenido en el intervalo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, y tal que para cada $z \in [a_3, b_3]$ el conjunto $E_z = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in E\big\} \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ es medible. Entonces para cada función f integrable en E se tiene que

$$\iiint_E f = \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_{E_z} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz.$$

Este método se conoce con el nombre de *integración por secciones planas* y al aplicarlo a la función constantemente igual a 1 se obtiene el denominado *principio de Cavalieri*.

§ 4 INTEGRALES IMPROPIAS.

Lema 4.1.- Sea V un conjunto abierto de $\mathbb{R}^p$. Existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de V compactos y medibles Jordan tales que:

i) $K_1 \subset \overset{\circ}{K_2} \subset K_2 \subset \overset{\circ}{K_3} \subset \ldots \subset K_{n-1} \subset \overset{\circ}{K_n} \subset \ldots$ *ii)* $V = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

En estas condiciones se dice que $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión expansiva de compactos medibles para* V.

Definición 4.3.- Sea f una función real definida en un abierto V de $\mathbb{R}^p$. Se dice que f es *localmente integrable* en V si al ser restringida a cada subconjunto compacto y medible K de V resulta ser acotada e integrable (en el sentido de Riemann) en K.

Observaciones 4.4.- Si f es localmente integrable en V también se dice que tiene sentido considerar la *integral impropia de* f *en* V, es decir, el símbolo $\int_V f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$, o cualquier otro a semejanza de las notaciones introducidas en la definición de integral de Riemann.

En la inmensa mayoría de los casos la integrabilidad local de una función viene dada por su continuidad o, en su defecto, por su continuidad salvo en un conjunto de medida nula (en la práctica, una unión de curvas en $\mathbb{R}^2$, unión de curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$, etc.).

Definición 4.5.- Sea f una función real definida y localmente integrable en un abierto V de $\mathbb{R}^p$. Se dice que la integral impropia de f en V es *convergente* si para cada sucesión expansiva de compactos medibles para V, $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe y es finito el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{K_n} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$. En este caso, el límite anterior, que resulta ser el mismo para todas las sucesiones expansivas de compactos medibles para V, se denomina *integral de* f *en* V y se denota igualmente por $\int_V f$ ó $\int_V f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ ó $\int_V f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$, o como se indica en la observación 2.7 para $p = 2$ y $p = 3$.

Proposición 4.6.- Si f es una función real definida e integrable en un compacto medible K, entonces la integral impropia de f en $V = \overset{\circ}{K}$ converge y además su valor es $\int_V f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_K f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$.

Recíprocamente, si g es localmente integrable y acotada en $\overset{\circ}{K}$, entonces cualquier función definida y acotada en K que coincida con g en $\overset{\circ}{K}$ (prolongación de g a K) es integrable, y todas las posibles prolongaciones tienen igual integral.

Propiedades 4.8.- Sean f y g dos funciones reales definidas en un mismo abierto V de $\mathbb{R}^p$. Se supone que las integrales impropias de f y g en V tienen sentido y son ambas convergentes. Entonces:

4.8.1.- Para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la integral impropia de la función $\alpha\, f + \beta\, g$ en V tiene sentido, es convergente, y además $\displaystyle\int_V \big(\alpha\, f(\boldsymbol{x}) + \beta\, g(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{x} = \alpha \int_V f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + \beta \int_V g(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$.

4.8.2.- Si $f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x} \in V$, $\displaystyle\int_V f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \le \int_V g(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$.

El concepto de convergencia absoluta es redundante:

Teorema 4.9.- Sea f una función real definida y localmente integrable en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p$. La integral impropia de f en V es convergente si, y sólo si, lo es la integral impropia de $|f|$ en V. En caso de que converjan se tiene que $\displaystyle\left|\int_V f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\right| \le \int_V |f(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x}$.

Observación 4.10.- Cuando la integral impropia de una función f en un abierto V de $\mathbb{R}^p$ tenga sentido y sea convergente diremos también que f *es integrable en* V.

Teorema 4.11.- (*Criterio de comparación*) Sean f y g dos funciones reales definidas y localmente integrables en un abierto V de $\mathbb{R}^p$, y tales que $|f(\boldsymbol{x})| \le |g(\boldsymbol{x})|$ para cada $\boldsymbol{x} \in V$. Entonces:

- **i)** Si g es integrable en V, también es f integrable en V.
- **ii)** Si f no es integrable en V, tampoco es g integrable en V.

Observación 4.12.- Para integrales impropias de funciones positivas en intervalos de la recta siguen siendo válidos los criterios usuales de convergencia, en particular los establecidos comparando con las funciones test (potenciales, exponenciales, etc).

Notación: Dada una función f definida en un abierto V de $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{m+q}$, denotaremos por f^*, al igual que en §3, a la función definida en todo $\mathbb{R}^p$ que se obtiene al extender f por 0 en los puntos que no pertenecen a V. Las *secciones* de la función f^*, $f^*_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ y $f^*_{\boldsymbol{y}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ se definen de forma análoga a como se hizo en 2.19 para cada punto $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^p$.

Teorema 4.13.- (*Criterio de Tonelli-Hobson*) Sea f una función real definida en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{m+q}$ y localmente integrable en V. Si alguna de las dos integrales iteradas

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f^*_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})| \, d\boldsymbol{y} \right) d\boldsymbol{x} \qquad \text{o} \qquad \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f^*_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})| \, d\boldsymbol{x} \right) d\boldsymbol{y}$$

existe y es finita (es decir, todas las integrales impropias en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^q$ tienen sentido y son convergentes), entonces la integral impropia de f^* en $\mathbb{R}^p$, es decir, la integral impropia de f en V, es convergente.

Corolario 4.14.- Sea f una función real definida en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p$ y localmente integrable en V. Si la integral iterada

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\cdots \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(x_1, x_2, \ldots, x_p)| \, dx_1 \Big) \, dx_2 \Big) \cdots \Big) dx_p \,,$$

existe y es finita, en el sentido de que todas las integrales en $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ tienen sentido como integrales impropias convergentes, entonces la integral impropia de f en V es convergente. Lo mismo se puede decir para cualquier permutación del orden de las variables.

Teorema 4.15.- (*de Fubini para integrales impropias*) Sea f una función real definida en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{m+q}$ y tal que la integral impropia de f en V tiene sentido y es convergente. Entonces

$$\int_V f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^p} f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} \right) d\boldsymbol{x} \,,$$

siempre que las integrales iteradas tengan sentido como integrales impropias absolutamente convergentes en $\mathbb{R}^q$ y $\mathbb{R}^m$. Análogamente, $\displaystyle\int_V f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{x} \right) d\boldsymbol{y}$, si la integración iterada tiene sentido.

Corolario 4.16.- Sea f una función real definida en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^p$ y tal que la integral impropia de f en V tiene sentido y es convergente. Entonces

$$\int_V f(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\cdots \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x_1, x_2, \ldots, x_p) \, dx_1 \Big) \, dx_2 \Big) \cdots \Big) dx_p \,,$$

siempre que todas las integrales iteradas tengan sentido como integrales impropias absolutamente convergentes en $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Lo mismo se puede decir para cualquier permutación del orden de las variables.

Observaciones 4.17.-

i) El teorema de Fubini se puede generalizar relajando sus hipótesis en el sentido siguiente: con la misma notación que en 4.15, puede suceder que para una cantidad finita de puntos $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, o incluso en todo punto $\boldsymbol{x}$ de un compacto K de $\mathbb{R}^m$ de medida nula, no tenga sentido o, teniéndolo, no sea convergente la integral $\varphi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^q} f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y}$. Dando en estos puntos un valor arbitrario a φ se sigue verificando que

$$\int_V f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^{m+q}} f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \,.$$

Lo mismo se puede decir acerca del criterio de Tonelli.

ii) Para funciones positivas (en general de signo constante) y localmente integrables en un abierto V de $\mathbb{R}^p$ se puede reformular el teorema de Fubini incluyendo el caso de integrales impropias no convergentes, dando al mismo tiempo un recíproco del criterio de Tonelli: concretamente, si admitimos, como convenio de notación, que el valor de una integral impropia no convergente es ∞, entonces sigue siendo válida la igualdad

$$\int_V f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^p} f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} \right) d\boldsymbol{x} \,,$$

entendiendo que, si $\varphi(\boldsymbol{x}) = \infty$ para todo $\boldsymbol{x}$ en un abierto no vacío de $\mathbb{R}^m$, o si la integral impropia de φ en $\mathbb{R}^m$ no converge, tampoco converge la primera.

iii) En la práctica, cuando el conjunto abierto V se puede describir de forma sencilla, el criterio de Tonelli y el teorema de Fubini se aplican directamente a las funciones $|f|$ y f, respectivamente, y no a $|f^*|$ y f^*. La adaptación a esta situación de los ejemplos expuestos en la observación 3.13, se reduce a considerar intervalos abiertos de la recta real (acotados o no) en lugar de intervalos compactos y funciones φ_j, ψ_j, $j = 1, 2$, continuas en dichos intervalos pero no necesariamente acotadas.

iv) Para funciones f que no sean de signo constante (esto es, que no coincidan con $|f|$ ó $-|f|$) el recíproco del teorema de Fubini es en general falso, es decir, puede ser que, para una función f localmente integrable en un abierto V de $\mathbb{R}^p$, existan todas las integrales iteradas y sean convergentes hacia el mismo valor, y sin embargo no sea convergente la integral impropia de f en V.

Proposición 4.18.- Sea V un abierto de $\mathbb{R}^p$. Se supone que existen $V_1, V_2, \ldots, V_k$, abiertos de $\mathbb{R}^p$, disjuntos dos a dos, y un conjunto N de medida nula, tales que $V = \big(V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k\big) \cup N$. Dada $f\colon V \to \mathbb{R}$ localmente integrable, la integral impropia de f en V converge si, y sólo si, convergen todas las integrales impropias de f en cada V_j. Además, si convergen,

$$\int_V f = \sum_{j=1}^{k} \int_{V_j} f\,.$$

§ 5 CAMBIOS DE VARIABLES.

Recordemos que si U, V son abiertos de $\mathbb{R}^p$, se dice que una aplicación $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to V$ es *difeomorfismo* o *cambio de variables de clase* $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, si $\boldsymbol{\varphi}$ es biyectiva y $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}^{-1}$ son de clase $\mathcal{C}^k$ en U y V, respectivamente.

Si $\boldsymbol{x} \in U$ el determinante de la *matriz jacobiana* de $\boldsymbol{\varphi}$ en $\boldsymbol{x}$ se denomina *determinante jacobiano* o, simplemente, *jacobiano* de $\boldsymbol{\varphi}$ en $\boldsymbol{x}$, y se denota $\mathcal{J}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$.

En virtud del teorema de la función inversa, una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$, $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to V$, es un difeomorfismo si, y sólo si, $\boldsymbol{\varphi}$ es biyectiva, y $\mathcal{J}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ para todo $\boldsymbol{x}$ de U.

Lema 5.1.- Sean U y V abiertos de $\mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\varphi}$ un difeomorfismo de U en V.

- **i)** Un subconjunto $K \subset U$ es compacto (resp. abierto) si, y sólo si, el conjunto $\boldsymbol{\varphi}(K) \subset V$ es compacto (resp. abierto).
- **ii)** Un compacto $K \subset U$ es medible si, y sólo si, $\boldsymbol{\varphi}(K)$ es medible; además, $\operatorname{Fr}\big(\boldsymbol{\varphi}(K)\big) = \boldsymbol{\varphi}\big(\operatorname{Fr}(K)\big)$.
- **iii)** Un subconjunto $E \subset U$ es de medida nula si, y sólo si, el conjunto $\boldsymbol{\varphi}(E)$ es de medida nula.

Observación 5.2.- Con las hipótesis anteriores, si K es un compacto medible de U, entonces

$$\operatorname{Fr}\big(\boldsymbol{\varphi}(K)\big) = \boldsymbol{\varphi}\big(\operatorname{Fr}(K)\big)\,.$$

Teorema 5.3.- (*del Cambio de Variables*) Sean U, V abiertos de $\mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\varphi}$ un difeomorfismo de U en V. Si $E \subset V$ es un subconjunto compacto y medible, o si E es abierto, y f es una función definida en E tal que la integral de f en E (de Riemann o impropia) tiene sentido, entonces también tiene sentido la integral (de Riemann o impropia) de la función $f\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)\,|\mathcal{J}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})|$ en el conjunto $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(E)$. Además, la primera es convergente si, y sólo si, lo es la segunda; en este caso,

$$\int_E f(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = \int_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(E)} f\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)\,|\mathcal{J}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x}\,.$$

5.6.- Cambios de variables más comunes

1. *Cambios de referencia afín en* $\mathbb{R}^p$.

Sean $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^p$, y $\boldsymbol{v}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip})$, $1 \leq i \leq p$, p vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^p$. La aplicación $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ definida por

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \boldsymbol{b} + \sum_{i=1}^{p} x_i\,\boldsymbol{v}_i$$

es un difeomorfismo cuyo jacobiano, igual en todos los puntos, es $\mathcal{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \det\big(a_{ij}\big)_{1 \leq i,j \leq p}$.

2. *Coordenadas polares en* $\mathbb{R}^2$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y consideremos los abiertos

$$U_\alpha = (0, \infty) \times (\alpha, \alpha + 2\pi)\,, \qquad V_\alpha = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{\big(t\cos(\alpha), t\operatorname{sen}(\alpha)\big) \,:\, t \geq 0\big\}\,.$$

La aplicación $\boldsymbol{g}\colon U_\alpha \to V_\alpha$ definida por

$$(x, y) = \boldsymbol{g}(r, \theta) = \big(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta)\big)\,,$$

es un difeormorfismo; además $|\mathcal{J}\boldsymbol{g}(r, \theta)| = r$.

- Componiendo con traslaciones, esto es, considerando transformaciones del tipo

  $$\boldsymbol{x} = (x, y) = \boldsymbol{g}(r, \theta) = \big(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\operatorname{sen}(\theta)\big)\,,$$

  se parametrizan, excepto subconjuntos de medida nula (segmentos), discos centrados en un punto $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$; en este caso se verifica que $r = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$.

3. *Coordenadas cilíndricas en* $\mathbb{R}^3$.
Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y U_α, V_α los abiertos de $\mathbb{R}^3$

$$U_\alpha = (0,\infty)\times(\alpha,\alpha+2\pi)\times\mathbb{R}\,, \qquad V_\alpha = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{\big(t\cos(\alpha), t\,\mathrm{sen}(\alpha), z\big) \,:\, z\in\mathbb{R}\,,\, t\geq 0\big\}\,.$$

La aplicación $\boldsymbol{g}\colon U_\alpha \to V_\alpha$ definida por

$$(x,y,z) = \boldsymbol{g}(r,\theta,w) = \big(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), w\big)\,,$$

es un difeomorfismo; además

$$|\mathcal{J}\boldsymbol{g}(r,\theta,w)| = r\,.$$

- El ejemplo presentado es adecuado para aquellos conjuntos que presenten una simetría respecto al eje OZ pero, por supuesto, una permutación adecuada de las coordenadas permite tratar volúmenes de revolución respecto de los otros ejes, y lo mismo se puede decir, al componer con traslaciones, cuando la base de estos cilindros está desplazada del origen.

4. *Coordenadas esféricas en* $\mathbb{R}^3$.

4.1. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y U_α, V_α los abiertos de $\mathbb{R}^3$

$$U_\alpha = (0,\infty)\times(\alpha,\alpha+2\pi)\times(0,\pi)\,,$$
$$V_\alpha = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{\big(t\cos(\alpha), t\,\mathrm{sen}(\alpha), z\big) \,:\, z\in\mathbb{R}\,,\, t\geq 0\big\}\,.$$

La aplicación $\boldsymbol{g}\colon U_\alpha \to V_\alpha$ definida por

$$(x,y,z) = \boldsymbol{g}(r,\theta,\phi) = \big(r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), r\cos(\phi)\big)\,,$$

es un difeomorfismo; además

$$|\mathcal{J}\boldsymbol{g}(r,\theta,\phi)| = r^2\,\mathrm{sen}(\phi)\,.$$

4.2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y U_α, V_α los abiertos de $\mathbb{R}^3$

$$U_\alpha = (0,\infty)\times(\alpha,\alpha+2\pi)\times\big(-{}^{\pi}\!/_{2}, {}^{\pi}\!/_{2}\big)\,,$$
$$V_\alpha = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{\big(t\cos(\alpha), t\,\mathrm{sen}(\alpha), z\big) : z\in\mathbb{R}, t\geq 0\big\}\,.$$

La aplicación $\boldsymbol{g}\colon U_\alpha \to V_\alpha$ definida por

$$(x,y,z) = \boldsymbol{g}(r,\theta,\phi) = \big(r\cos(\theta)\cos(\phi), r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi), r\,\mathrm{sen}(\phi)\big)\,,$$

es un difeomorfismo; además

$$|\mathcal{J}\boldsymbol{g}(r,\theta,\phi)| = r^2\cos(\phi)\,.$$

- Al componer con traslaciones, por ejemplo:

$$(x,y,z) = \boldsymbol{g}(r,\theta,\phi) = \big(a_1 + r\cos(\theta)\cos(\phi), a_2 + r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi), a_3 + r\,\mathrm{sen}(\phi)\big)\,,$$

  se obtienen transformaciones que permiten parametrizar en intervalos bolas centradas en un punto $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ (en este caso $r = \|(x,y,z)-(a_1,a_2,a_3)\|$).

5. *Transformación del tetraedro en el cubo.*
Sean T_3 e I_3 los abiertos de $\mathbb{R}^3$

$$T_3 = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x>0\,,\, y>0\,,\, z>0\,,\, x+y+z<1\big\} \quad (\textit{tetraedro})$$

$$I_3 = \big\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 \,:\, 0<u<1\,,\, 0<v<1\,,\, 0<w<1\big\} \qquad (\textit{cubo})\,.$$

La aplicación $\boldsymbol{g}\colon I_3 \to T_3$ dada por $(x,y,z) = \boldsymbol{g}(u,v,w)$, donde

$$\begin{aligned} x+y+z &= u\,, \\ y+z &= u\,v\,, \\ z &= u\,v\,w\,. \end{aligned} \qquad \text{es decir} \qquad \begin{aligned} x &= u\,(1-v)\,, \\ y &= u\,v\,(1-w)\,, \\ z &= u\,v\,w\,. \end{aligned}$$

es un difeomorfismo; además

$$\mathcal{J}\boldsymbol{g}(u,v,w) = u^2\,v\,.$$

TEMA II — TEORÍA DE CAMPOS

§ 1 CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES.

Definición 1.1.- Sea U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

i) Llamaremos *campo escalar de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* U a cualquier función $f\colon U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^k$.

ii) Llamaremos *campo vectorial de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* U a toda aplicación $\boldsymbol{F}\colon U \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$, de clase $\mathcal{C}^k$.

El índice k recorre el conjunto de los números enteros positivos, entendiéndose que las aplicaciones de clase $\mathcal{C}^0$ son las continuas.

Definición 1.2.- Sea f un campo escalar definido en un abierto de $\mathbb{R}^n$. Para cada $c \in \mathbb{R}$, el subconjunto $S_c \subset U$ definido por

$$S_c = \{\boldsymbol{x} \in U \,:\, f(\boldsymbol{x}) = c\}$$

se denomina *conjunto de nivel* o *conjunto isotímico* de f.

Observaciones 1.3.-

i) Los conjuntos isotímicos pueden ser vacíos.

ii) En algunas ocasiones el campo f representará el potencial de un campo de fuerzas y los conjuntos de nivel reciben también el nombre de *variedades equipotenciales*.

Definición 1.4.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{F}\colon U \to \mathbb{R}^n$ un campo continuo. Una *línea de campo* o *de flujo* de $\boldsymbol{F}$ es una curva en U parametrizada en un intervalo I por una aplicación $\boldsymbol{\gamma}\colon I \to U$ de clase $\mathcal{C}^1$ y tal que

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \quad \text{para cada } t \in I\,.$$

Sea K un subconjunto de U y consideremos para cada $\boldsymbol{x} \in K$ la línea de flujo $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ determinada por el problema de valores iniciales

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,; \qquad \boldsymbol{\gamma}(t_0) = \boldsymbol{x}\,.$$

La unión de todas estas líneas de flujo que en un instante inicial t_0 pasan por puntos de K se denomina *tubo de campo* o *de flujo de* $\boldsymbol{F}$ *de soporte* K.

Observación 1.5.- Si se supone que el campo $\boldsymbol{F}$ no se anula en ningún punto de U, las líneas de flujo de $\boldsymbol{F}$ son curvas regulares $\boldsymbol{\gamma}$ tales que su tangente en cada punto $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\gamma}(t_0)$ por el que pasan es la recta que determinan dicho punto y el vector $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)$. Si $\boldsymbol{F}$ representa un campo de fuerzas, el significado dinámico de estos conceptos es simple: las líneas de flujo son las trayectorias que recorre una partícula sometida a los efectos del campo $\boldsymbol{F}$.

§ 2 OPERADORES DIFERENCIALES.

Notación: Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Al conjunto de las aplicaciones f de clase $\mathcal{C}^k$ definidas en U con valores en $\mathbb{R}^p$, $f\colon U \to \mathbb{R}^p$, lo denotaremos por $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$.

Estos conjuntos, dotados de la suma habitual de funciones y el producto de números reales por funciones, son espacios vectoriales.

Definición 2.1.- Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una aplicación

$$T : \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p) \to \mathcal{C}^m(U, \mathbb{R}^q)$$

que sea lineal, es decir, tal que para todas $f, g \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tenga que

$$T(f + g) = T(f) + T(g) \quad \text{y} \quad T(\lambda\, f) = \lambda\, T(f)\,,$$

se denomina *operador lineal* o simplemente *operador*.

Cuando la imagen $T(f)$ se define en términos de las derivadas parciales de f el operador se dice *diferencial*.

Gradiente de un campo escalar

Definición 2.2.- Sea f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se denomina *gradiente* de f al campo vectorial definido por

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\Big), \quad \boldsymbol{x} \in U .$$

Propiedades 2.3.- Sean f, g campos escalares de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Se verifica:

i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

ii) $\nabla(c\, f) = c\, \nabla f$.

iii) $\nabla(f\, g) = f\, \nabla g + g\, \nabla f$.

iv) Si $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$, $\boldsymbol{x} \in U$, $\nabla\big(f/g\big) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$.

Observación 2.4.- Formalmente escribiremos $\nabla = \Big(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\Big)$.

Definición 2.5.- Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{F}\colon U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Se dice que $\boldsymbol{F}$ es *conservativo* si existe un campo escalar f de clase $\mathcal{C}^1$ en U tal que

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in U .$$

En este caso, se dice que el campo f es una *función potencial* de $\boldsymbol{F}$.

Observaciones 2.6.-

i) En ciertos modelos físicos, si $\nabla f = \boldsymbol{F}$, se dice que $-f$ es una función potencial de $\boldsymbol{F}$.

ii) Denotemos por S_c a las variedades equipotenciales de un campo escalar f de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Si $\boldsymbol{x}_0 \in U$, $f(\boldsymbol{x}_0) = c$ y $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \neq \boldsymbol{0}$, el teorema de las funciones implícitas garantiza que, en un entorno de dicho punto, el conjunto S_c es realmente una variedad regular, siendo además el vector $\nabla f(\boldsymbol{x})$ un vector normal a la variedad en el punto $\boldsymbol{x} \in S_c$; pero por otra parte este vector es tangente a la línea de flujo del campo $\boldsymbol{F} = \nabla f$ que pasa por $\boldsymbol{x}$. Resumiendo, las líneas de flujo del campo ∇f son ortogonales a la familia de variedades equipotenciales de f.

Observación 2.7.- Si $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de un campo escalar f de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, entonces se sigue del lema de Schwarz que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad \boldsymbol{x} \in U .$$

El recíproco no es necesariamente cierto, a no ser que se den condiciones adicionales sobre la geometría de U.

Definición 2.8.- Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

i) Se dice que U es *estrellado respecto de un punto* $\boldsymbol{a} \in U$ si para cualquier elemento $\boldsymbol{x}$ de U el segmento de extremos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{x}$, dado por $\{t\,\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{a} \,:\, t \in [0,1]\}$, está contenido en U. Se dice que U es *estrellado* si lo es respecto de alguno de sus puntos.

ii) Se dice que U es *convexo* si para cada par de elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de U el segmento de extremos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, dado por $\{t\,\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \,:\, t \in [0,1]\}$, está contenido en U. Obviamente un abierto convexo es estrellado respecto de cualquiera de sus puntos.

Proposición 2.9.- (*Lema de Poincaré*) Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto estrellado U de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de un campo escalar en U si, y sólo si,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in U, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n . \tag{1}$$

Rotacional de un campo vectorial

Definición 2.11.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$. Se define el *rotacional* de $\boldsymbol{F}$ como el campo vectorial

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial F_1}{\partial z}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial F_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(\boldsymbol{x})\Big), \quad \boldsymbol{x} \in U .$$

Observación 2.12.- El siguiente determinante simbólico es útil para recordar la fórmula que define el rotacional:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Por esta razón el rotacional del campo $\boldsymbol{F}$ también se representa por $\nabla \times \boldsymbol{F}$.

Propiedades 2.13.- Sean $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, G_3)$ dos campos vectoriales y f un campo escalar, todos ellos de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$.

i) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \operatorname{rot} \boldsymbol{G}$.

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\operatorname{rot}(c\,\boldsymbol{F}) = c \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$.

iii) $\operatorname{rot}(f\,\boldsymbol{F}) = f \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \nabla f \times \boldsymbol{F}$.

Proposición 2.15.- Sea f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \boldsymbol{0}.$$

Definición 2.16.- Se dice que un campo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ es *irrotacional* si su rotacional es idénticamente nulo en U, es decir, $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ para cada $\boldsymbol{x} \in U$.

Proposición 2.17.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto estrellado U de $\mathbb{R}^3$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es conservativo si, y sólo si, es irrotacional.

Divergencia de un campo vectorial

Definición 2.19.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se define la *divergencia* de $\boldsymbol{F}$ como el campo escalar

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in U.$$

Formalmente,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) \cdot (F_1, F_2, \dots, F_n),$$

razón por la cual también se denota $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}$.

Propiedades 2.20.- Sean $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}: U \to \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales y f un campo escalar, todos ellos de clase $\mathcal{C}^1$ en el abierto U de $\mathbb{R}^n$.

i) $\operatorname{div}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{G}$.

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\operatorname{div}(c\,\boldsymbol{F}) = c \operatorname{div} \boldsymbol{F}$.

iii) $\operatorname{div}(f\,\boldsymbol{F}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \nabla f \cdot \boldsymbol{F}$.

Proposición 2.22.- Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = 0.$$

Definición 2.23.- Se dice que un campo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ es *solenoidal* o *incompresible* si su divergencia es idénticamente nula en U, es decir, $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ para cada $\boldsymbol{x} \in U$.

Según 2.22 el rotacional de un campo vectorial es solenoidal. Recíprocamente:

Proposición 2.24.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto estrellado U de $\mathbb{R}^3$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es el rotacional de un campo vectorial $\boldsymbol{G}$ si, y sólo si, $\boldsymbol{F}$ es solenoidal.

Observaciones 2.25.-

i) El adjetivo 'incompresible' se refiere a una propiedad de conservación de los volúmenes.

ii) Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, G_3)$ son campos vectoriales en un abierto de $\mathbb{R}^3$ tales que $\operatorname{rot} \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{G}$ al menos de clase $\mathcal{C}^1$) se dice que $\boldsymbol{G}$ es un *potencial vectorial* de $\boldsymbol{F}$.

Laplaciano de un campo escalar

Definición 2.26.- Sea f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se define el *laplaciano* de f como el campo escalar

$$\Delta f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\boldsymbol{x}) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in U.$$

Formalmente,

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) \cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big),$$

razón por la cual también se denota $\Delta f = \nabla^2 f$.

Propiedades 2.27.- Sean f, g dos campos escalares de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$.

i) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\Delta(c\, f) = c\, \Delta f$.

iii) $\Delta(f\, g) = f\, \Delta g + g\, \Delta f + 2\, \nabla f \cdot \nabla g$.

Observaciones 2.28.-

i) El laplaciano u *operador de Laplace* Δ es efectivamente un operador diferencial de $\mathcal{C}^k(U,\mathbb{R})$ en $\mathcal{C}^{k-2}(U,\mathbb{R})$, y aparece en el estudio de numerosos problemas físicos, tales como la ecuación del calor.

ii) Las funciones f de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen

$$\Delta f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in U$$

se denominan *armónicas*.

Propiedades 2.29.- Si f, g son campos escalares y $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$, definidos en un mismo abierto y suficientemente regulares, se verifican:

1.- $\boldsymbol{F} \times (\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H}) = (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{H})\boldsymbol{G} - (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G})\boldsymbol{H}$.

2.- $\boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H})$.

3.- $\operatorname{rot}(f \nabla f) = \boldsymbol{0}$.

4.- $\operatorname{div}(\Delta \boldsymbol{F}) = \Delta(\operatorname{div} \boldsymbol{F})$.

5.- $\operatorname{div}(f \nabla g - g \nabla f) = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f$.

6.- $\nabla(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{G} + \boldsymbol{G} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$.

7.- $\operatorname{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{G}$.

8.- $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.

9.- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$.

10.- $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G}$.

11.- $\operatorname{rot}(\Delta \boldsymbol{F}) = \Delta(\operatorname{rot} \boldsymbol{F})$.

12.- $\nabla(\Delta f) = \Delta(\nabla f)$.

Notas:

i) Los operadores definidos sobre campos escalares se aplican a menudo en el cálculo a campos vectoriales; se entiende en este caso que se hace coordenada a coordenada, por ejemplo:

$$\Delta \boldsymbol{F} = \Delta(F_1, F_2, F_3) = \big(\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3\big).$$

ii) $\boldsymbol{G} \cdot \nabla$ es el operador diferencial que actúa sobre un campo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, de la siguiente forma:

$$(\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} = \big(\boldsymbol{G} \cdot \nabla F_1, \boldsymbol{G} \cdot \nabla F_2, \boldsymbol{G} \cdot \nabla F_3\big).$$

ii) Los operadores presentados son sin duda los más familiares pero, por supuesto, en el estudio de los modelos de la Física aparecen otros tipos de operadores asociados a las ecuaciones en derivadas parciales que los modelan; citemos, por ejemplo, el operador de D'Alembert asociado a la *ecuación de ondas*

$$\Box f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

TEMA III INTEGRALES CURVILÍNEAS

§1 INTEGRACIÓN DE CAMPOS ESCALARES.

Sean $I = [a, b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e $(I, \boldsymbol{\gamma})$ una curva paramétrica. Una aproximación a la curva se puede conseguir estableciendo una partición del intervalo I,

$$P = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b\},$$

y construyendo la poligonal que une los puntos del soporte de la curva que son imágenes de los de la partición; dicha poligonal es la concatenación de los segmentos de extremos $\boldsymbol{\gamma}(t_{j-1})$ y $\boldsymbol{\gamma}(t_j)$, con $j = 1, 2, \ldots, m$. Su longitud, dada por el valor

$$\operatorname{long}(\boldsymbol{\gamma}, P) = \sum_{j=1}^{m} \|\boldsymbol{\gamma}(t_j) - \boldsymbol{\gamma}(t_{j-1})\|,$$

será una aproximación a lo que se llamaría la longitud de la curva.

Definición 1.1.- Se dice que la curva paramétrica $(I, \boldsymbol{\gamma})$ es *rectificable* si

$$\sup\big\{\operatorname{long}(\boldsymbol{\gamma}, P) : P \text{ es una partición de } I = [a, b]\big\}$$

es finito. En este caso, se define la *longitud de la curva*, denotada por $\operatorname{long}(\boldsymbol{\gamma})$, como este superior.

Observación 1.2.- Dos curvas paramétricas equivalentes serán simultáneamente rectificables o no rectificables, y si lo son, tendrán la misma longitud.

Definición 1.3.- Sean $I = [a, b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e $(I, \boldsymbol{\gamma})$ una curva paramétrica continua. Se dice que la curva es *de clase* $\mathcal{C}^k$ *a trozos* si existe una partición del intervalo I,

$$P = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{m-1} < \xi_m = b\},$$

tal que $\boldsymbol{\gamma}$ es de clase $\mathcal{C}^k$ en cada intervalo $[\xi_{j-1}, \xi_j]$, $j = 1, 2, \ldots, m$ (recordemos que ser de clase $\mathcal{C}^k$ en un intervalo cerrado exige la existencia de las derivadas laterales correspondientes en los extremos del mismo).

Una *curva geométrica* Γ (el soporte de una curva paramétrica simple) es *de clase* $\mathcal{C}^1$ *a trozos* si así lo es una de sus parametrizaciones $(I, \boldsymbol{\gamma})$ (y por tanto, lo son todas, en virtud de la regla de la cadena).

Proposición 1.4.- Sea $(I, \boldsymbol{\gamma})$ una curva paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, parametrizada en el intervalo compacto $I = [a, b]$ y con valores en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ son sus componentes, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Entonces, la curva geométrica Γ que representa es rectificable, y su longitud viene dada por

$$\operatorname{long}(\Gamma) = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \cdots + \gamma_n'(t)^2} \, dt.$$

Observaciones 1.5.-

i) La integral que aparece arriba se debe entender como la suma

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, dt$$

cuando la aplicación $\boldsymbol{\gamma}$ no sea de clase $\mathcal{C}^1$ en todo el intervalo $[a, b]$, sino en cada uno de los subintervalos $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ asociados a la partición P.

Lema 1.6.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, f un campo escalar continuo definido en U y $\boldsymbol{\gamma}\colon [a, b] \to U$, $\boldsymbol{\varphi}\colon [c, d] \to U$ dos parametrizaciones equivalentes de una misma curva geométrica Γ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Entonces

$$\int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \, \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, dt = \int_c^d f\big(\boldsymbol{\varphi}(s)\big) \, \|\boldsymbol{\varphi}'(s)\| \, ds.$$

Definición 1.7.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, f un campo escalar continuo definido en U y $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ una parametrización de una curva geométrica Γ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Se define la *integral del campo f a lo largo de la curva* Γ por

$$\int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\, \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\, dt\,,$$

y se representa por

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f\, dr \qquad \text{o} \qquad \int_\Gamma f\, dr \qquad \text{o simplemente} \qquad \int_\Gamma f\,.$$

Observaciones 1.8.- i) Es habitual denotar por $\boldsymbol{r}$ al campo de vectores de posición y por r al campo escalar $\|\boldsymbol{r}\|$. La función definida en $[a,b]$ por $dr(t) = \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|$ recibe el nombre de *elemento de longitud* asociado a la parametrización $\boldsymbol{\gamma}$ y mide la variación de la longitud de arco respecto al parámetro t.

Propiedades 1.9.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, f, g campos escalares continuos en U y $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ una parametrización de una curva geométrica Γ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Se verifican:

i) $\displaystyle\int_\Gamma (f+g)\, dr = \int_\Gamma f\, dr + \int_\Gamma g\, dr\,.$

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_\Gamma (c\, f)\, dr = c \int_\Gamma f\, dr\,.$

iii) $\displaystyle\Big|\int_\Gamma f\, dr\Big| \le \int_\Gamma |f|\, dr \le \sup\{|f(\boldsymbol{x})| : \boldsymbol{x} \in \Gamma\}\, \operatorname{long}(\Gamma)\,.$

§ 2 INTEGRACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES.

Definición 2.1.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial continuo en U y $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ una parametrización de una curva geométrica orientada Γ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Se define la *integral del campo $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva* Γ por

$$\int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)\, dt = \int_a^b \Big(F_1\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\, \gamma_1'(t) + F_2\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\, \gamma_2'(t) + \ldots + F_n\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\, \gamma_n'(t)\Big)\, dt\,,$$

y se representa por

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \text{o} \qquad \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \text{o} \qquad \int_\Gamma F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + \ldots + F_n\, dx_n\,.$$

Si la curva Γ es cerrada, la integral anterior se denomina también *circulación del campo $\boldsymbol{F}$ a lo largo de* Γ, y se denota por

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \text{o} \qquad \oint_\Gamma F_1\, dx_1 + \ldots + F_n\, dx_n.$$

Proposición 2.3.- Sean $(I, \boldsymbol{\gamma})$, $(J, \boldsymbol{\varphi})$ dos parametrizaciones equivalentes de una curva geométrica Γ que definen orientaciones opuestas en dicha curva. Entonces, si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial continuo en un abierto que contiene al soporte de la curva, se tiene que

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

Observaciones 2.4.-

i) Con la notación de la definición 2.1, para los $s \in [a,b]$ tales que $\boldsymbol{\gamma}(s)$ es un punto regular de la curva, el vector $\boldsymbol{t}(s) = \dfrac{\boldsymbol{\gamma}'(s)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(s)\|}$ es un vector unitario tangente a la curva Γ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$. La integral del campo $\boldsymbol{F}$ es la integral del campo escalar $\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(s)\big) \cdot \boldsymbol{t}(s)$, que representa el módulo de la componente tangencial de $\boldsymbol{F}$ respecto a la curva.

ii) En la práctica, cuando una curva viene dada de forma paramétrica, si la parametrización $\boldsymbol{\gamma}$ no define la orientación deseada no es necesario determinar una nueva parametrización congruente con la orientación, basta calcular la integral del campo según la expresión dada en 2.1 y cambiar el resultado de signo.

iii) Cuando se manejan campos de fuerzas la integral a lo largo de una curva se denomina *trabajo del campo* a lo largo de la curva.

Propiedades 2.5.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ dos campos vectoriales continuos en U y $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ una parametrización de una curva geométrica orientada Γ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Se verifica:

i) $\displaystyle\int_\Gamma (\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_\Gamma \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r}$.

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_\Gamma (c\,\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{r} = c \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.

iii) $\displaystyle\left| \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \right| \leq \sup\{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| : \boldsymbol{x} \in \Gamma\} \operatorname{long}(\Gamma)$.

Proposición 2.6.- (*Regla de Barrow*)
Sean f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ una parametrización de una curva geométrica orientada de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} = f\big(\boldsymbol{\gamma}(b)\big) - f\big(\boldsymbol{\gamma}(a)\big).$$

Corolario 2.7.- Sean $\boldsymbol{\gamma}_1\colon [a,b] \to U$ y $\boldsymbol{\gamma}_2\colon [c,d] \to U$ dos curvas paramétricas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, con $\boldsymbol{\gamma}_1(a) = \boldsymbol{\gamma}_2(c)$ y $\boldsymbol{\gamma}_1(b) = \boldsymbol{\gamma}_2(d)$. Entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{\gamma}_2} \nabla f \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Corolario 2.8.- Si $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ es una parametrización de una curva geométrica orientada y cerrada $(\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b))$ y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

§ 3 FÓRMULA DE RIEMANN-GREEN.

Cuando un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es tal que su frontera, $\operatorname{Fr}(U)$, puede ser parametrizada localmente como una curva, el conjunto $\operatorname{Fr}(U)$ se denomina también *borde* de U y se denota por ∂U. Las siguientes definiciones describen con más precisión este tipo de conjuntos que son los que se contemplan en la teoría que trata este epígrafe.

Definición 3.1.- Un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ se dice que es un *abierto de Jordan* si es abierto, conexo, acotado y su frontera es una unión finita disjunta de curvas geométricas cerradas, simples y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos.

En el caso de que ∂D esté constituido por una sola curva del tipo anterior se dice que D es un *dominio de Jordan*.

Definición 3.2.- Sea D un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$. Se dice que D es *simple* o *proyectable sobre un eje* si existen dos funciones reales f y g, continuas en un intervalo $[a,b]$, tales que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ f(x) < y < g(x)\} \qquad \text{o}$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < y < b,\ f(y) < x < g(y)\}.$$

Observaciones 3.3.- i) Los abiertos simples son dominios de Jordan. En esta clase de conjuntos se encuentran los rectángulos, los círculos, etc..

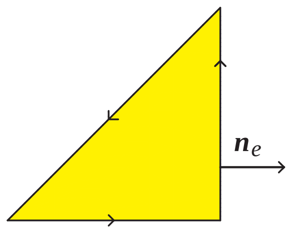
Lema 3.4.- Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto de Jordan y $\boldsymbol{x}_0$ un punto frontera de D que es regular para la correspondiente curva de ∂D. Sean $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1$ los dos vectores unitarios ortogonales a la recta tangente a ∂D en el punto $\boldsymbol{x}_0$. Entonces uno sólo de estos dos vectores, que denotaremos $\boldsymbol{n}_e$, verifica la siguiente propiedad:

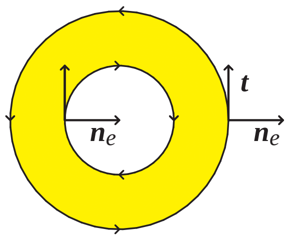
"Existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0,\varepsilon)$ se tiene que $\boldsymbol{x}_0 + \lambda\,\boldsymbol{n}_e \notin D$".

Definición 3.5.- En las condiciones del lema anterior, al vector $\boldsymbol{n}_e$ que verifica dicha propiedad lo denominaremos *normal exterior a D en el punto $\boldsymbol{x}_0$*.

La *orientación natural* o *inducida en ∂D por D* es la que corresponde en los puntos regulares de ∂D al vector tangente unitario $\boldsymbol{t}$ que forma un ángulo de amplitud $\frac{\pi}{2}$ con la normal exterior $\boldsymbol{n}_e$, esto es:

$$(\widehat{\boldsymbol{n}_e, \boldsymbol{t}}) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{o bien} \qquad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{n}_e.$$





Definición 3.8.- Sea D un abierto de Jordan de $\mathbb{R}^2$ tal que su borde ∂D se escribe

$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m \,,$$

siendo cada Γ_j el soporte de una curva cerrada simple y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en la que se considera la orientación inducida por D. Si $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial continuo en un abierto que contiene a ∂D se define la *circulación* de $\boldsymbol{F}$ en el borde de D como

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} P\,dx + Q\,dy = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \,,$$

que se denota por

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \qquad \text{o} \qquad \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \qquad \text{o} \qquad \int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \text{o} \qquad \oint_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \,.$$

Teorema 3.9.- (*Fórmula general de Riemann-Green*)

Sea D un abierto de Jordan de $\mathbb{R}^2$. Si $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^2$ que contiene a $\overline{D} = D \cup \partial D$, entonces

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \,,$$

considerándose en ∂D la orientación inducida por D.

Corolario 3.10.- En las condiciones del teorema anterior, si además el campo $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ es tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1 \quad \text{para cada } (x, y) \in D \,,$$

entonces el área de D resulta ser

$$m(D) = \oint_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \,.$$

TEMA IV INTEGRACIÓN EN SUPERFICIES

§ 1 INTEGRACIÓN DE CAMPOS ESCALARES.

Al soporte S de una parametrización simple $\boldsymbol{\varphi}\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lo denominaremos también *superficie geométrica* o *superficie elemental* (el término *variedad* hace referencia a curvas o superfices no necesariamente elementales).

Dada una superficie S en $\mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$ y regular, si $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ son dos parametrizaciones de S y $\boldsymbol{\theta}\colon D_1 \to D_2$ es el difeomorfismo tal que $\boldsymbol{\varphi}_1(u,v) = \boldsymbol{\varphi}_2(\boldsymbol{\theta}(u,v)) = \boldsymbol{\varphi}_2(s(u,v), t(u,v))$, $(u,v) \in D_1$, entonces

$$\Big\| \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial v} \Big)(u,v) \Big\| = |\mathcal{J}\boldsymbol{\theta}(u,v)| \, \Big\| \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial t} \Big)(\boldsymbol{\theta}(u,v)) \Big\| .$$

Definición 1.1.- Sea $(D, \boldsymbol{\varphi})$ una parametrización de una superficie geométrica S en $\mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$ y regular. Se define el *área* de S por

$$A(S) = \iint_D \Big\| \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \Big)(u,v) \Big\| \, du\, dv .$$

Observaciones 1.2.- ii) La función definida en el abierto D por $d\sigma(u,v) = \Big\| \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \Big)(u,v) \Big\|$, recibe el nombre de *elemento de área* asociado a la parametrización $(D, \boldsymbol{\varphi})$, y mide la "variación local" del área. Por esta razón, aunque no sea la diferencial de ninguna función, se le denota de esa forma.

Lema 1.3.- Sea S una superficie geométrica en $\mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$ y regular. Supongamos que S se puede escribir $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \, \cup \, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m$, siendo la unión disjunta y tal que:

i) Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, S_j es una superficie geométrica de clase $\mathcal{C}^1$ y regular.

ii) Para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, Γ_k es una curva geométrica de clase $\mathcal{C}^1$.

Entonces el área de S resulta ser la suma de las áreas de las superficies S_j. Dicho de otra forma, el área de variedades de dimensión 1 es nula, y pueden ser despreciadas en la integración.

Definición 1.4.- Sea S una variedad diferenciable de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$ que puede escribirse como $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \, \cup \, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m$, siendo la unión disjunta y tal que:

i) Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, S_j es una superficie geométrica elemental de clase $\mathcal{C}^1$ y regular parametrizada por $(D_j, \boldsymbol{\varphi}_j)$.

ii) Para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, Γ_k es una curva geométrica de clase $\mathcal{C}^1$.

Se define el *área* de S como

$$A(S) = \sum_{j=1}^{n} A(S_j) = \sum_{j=1}^{n} \iint_{D_j} \Big\| \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial v} \Big)(u,v) \Big\| \, du\, dv .$$

El número real positivo (o $+\infty$) que resulta de la expresión anterior es independiente de la partición que se haga de la superficie S y, en consecuencia, la definición es coherente.

Definición 1.6.- Sean S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, soporte de la parametrización $(D, \boldsymbol{\varphi})$, y f un campo escalar continuo en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Se define la *integral* de f en S por

$$\iint_D f\big(\boldsymbol{\varphi}(u,v)\big) \, \Big\| \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \Big)(u,v) \Big\| \, du\, dv .$$

y se denota por $\displaystyle\int_S f \, d\sigma$ o simplemente $\displaystyle\int_S f$.

Propiedades 1.8.- Sean S una superficie geométrica regular en $\mathbb{R}^3$ y f, g campos escalares continuos en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Se verifican:

i) $\displaystyle\int_S (f+g)\, d\sigma = \int_S f\, d\sigma + \int_S g\, d\sigma$. **ii)** Si $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_S (c\,f)\, d\sigma = c \int_S f\, d\sigma$.

iii) $\displaystyle\Big| \int_S f\, d\sigma \Big| \leq \int_S |f|\, d\sigma \leq \sup\{|f(\boldsymbol{x})| : \boldsymbol{x} \in S\} \; A(S)$.

Observaciones 1.9.-

i) La integral de la función idénticamente igual a 1 en una superficie S es precisamente el área de S.

ii) La integración de campos escalares en variedades no elementales se realiza según el mismo procedimiento expuesto en 1.4 (se tiene un análogo del lema 1.3), verificándose igualmente las propiedades anteriores.

§ 2 INTEGRACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES.

Sobre una superficie regular y conexa en $\mathbb{R}^3$ es posible dar dos orientaciones que corresponden, dada una parametrización $(D, \boldsymbol{\varphi})$ de S, a considerar el campo de vectores normales unitarios

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(u, v) = \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\Big)(u, v) / d\sigma(u, v)$$

o su opuesto $-\boldsymbol{n}(u, v)$. Estos vectores unitarios son independientes de la parametrización (lo que depende de la parametrización es el elemento de área $d\sigma$), así que se puede hablar sin ambigüedad de los vectores normales unitarios, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ y $-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$, en cada punto $\boldsymbol{x}$ de la superficie.

Definición 2.1.- Sean S una superficie geométrica regular, conexa y orientada en $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $(D, \boldsymbol{\varphi})$, coherente con su orientación, y $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial definido y continuo en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Se define la *integral de* $\boldsymbol{F}$ *en* S o el *flujo de* $\boldsymbol{F}$ *a través de* S por

$$\iint_D \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\varphi}(u, v)\big) \cdot \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\Big)(u, v)\, du\, dv = \iint_D \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\varphi}(u, v)\big) \cdot \boldsymbol{n}(u, v)\ d\sigma(u, v)\, du\, dv$$

en el caso de que esta integral sea convergente, y se representa por

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\ d\sigma \qquad \text{ó} \qquad \int_S F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy\,.$$

Observaciones 2.2.-

i) La integral que aparece en la definición anterior tiene sentido como integral impropia y el teorema del cambio de variables garantiza la independencia de su carácter respecto de parametrizaciones equivalentes, así como la de su valor en el caso de que converja.

ii) El flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S es la integral del campo escalar $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$, la *componente normal* de $\boldsymbol{F}$ respecto de S.

Proposición 2.3.- Sea S una superficie geométrica regular y conexa en $\mathbb{R}^3$ y denotemos por S^+ y S^- a las dos superficies orientadas asociadas a S. Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial definido y continuo en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S, entonces

$$\int_{S^-} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\ d\sigma = -\int_{S^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\ d\sigma\,.$$

Observaciones 2.4.-

i) Al tratar con variedades conexas y orientables, el concepto de integral se extiende a esta situación considerando una descomposición como la indicada en 1.4, $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m$, definiéndose en este caso

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\ d\sigma = \sum_{j=1}^{n} \int_{S_j} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\ d\sigma\,.$$

La orientación dada en S determina de forma unívoca una orientación en cada una de las superficies S_j, ahora bien, en la práctica, si se dispone de parametrizaciones de cada una de ellas, $(D_j, \boldsymbol{\varphi}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, lo único que hay que hacer es comprobar si estas corresponden con la orientación considerada; si no es así, se efectúa el cálculo del sumando correspondiente según la definición 2.1 y se cambia de signo al resultado .

Propiedades 2.5.- Sean S una superficie geométrica regular, conexa y orientada en $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ dos campos vectoriales continuos en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Se verifica:

i) $\displaystyle\int_S (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_S \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_S (c\,\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = c \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$

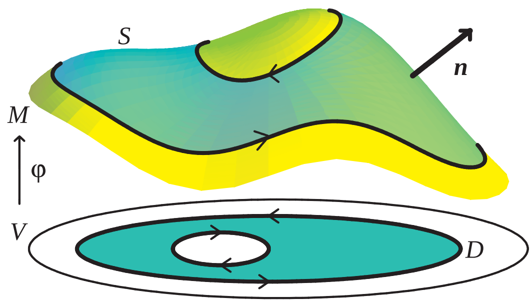
iii) $\displaystyle\Big|\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\Big| \leq \sup\{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| : \boldsymbol{x} \in S\}\ A(S)\,.$

§ 3 SUPERFICIES CON BORDE. TEOREMA DE STOKES.

Consideremos una superficie geométrica M en $\mathbb{R}^3$, conexa y regular, representada por la parametrización $(V, \boldsymbol{\varphi})$ (V abierto conexo de $\mathbb{R}^2$) y la orientación dada en ella por esta parametrización. Si D es un abierto conexo y de Jordan en $\mathbb{R}^2$ con $\overline{D} = D \cup \partial D \subset V$, la restricción de $\boldsymbol{\varphi}$ a D, que seguiremos denotando igual por comodidad, proporciona una nueva superficie S, soporte de la parametrización $(D, \boldsymbol{\varphi})$ y contenida en M; además, la orientación fijada en M se traslada a esta subvariedad por esta misma parametrización (el vector normal unitario considerado es el mismo). Si el borde de D se escribe $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m$, siendo cada Γ_j una curva cerrada, simple y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, su imagen $\boldsymbol{\varphi}(\partial D) = \boldsymbol{\varphi}(\Gamma_1) \cup \boldsymbol{\varphi}(\Gamma_2) \cup \ldots \cup \boldsymbol{\varphi}(\Gamma_m)$, es la unión de m curvas del mismo tipo en $\mathbb{R}^3$, concretamente, si $\boldsymbol{\gamma}_j : [a_j, b_j] \to V$ es una parametrización de Γ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, que da la orientación inducida en Γ_j por D, entonces $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\gamma}_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^3$ proporciona una parametrización de $\boldsymbol{\varphi}(\Gamma_j)$.

Definición 3.1.- En las condiciones anteriores se dice que S es una *superficie geométrica orientada con borde*. El conjunto $\boldsymbol{\varphi}(\partial D)$ se denomina *borde de S* y se denota ∂S. Por último, la orientación dada en cada una de las curvas $\boldsymbol{\varphi}(\Gamma_j)$ por $([a_j, b_j], \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\gamma}_j)$ se denomina *orientación inducida* en el borde por la orientación de S.

Observación 3.2.- El borde de S es lo que separa a $S \cup \partial S$ de su complementario en M, esto es, su frontera en la superficie M. La orientación inducida por S en su borde corresponde a la familiar *regla del sacacorchos*; en los puntos $\boldsymbol{p} \in \partial S$ (puntos regulares de M) el producto vectorial de la "normal exterior" a S en $\boldsymbol{p}$ con el vector tangente a ∂S en $\boldsymbol{p}$ asociado a esta orientación (ambos en el plano tangente a M) es un vector en la misma dirección y sentido que el vector normal unitario a M en estos puntos para la orientación original de S.

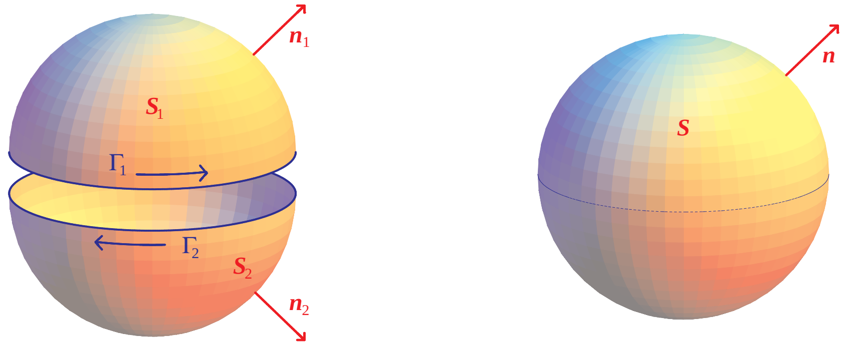


Definición 3.6.- Sean S_1 y S_2 dos superficies geométricas orientadas y con borde dadas, según 3.1, por las parametrizaciones $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$, respectivamente, y con soportes disjuntos, es decir, tales que $\boldsymbol{\varphi}_1(D_1) \cap \boldsymbol{\varphi}_2(D_2) = \emptyset$. Supongamos además que $\partial S_1 \cap \partial S_2$ es unión finita (posiblemente vacía) de soportes de curvas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y que el conjunto $C = \overline{\partial S_1 \cup \partial S_2 \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)}$ es unión finita de curvas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. En estas condiciones, se dice que

$$S = \boldsymbol{\varphi}_1(\overline{D}_1) \cup \boldsymbol{\varphi}_2(\overline{D}_2) \setminus C$$

es la *superficie suma* de las superficies S_1 y S_2 o que es la *cadena* compuesta por las superficies S_1 y S_2 y se denota $S = S_1 + S_2$. También se dice que C es el *borde* de S, denotado por $C = \partial S$. Iterando el proceso se define la *suma* o *cadena* de k superficies elementales con borde $S_1 + S_2 + \ldots + S_k$.

Definición 3.7.- Sea $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_k$ la superficie suma de k superficies elementales conexas y con borde, considerando en cada una de ellas una de las dos orientaciones posibles. Si para cada par de índices $1 \le i, j \le k$, con $i \ne j$ y tales que $\partial S_i \cap \partial S_j \ne \emptyset$ se tiene que las orientaciones inducidas en $\partial S_i \cap \partial S_j$ por S_i y S_j son opuestas una de la otra se dice que S es *orientable* y la orientación resultante en ∂S, el borde de la cadena S, se denomina *orientación inducida* por S (ver figura).



Definición 3.9.- Sean $S = S_1 + \cdots + S_k$ una cadena orientable de superficies y $\boldsymbol{F}$ un campo continuo en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Se define la *integral* de $\boldsymbol{F}$ en S o el *flujo* de $\boldsymbol{F}$ a través de S por

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_j\, d\sigma\,,$$

donde $\boldsymbol{n}_j$ es el vector normal unitario asociado a la orientación en cada S_j para cada $j = 1, \ldots, k$.

Observación 3.10.- Las propiedades enunciadas en el resultado 2.5 se aplican también a la integración de campos en cadenas de variedades.

Teorema 3.11.- (*Teorema de Stokes*)
Sean S una cadena orientable de superficies con borde y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $S \cup \partial S$. Entonces

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\,,$$

cuando en ∂S, el borde de S, se considera la orientación inducida por S.

Corolario 3.12.- Si S es una superficie cerrada (es decir, $\partial S = \emptyset$), entonces

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0\,.$$

§ 4 ABIERTOS CON FRONTERA REGULAR A TROZOS. TEOREMA DE LA DIVERGENCIA.

Definición 4.1.- Sea V un subconjunto abierto, acotado y conexo de $\mathbb{R}^3$. Se dice que su frontera es *regular a trozos* si el conjunto $\mathrm{Fr}(V)$ es una cadena orientable de superficies. En estas condiciones $\mathrm{Fr}(V)$ se denomina también *borde* de V y se denota ∂V.

Lema 4.4.- Sean V un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera regular a trozos y $\boldsymbol{x}_0$ un punto de una de las superficies elementales que forman la frontera de V. Sean $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1$ los dos vectores unitarios normales a ∂V en el punto $\boldsymbol{x}_0$. Entonces, uno sólo de estos dos vectores, que denotaremos por $\boldsymbol{n}_e$, verifica la siguiente propiedad:
"Existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \varepsilon)$ se tiene que $\boldsymbol{x}_0 + \lambda\, \boldsymbol{n}_e \notin V$".

Definición 4.5.- En las condiciones del lema anterior, al vector $\boldsymbol{n}_e$ que verifica dicha propiedad se le denomina *normal exterior* a V en el punto $\boldsymbol{x}_0$.
La *orientación natural* o *inducida en ∂V por V* es la que corresponde a este vector normal en cada punto de cada una de las superficies elementales que forman la frontera de V.

Teorema 4.9.- (*Teorema de la divergencia o de Gauss-Ostrogradsky*)
Sean V un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera regular a trozos y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $\overline{V}$, entonces

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} \;\; dx\, dy\, dz = \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,,$$

cuando en ∂V se considera la orientación inducida por V.

Corolario 4.10.- En las condiciones del teorema anterior, si $\operatorname{div} \boldsymbol{F} \equiv 1$ en V, entonces

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = m(V)\,.$$

§ 1 EL CUERPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Se consideran en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ las operaciones suma "+" y producto " $\cdot$ " definidas como sigue:

i) $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ **ii)** $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)$

Los signos de suma y producto a la derecha de las igualdades corresponden a las operaciones definidas en $\mathbb{R}$.

Proposición 1.1.- $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano; concretamente, $(0, 0)$ es el elemento neutro y si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ el elemento $(-a, -b)$ es el opuesto de (a, b).

Proposición 1.2.- $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ es un grupo abeliano; se tiene que $(1, 0)$ es el elemento unidad y que si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) \neq (0, 0)$, su inverso es el elemento $\big({}^{a}/{(a^2 + b^2)}, {}^{-b}/{(a^2 + b^2)}\big)$.

Definición 1.5.- La terna $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se denomina *Cuerpo de los Números Complejos* y se denota por $\mathbb{C}$. Sus elementos son los *números complejos*.

Observaciones 1.6.-

i) Mediante la aplicación $x \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(x) = (x, 0) \in \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ es algebraicamente isomorfo a un subcuerpo de $\mathbb{C}$.

ii) Denotando por i al número $(0, 1)$, denominado *unidad imaginaria*, e identificando, $(a, 0)$ y $(b, 0)$ con los números reales a y b, el número (a, b) se representa por $a + i\,b$, representación que recibe el nombre de *expresión binómica* del número (a, b).

Definición 1.7.- Sea $z = a + i\,b$ un número complejo. Los números reales a y b reciben el nombre de *parte real* y *parte imaginaria* de z, respectivamente, y se denotan por $a = \mathrm{Re}(z)$ y $b = \mathrm{Im}(z)$.

Observación 1.8.- En virtud de lo anterior, es lícito considerar $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{C}$. Los números reales son aquéllos que tienen parte imaginaria nula.

Definición 1.9.- Sea $z = a + i\,b$ un número complejo.

i) El número complejo $a - i\,b$ se denomina *conjugado* de z y se denota $\overline{z}$.

ii) El número real positivo $\sqrt{a^2 + b^2}$ se denomina *módulo* de z y se denota $|z|$.

Observaciones 1.10.-

i) Un número complejo z es real si, y sólo si, $z = \overline{z}$.

ii) Si $z \in \mathbb{C}$ es real, el módulo de z es el valor absoluto de z.

Propiedades 1.11.- Sean z y w números complejos. Se verifican:

1.11.1.- $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$ y $\overline{w\,z} = \overline{w}\;\overline{z}$.

1.11.2.- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\,i}$.

1.11.3.- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

1.11.4.- Si $z \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

1.11.5.- $|z| = |\overline{z}|$.

1.11.6.- $|\,\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\,\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

1.11.7.- $|z| \leq |\,\mathrm{Re}(z)| + |\,\mathrm{Im}(z)|$.

1.11.8.- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

1.11.9.- Si $w \neq 0$, entonces $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

1.11.10.- $|z + w| \leq |z| + |w|$.

1.11.11.- $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$.

§ 2 SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS COMPLEJOS.

Una *sucesión de números complejos* es una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. La terminología general usada para las sucesiones de términos cualesquiera se aplica a este caso, y así una sucesión de números complejos se representa de forma más compacta por el símbolo $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $z_n = \sigma(n)$; z_n se denomina *término n-ésimo* de la sucesión. El conjunto imagen de la aplicación σ, es decir, $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, se denomina *conjunto de términos* o *rango* de la sucesión.

Igualmente se contempla el concepto de *subsucesión* de una dada $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, que es la composición de una sucesión estrictamente creciente de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ con aquella, y que se representada por $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Definición 2.3.- Se dice que una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es *convergente* si existe un número complejo z verificando la siguiente propiedad: "Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para cada número natural $n \geq n_0$ se tiene que $|z_n - z| < \varepsilon$".

En este caso el número z, que es único, se llama *límite* de la sucesión; se dice que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia z y se escribe $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Proposición 2.4.- Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es convergente si, y sólo si, las dos sucesiones de números reales $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes. En este caso,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

Al igual que en el caso real, dada una sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, se le puede asociar una sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de *sumas parciales*: $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, construyendo así la *serie* de *término general* a_n, que se representa por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. La terminología y notación usadas son las mismas que en el caso real.

Definición 2.8.- Se dice que una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos es *convergente* si la sucesión de sus sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. En este caso el número complejo $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ se llama *suma* de la serie y es usual escribir, abusando de la notación, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Teorema 2.10.- (*Condición necesaria de convergencia*). Si una serie de números complejos es convergente, entonces su término general tiende hacia 0.

Teorema 2.11.- La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos es convergente si, y sólo si, las series de números reales $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)$ son convergentes. En este caso $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n) + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)$.

Definición 2.14.- Se dice que una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos es *absolutamente convergente* si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Teorema 2.15.- La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos es absolutamente convergente si, y sólo si, las series de números reales $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)$ son absolutamente convergentes.

Proposición 2.16.- Si la serie de números complejos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente. Además, $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Observación 2.18.- Para dos series de números complejos $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ se define su producto de Cauchy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ igual que en el caso real: $c_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, b_1 + a_n\, b_0$, $n \geq 0$, y sigue siendo válido el *Criterio de Mertens*, en particular, si las dos series son absolutamente convergentes también lo es su producto de Cauchy y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.

§ 3 FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE REAL.

Definición 3.1.- Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$, una aplicación $f: A \to \mathbb{C}$ se denomina *funión compleja* definida en A. Se dice que una función $f: A \to \mathbb{C}$ es *acotada* en A si existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in A$.

Definición 3.2.- Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y f una función definida de A en $\mathbb{C}$. Se dice que f *tiene límite cuando x tiende hacia a* si existe un número complejo ℓ verificando la siguiente propiedad: "Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que para cada $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$, con $x \neq a$, se tiene que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$".

Se verifica de nuevo la unicidad del límite y se aplica la misma notación y terminología que en el caso real.

Teorema 3.4.- Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A, y f una función definida de A en $\mathbb{C}$. La función f tiene límite en el punto a si, y sólo si, las funciones reales $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ tiene límite en el punto a. Además, en este caso, se tiene $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \mathrm{Re}(f)(x) + i \lim\limits_{x \to a} \mathrm{Im}(f)(x)$.

Definición 3.6.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{C}$ y $a \in A$. Se dice que f es *continua en el punto* a si se verifica la siguiente propiedad: "Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que si $x \in A$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$". Se dice que f es *continua en* A si es continua en cada punto de A.

Teorema 3.7.- Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $a \in A$ un punto de acumulación de A y f una función definida de A en $\mathbb{C}$. Son equivalentes:

a) f es continua en a. **b)** Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y es precisamente $f(a)$.

Corolario 3.8.- En las mismas condiciones que antes, la función f es continua en el punto a si, y sólo si, así lo son las dos funciones reales $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

Propiedades 3.9.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, a un punto de A, y f, g funciones complejas definidas en A y continuas en el punto a.

i) Las funciones $f + g$, $f\,g$ y $|f|$ son continuas en a.

ii) Si $g(a) \neq 0$, la función $f/_g$, bien definida en $(a-\delta, a+\delta) \cap A$ para algún $\delta > 0$, es continua en a.

Definición 3.10.- Sea f una función compleja definida en un intervalo abierto I, y consideremos un punto $a \in I$. Si existe el límite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, se dice que f es *derivable en* a. El valor del límite será un número complejo que se denomina *derivada de f en* a, y al que se denota igualmente por $f'(a)$.

Teorema 3.11.- Sean I un intervalo, a un punto de I y f una función definida de I en $\mathbb{C}$. La función f es derivable en el punto a si, y sólo si, las funciones reales $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ son derivables en el punto a. Además, en este caso se tiene que $f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + i\, \mathrm{Im}(f)'(a)$.

Observación 3.12.- El teorema anterior permite generalizar las propiedades y las reglas usuales de derivación que se verifican para las funciones reales, exceptuando aquellas situaciones en las que interviene el orden de la recta real, por ejemplo, no es posible en este contexto generalizar los teoremas del valor medio. Nótese que éstos dejan de ser válidos para funciones $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que, al fin y al cabo, son las que estamos considerando.

Definición 3.13.- Sea f una función compleja definida en el intervalo $[a, b]$. Se dice que f es *integrable* en $[a, b]$ si, y sólo si, existe un número complejo $I(f)$ que verifica la siguiente propiedad: "Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para toda partición P de $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$ y para cada $T \in \mathcal{T}(P)$ se tiene que $|I(f) - \sigma(f, P, T)| < \varepsilon$". El número $I(f)$ se seguirá denotando $\int_a^b f(x)\,dx$.

Proposición 3.14.- La función f es integrable si, y sólo si, lo son las dos funciones reales $u = \mathrm{Re}(f)$ y $v = \mathrm{Im}(f)$. Además, en caso de ser integrables, se tiene $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i \int_a^b v(x)\,dx$.

Observación 3.15.- Del resultado anterior se deducen similares criterios de integrabilidad y reglas aritméticas de integración que en el caso real. También es cierto que si una función compleja f es integrable en $[a, b]$ lo es su módulo y $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Son válidos asimismo para funciones complejas los siguientes resultados, cuyos enunciados omitimos por ser idénticos a los del caso real: *el Teorema Fundamental del Cálculo*, *la Regla de Barrow*, *la Fórmula de Integración por Partes* y *el Teorema del Cambio de Variable*.

§4 ARGUMENTO Y LOGARITMO COMPLEJOS.

Denotaremos por $\mathbb{T}$ a la circunferencia unidad, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \simeq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Proposición 4.1.- Se considera la aplicación $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ dada por $\Phi(t) = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t)$.

i) $\Phi(t+s) = \Phi(t)\,\Phi(s) \in \mathbb{T}$ para todos $s, t \in \mathbb{R}$.

iii) $\Phi(t) = 1$ si, y sólo si, $t = 2\,k\,\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. $\Phi(t) = \Phi(s)$ si, y sólo si, $s - t = 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 4.2.- Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se denota por $\operatorname{Arg}(z)$ al conjunto

$$\operatorname{Arg}(z) = \Phi^{-1}\big(z/|z|\big) = \{t \in \mathbb{R} : \cos(t) + i \operatorname{sen}(t) = z/|z|\}.$$

Sus elementos se denotan genéricamente por $\arg(z)$ y se denominan *argumentos de z*. Dado un argumento θ_0 de $z \neq 0$, entonces $\operatorname{Arg}(z) = \{\theta_0 + 2\,k\,\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposición 4.4.- Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$. Si α es un argumento de a y β es un argumento de b, entonces:
i) $\alpha + \beta \in \operatorname{Arg}(a\,b)$. **ii)** $\alpha - \beta \in \operatorname{Arg}(a/b)$. **iii)** $-\alpha \in \operatorname{Arg}(\overline{a}) = \operatorname{Arg}(1/a)$.

Observación 4.6.- Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $\theta \in \operatorname{Arg}(z)$, entonces $z = |z|\,\big(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)\big)$. Esta representación se conoce con el nombre de *expresión polar* del número complejo z. En estas condiciones, $\operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\theta)$ e $\operatorname{Im}(z) = |z| \operatorname{sen}(\theta)$. Recíprocamente, si $z = x + i\,y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ se escribe $z = \rho\,\big(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)\big)$, $\rho > 0$, entonces $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta \in \operatorname{Arg}(z)$.

Fórmula de De Moivre 4.7.- Si $n \in \mathbb{Z}$ y $z = \rho\,\big(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)\big)$, entonces $z^n = \rho^n\,\big(\cos(n\,\theta) + i \operatorname{sen}(n\,\theta)\big)$.

Definición 4.8.- Sea $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ $(x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z))$. Se define la *exponencial de z* como

$$\exp(z) = e^x\,\big(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)\big).$$

Propiedades 4.9.-

i) Si $z \in \mathbb{R}$, entonces $\exp(z) = e^z$.

ii) $|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

iii) $\operatorname{Im}(z) \in \operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big)$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

iv) $\exp(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

v) Si $t \in \mathbb{R}$, entonces $\exp(it) = \Phi(t) = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t)$.

vi) $\exp(z) = 1$ si, y sólo si, $z = 2\,k\,\pi\,i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

vii) $\exp(z + w) = \exp(z)\,\exp(w)$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$.

viii) $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

ix) $\exp(z) = \exp(w)$ si, y sólo si, $z = w + 2\,k\,\pi\,i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

x) Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $\theta \in \operatorname{Arg}(z)$, entonces $z = |z| \exp(i\,\theta)$.

Definición 4.12.- La aplicación inversa de $\exp : B_c = \{z \in \mathbb{C} : c \leq \operatorname{Im}(z) < c + 2\,\pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se denota $\log_c$ y se denomina *rama* o *determinación del logaritmo con rango B_c*; cuando $c = -\pi$ recibe el nombre particular de *rama principal del logaritmo.*

Observaciones 4.13.-

i) Si $c \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces $\log_c(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$, donde $\arg(z)$ es el único elemento de $\operatorname{Arg}(z)$ que pertenece al intervalo $[c, c + 2\,\pi)$. En particular, si se toma la rama principal del logaritmo, resulta que $\log_{-\pi}(x) = \ln(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

ii) Para $z \neq 0$, la expresión '$\log(z)$' representa el conjunto de todos los valores de las ramas del logaritmo en el punto z. Es decir, fijado un argumento de z, $\arg(z)$, $\log(z) = \big\{\ln(|z|) + \arg(z)\,i + 2\,k\,\pi\,i : k \in \mathbb{Z}\big\}$.

Definición 4.15.- Sea z un número complejo, $z \neq 0$. Fijada una rama del logaritmo con rango B_c, se define para $w \in \mathbb{C}$ la *potencia* de base z y exponente w por

$$z^w = \exp\big(w \log_c(z)\big).$$

En caso de que no se especifique una rama concreta del logaritmo, la expresión z^w denotará todos los valores posibles de las potencias en las distintas determinaciones.

Proposición 4.17.- Sean $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $n \in \mathbb{Z}$. Para cualquier determinación del logaritmo se tiene:

i) Si $n > 0$, entonces $z^n = z \cdot z \overset{n \text{ veces}}{\cdots} z$. **ii)** Si $n < 0$, entonces $z^n = \dfrac{1}{z \cdot z \overset{-n \text{ veces}}{\cdots} z}$.

Proposición 4.18.- Sean $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$. Existen exactamente n números complejos distintos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ tales que ${w_k}^n = z$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Estos números son todos los valores de $z^{1/n}$ en las distintas determinaciones, reciben el nombre de *raíces n-ésimas de z* y se denotan de forma genérica $\sqrt[n]{z}$. Fijado un argumento de z, $\arg(z)$, se obtienen de la siguiente forma:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\, \exp\left(i\, \frac{\arg(z) + 2\pi\,(k-1)}{n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

§ 5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS.

Definición 5.1.- Para cada $z \in \mathbb{C}$ se define $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, denominada *exponencial* de z.

Proposición 5.2.- $\exp(z + w) = \exp(z)\, \exp(w)$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$.

Definición 5.4.- Si $z \in \mathbb{C}$, se definen

$$\cos(z) = \frac{\exp(i\,z) + \exp(-i\,z)}{2}, \qquad \operatorname{sen}(z) = \frac{\exp(i\,z) - \exp(-i\,z)}{2\,i},$$

denominadas *coseno* y *seno* de z, respectivamente.

Proposición 5.5.- Si $x \in \mathbb{R}$ se verifica:

i) $\exp(-i\,x) = \overline{\exp(i\,x)}$. **ii)** $|\exp(i\,x)| = 1$.

iii) $\cos(x) = \operatorname{Re}\big(\exp(i\,x)\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\, x^{2\,n}$. **iv)** $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{Im}\big(\exp(i\,x)\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\, x^{2\,n+1}$.

v) $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$.

Proposición 5.6.- $\operatorname{sen} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son funciones periódicas, de periodo 2π, es decir,

$$\cos(z + 2\pi) = \cos(z) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen}(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Propiedades 5.7.- Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica:

5.7.1.- $\exp(iz) = \cos(z) + i \operatorname{sen}(z)$ y $\exp(-iz) = \cos(z) - i \operatorname{sen}(z)$.

5.7.2.- $\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(-z)$ y $\cos(z) = \cos(-z)$.

5.7.3.- $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$.

5.7.4.- $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \cos(z)\operatorname{sen}(w)$.

5.7.5.- $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$.

5.7.6.- $\operatorname{sen}(2\,z) = 2\operatorname{sen}(z)\cos(z)$ y $\cos(2\,z) = \cos^2(z) - \operatorname{sen}^2(z)$.

5.7.7.- $\operatorname{sen}^2(z) = \dfrac{1 - \cos(2\,z)}{2}$ y $\cos^2(z) = \dfrac{1 + \cos(2\,z)}{2}$.

5.7.8.- $\operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w) = \dfrac{\cos(z - w) - \cos(z + w)}{2}$

5.7.9.- $\cos(z)\cos(w) = \dfrac{\cos(z - w) + \cos(z + w)}{2}$.

5.7.10.- $\operatorname{sen}(z)\cos(w) = \dfrac{\operatorname{sen}(z + w) + \operatorname{sen}(z - w)}{2}$.

5.7.11.- $\operatorname{sen}(z) + \operatorname{sen}(w) = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\cos\left(\dfrac{z - w}{2}\right)$.

5.7.12.- $\operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}(w) = 2\cos\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{z - w}{2}\right)$.

5.7.13.- $\cos(z) + \cos(w) = 2\cos\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\cos\left(\dfrac{z - w}{2}\right)$.

5.7.14.- $\cos(z) - \cos(w) = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{z - w}{2}\right)$.

Propiedades 5.8.-

5.8.1.- $\cos(0) = 1$ y $\operatorname{sen}(0) = 0$.

5.8.2.- $\cos\left(\pi/2\right) = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\pi/2\right) = 1$.

5.8.3.- $\cos(\pi) = -1$ y $\operatorname{sen}(\pi) = 0$.

5.8.4.- $\operatorname{sen}(z+\pi) = -\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z+\pi) = -\cos(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

5.8.5.- $\operatorname{sen}\left(\pi/2 - z\right) = \cos(z)$ y $\cos\left(\pi/2 - z\right) = \operatorname{sen}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

5.8.6.- $\operatorname{sen}(z) = 0$ si, y sólo si, $z = k\,\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

5.8.7.- $\cos(z) = 0$ si, y sólo si, $z = \pi/2 + k\,\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 5.9.- Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq k\,\pi + \pi/2$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\operatorname{tg}(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = -i\,\frac{\exp(i\,z) - \exp(-i\,z)}{\exp(i\,z) + \exp(-i\,z)}\,,$$

que recibe el nombre de *tangente* de z. Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\operatorname{cotg}(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)} = i\,\frac{\exp(i\,z) + \exp(-i\,z)}{\exp(i\,z) - \exp(-i\,z)}\,,$$

denominada *cotangente* de z.

Definición 5.10.- Si $z \in \mathbb{C}$, se definen

$$\operatorname{Ch}(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}\,, \qquad \operatorname{Sh}(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}\,,$$

denominadas *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* de z, respectivamente.

Proposición 5.11.- $\operatorname{Sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $\operatorname{Ch} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son funciones periódicas, de periodo $2\,\pi\,i$, es decir

$$\operatorname{Ch}(z + 2\,\pi\,i) = \operatorname{Ch}(z) \quad \text{y} \quad \operatorname{Sh}(z + 2\,\pi\,i) = \operatorname{Sh}(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}\,.$$

Propiedades 5.12.- Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica:

5.12.1.- $\operatorname{Sh}(z) = -\operatorname{Sh}(-z)$ y $\operatorname{Ch}(z) = \operatorname{Ch}(-z)$.

5.12.2.- $\operatorname{Ch}^2(z) - \operatorname{Sh}^2(z) = 1$.

5.12.3.- $\operatorname{Sh}(z) = -i\,\operatorname{sen}(i\,z)\,,\quad \operatorname{sen}(z) = -i\,\operatorname{Sh}(i\,z)$.

5.12.4.- $\operatorname{Ch}(z) = \cos(i\,z)\,,\quad \cos(z) = \operatorname{Ch}(i\,z)$.

5.12.5.- $\operatorname{Sh}(z+w) = \operatorname{Sh}(z)\operatorname{Ch}(w) + \operatorname{Ch}(z)\operatorname{Sh}(w)$.

5.12.6.- $\operatorname{Ch}(z+w) = \operatorname{Ch}(z)\operatorname{Ch}(w) + \operatorname{Sh}(z)\operatorname{Sh}(w)$.

5.12.7.- $\operatorname{Sh}(2\,z) = 2\,\operatorname{Sh}(z)\operatorname{Ch}(z)$ y $\operatorname{Ch}(2\,z) = \operatorname{Ch}^2(z) + \operatorname{Sh}^2(z)$.

5.12.8.- $\operatorname{Sh}^2(z) = \dfrac{\operatorname{Ch}(2\,z) - 1}{2}$ y $\operatorname{Ch}^2(z) = \dfrac{\operatorname{Ch}(2\,z) + 1}{2}$.

Propiedades 5.13.- Si $z \in \mathbb{C}$ y $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$, se verifica:

5.13.1.- $\operatorname{Sh}(z) = \operatorname{Sh}(x)\cos(y) + i\,\operatorname{Ch}(x)\operatorname{sen}(y)$.

5.13.2.- $\operatorname{Ch}(z) = \operatorname{Ch}(x)\cos(y) + i\,\operatorname{Sh}(x)\operatorname{sen}(y)$.

5.13.3.- $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{Ch}(y) + i\,\cos(x)\operatorname{Sh}(y)$.

5.13.4.- $\cos(z) = \cos(x)\operatorname{Ch}(y) - i\,\operatorname{sen}(x)\operatorname{Sh}(y)$.

5.13.5.- $\operatorname{Sh}(z) = 0$ si, y sólo si, $z = i\,k\,\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

5.13.6.- $\operatorname{Ch}(z) = 0$ si, y sólo si, $z = i\left(\pi/2 + k\,\pi\right)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 5.14.- Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i\left(k\,\pi + \pi/2\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\operatorname{Tgh}(z) = \frac{\operatorname{Sh}(z)}{\operatorname{Ch}(z)} = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{\exp(z) + \exp(-z)}\,,$$

que recibe el nombre de *tangente hiperbólica* de z. Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i\,k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\operatorname{Cotgh}(z) = \frac{\operatorname{Ch}(z)}{\operatorname{Sh}(z)} = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{\exp(z) - \exp(-z)}\,,$$

denominada *cotangente hiperbólica* de z.

TEMA VI FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

§1 TOPOLOGÍA, LÍMITES Y CONTINUIDAD.

Notación: En lo que sigue, si z es un número complejo, la expresión $z = x+i\,y$ significará que $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$, y si f es una función compleja definida en un subconjunto de $\mathbb{C}$, las expresiones $f = u + i\,v$ o $f(z) = f(x+i\,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ se utilizarán para significar que $u = \mathrm{Re}(f)$ y $v = \mathrm{Im}(f)$.

Definición 1.1.- Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ se denomina *bola* o *disco abierto* centrado en z_0 y de radio r. Análogamente se define el *disco cerrado* centrado en z_0 y de radio r, $\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

Definición 1.2.- Sea U un subconjunto de $\mathbb{C}$.

i) Se dice que un punto $z_0 \in U$ es *interior* a U si existe un disco abierto centrado en dicho punto y totalmente contenido en U.

ii) Se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es *adherente* a U si cada disco centrado en z_0 tiene intersección no vacía con U.

iii) Se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es de *acumulación* de U si para cada $r > 0$ se tiene que $\big(B(z_0, r) \setminus \{z_0\}\big) \cap U \neq \emptyset$.

Observación 1.3.- Si se identifica cada punto $z = x+i\,y$ de $\mathbb{C}$ con el punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y cada subconjunto U de $\mathbb{C}$ se considera como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, resulta que los discos abiertos en $\mathbb{C}$ son las bolas abiertas en $\mathbb{R}^2$ para la norma euclídea: $B(z_0, r) \simeq \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r\big\} = B\big((x_0,y_0), r\big)$; así, un punto $z_0 = x_0+i\,y_0$ es interior al conjunto $U \subset \mathbb{C}$ si, y sólo si, el punto (x_0, y_0) es interior al conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$. De esta forma, para subconjuntos de $\mathbb{C}$, la noción de ser abierto (todos sus puntos son interiores) coincide con la referida a subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Lo mismo se puede decir respecto a los conceptos de cerrado, acotado o compacto, que se enuncian exactamente igual que en $\mathbb{R}^2$ sustituyendo la norma de los vectores por el módulo complejo.

Definición 1.4.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{C}$, $f\colon A \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de acumulación de A. Se dice que f *tiene límite* $\ell \in \mathbb{C}$ en el punto z_0 si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ si $z \in A$, $0 < |z - z_0| < \delta$.

Proposición 1.5.- Con la notación de la definición anterior, la función $f = u + i\,v$ tiene límite ℓ en el punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ si, y sólo si, las funciones reales u y v tienen límites $\mathrm{Re}(\ell)$ e $\mathrm{Im}(\ell)$, respectivamente, en dicho punto.

En otras palabras, f tiene límite ℓ en z_0 si, y sólo si, la aplicación $(x,y) \in A \mapsto \big(u(x,y), v(x,y)\big) \in \mathbb{R}^2$ tiene límite $\big(\mathrm{Re}(\ell), \mathrm{Im}(\ell)\big)$ en (x_0, y_0).

Observación 1.6.- Según la proposición anterior, todos los resultados sobre límites que se verifiquen para aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se verifican para funciones complejas de variable compleja. Por ejemplo, el límite, si existe, es único y se escribirá, en las condiciones anteriores, como es usual: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \ell$. Son válidos también los criterios secuenciales del límite, las propiedades aritméticas de los límites, etc.

Definición 1.7.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{C}$, $f\colon A \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de A. Se dice que f es *continua* en el punto z_0 si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ si $z \in A$, $|z - z_0| < \delta$. Se dice que f es *continua en A* si es continua en cada punto de A.

Proposición 1.8.- Con la notación anterior, la función $f = u + i\,v$ es continua en $z_0 = x_0 + i\,y_0$ si, y sólo si, las funciones reales u y v son continuas en dicho punto; es decir, si, y sólo si, la aplicación $(x,y) \in A \mapsto \big(u(x,y), v(x,y)\big) \in \mathbb{R}^2$ es continua en (x_0, y_0).

Observación 1.9.- De nuevo, los resultados sobre aplicaciones continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se verifican para funciones complejas de variable compleja y por esta razón no se exponen.

Definición 1.10.- Un subconjunto E de $\mathbb{C}$ se dice que es *inconexo* si se puede escribir de la forma $E = E_1 \cup E_2$ de manera que:

i) $E_1 \neq \emptyset$ y $E_2 \neq \emptyset$.

ii) Existen dos abiertos U_1 y U_2 de $\mathbb{C}$, con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, y tales que $E_1 \subset U_1$, $E_2 \subset U_2$.

En caso contrario se dice que E es *conexo*.

Definición 1.11.- Un subconjunto E de $\mathbb{C}$ es *conexo por caminos* o *arcoconexo* si, para cada par de puntos $z, w \in E$ existe una curva continua $\boldsymbol{\gamma}: [a, b] \to E$ tal que $\boldsymbol{\gamma}(a) = z$ y $\boldsymbol{\gamma}(b) = w$.

Proposición 1.12.- Todo subconjunto de $\mathbb{C}$ conexo por caminos es conexo.

Corolario 1.13.- Si E es un subconjunto de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ convexo o estrellado respecto de alguno de sus puntos, entonces E es conexo.

Teorema 1.14.- Sea U un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$. Para cada par de puntos $z, w \in U$ existe una curva continua y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, $\boldsymbol{\gamma}: [a, b] \to U$, tal que $\boldsymbol{\gamma}(a) = z$ y $\boldsymbol{\gamma}(b) = w$.

Observación 1.15.- Los resultados anteriores muestran que para conjuntos abiertos son equivalentes la conexión y la conexión por caminos. Si un conjunto E es conexo pero no abierto, no se puede garantizar que sea arcoconexo.

Definición 1.16.- Un subconjunto abierto, conexo y acotado U de $\mathbb{C}$ se dice que es *simplemente conexo* si su complementario $\mathbb{C} \setminus U$ es también conexo.

Observaciones 1.17.-

i) Los dominios de Jordan (ver tema III) son abiertos simplemente conexos.

ii) La idea intuitiva de simplemente conexo es la de un abierto que no tiene 'agujeros'. Esta propiedad se puede precisar de la siguiente forma:

"Un abierto conexo U (acotado o no) es simplemente conexo si, y sólo si, para cada curva continua, cerrada y simple $\Gamma \subset U$, que sea el borde de un dominio de Jordan D, se tiene que también $D \subset U$".

§ 2 DERIVABILIDAD.

Definición 2.1.- Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $f: U \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de U. Se dice que f es *derivable* en z_0 si existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}\,. \tag{1}$$

El límite anterior se denomina *derivada* de f en z_0 y se denota $f'(z_0)$.

La función f es *holomorfa* en el punto z_0 si existe un disco $B(z_0, r) \subset U$ tal que f es derivable en cada punto $z \in B(z_0, r)$. Se dice que f es *holomorfa en* U si es holomorfa en cada punto de U, es decir, si es derivable en cada punto de U.

Definición 2.2.- Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $f: U \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de U. Se dice que f es *diferenciable* en z_0 si existen una constante $d \in \mathbb{C}$ y una función $\varepsilon: U \to \mathbb{C}$ con $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0 = \varepsilon(z_0)$, tales que

$$f(z) - f(z_0) = d\,(z - z_0) + \varepsilon(z)\,|z - z_0| \quad \text{para todo } z \in U\,. \tag{2}$$

Proposición 2.3.- Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $f: U \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de U. Entonces f es derivable en z_0 si, y sólo si, es diferenciable en z_0. En este caso, la constante d de la definición anterior es $f'(z_0)$.

Corolario 2.4.- Si $f = u + i\,v: U \to \mathbb{C}$ es derivable en el punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$, entonces las funciones reales $u, v: U \to \mathbb{R}$ son diferenciables en (x_0, y_0).

Condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\,; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\,.} \tag{3}$$

Teorema 2.5.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f = u + i\,v$ una función compleja definida en U. Es condición necesaria y suficiente para que f sea derivable en un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ de U que las funciones u, v sean diferenciables en el punto (x_0, y_0) y verifiquen las condiciones de Cauchy-Riemann.

Corolario 2.6.- Sea $f = u + i\,v$ una función compleja en un abierto U tal que u, v son de clase $\mathcal{C}^1$ en U y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en cada punto de U. Entonces la función f es holomorfa en U.

Proposición 2.8.- Sea f una función compleja definida en un abierto U de $\mathbb{C}$. Si f es derivable en el punto $z_0 \in U$, entonces f es continua en z_0. Como consecuencia, si f es holomorfa en U, entonces f es continua en U.

Propiedades 2.9.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, y f, g dos funciones complejas definidas en U.

2.9.1.- Si f y g son derivables en z_0 y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es derivable en z_0, y además

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)\,.$$

2.9.2.- Si f y g son derivables en z_0, entonces $f\,g$ es derivable en z_0, y además

$$(f\,g)'(z_0) = f'(z_0)\,g(z_0) + f(z_0)\,g'(z_0)\,.$$

2.9.3.- Si f y g son derivables en z_0 y $g(z_0) \neq 0$, entonces $f/_g$ (que está definida en un entorno adecuado de z_0) es derivable en z_0, y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\,g(z_0) - f(z_0)\,g'(z_0)}{g(z_0)^2}\,.$$

Teorema 2.10.- (*Derivación de la función compuesta*).
Sean U y V abiertos de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to V$ y $g\colon V \to \mathbb{C}$ funciones tales que:

i) f es derivable en $z_0 \in U$.

ii) g es derivable en $w_0 = f(z_0) \in V$.

Entonces la función compuesta $g\circ f$ es derivable en z_0. Además,

$$(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\,f'(z_0) = g'(w_0)\,f'(z_0)\,.$$

Ejemplos 2.11.-

2.11.1.- Si f es una función constante ($f(z) = c \in \mathbb{C}$ para todo z), entonces f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2.11.2.- Si $\mathrm{Id}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ denota la *función identidad* ($\mathrm{Id}(z) = z$ para todo z), Id es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y $\mathrm{Id}'(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2.11.3.- Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la función $p_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $p_n(z) = z^n$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y su derivada es $n\,p_{n-1}$, es decir, ${p_n}'(z) = n\,z^{n-1}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2.11.4.- Si P es un polinomio con coeficientes complejos, $P(z) = a_n\,z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + \ldots + a_1\,z + a_0$, entonces la función $z \mapsto P(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $P'(z) = n\,a_n\,z^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,z^{n-2} + \ldots + a_1$.

2.11.5.- Si P y Q son polinomios con coeficientes complejos en la variable z, puesto que Q tiene un número finito de raíces $r_1, r_2, \ldots, r_m$, la función *racional* R dada por $R(z) = {}^{P(z)}/_{Q(z)}$ está bien definida en el abierto $U = \mathbb{C} \setminus \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ y es holomorfa en él; su derivada es a su vez una función racional,

$$R'(z) = \frac{P'(z)\,Q(z) - P(z)\,Q'(z)}{Q(z)^2} \quad \text{para todo } z \in U\,.$$

2.11.6.- La función exponencial $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $\exp'(z) = \exp(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

2.11.7.- Las funciones trigonométricas sen, cos, y las funciones hiperbólicas Sh, Ch son holomorfas en todo $\mathbb{C}$, y para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\mathrm{sen}'(z) = \cos(z)\,, \qquad \cos'(z) = -\,\mathrm{sen}(z)\,,$$

$$\mathrm{Sh}'(z) = \mathrm{Ch}(z)\,, \qquad \mathrm{Ch}'(z) = \mathrm{Sh}(z)\,.$$

Nota: Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Cada una de las condiciones siguientes implica que la función f es constante en U.

i) $f'(z) = 0$ para cada $z \in U$.

ii) Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}\big(f(z)\big) = k$ para cada $z \in U$.

iii) Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Im}\big(f(z)\big) = k$ para cada $z \in U$.

iv) Existe $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, tal que $|f(z)| = k$ para cada $z \in U$.

§ 3 DERIVABILIDAD DE LAS FUNCIONES INVERSAS.

Teorema 3.1.- (*Teorema de la Función Inversa*)

Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U tal que su derivada f' es continua en U. Entonces, si $z_0 \in U$ y $f'(z_0) \neq 0$, existen un entorno abierto V de z_0 y un entorno abierto W de $f(z_0)$, tales que:

i) $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in V$.

ii) f aplica biyectivamente V en W.

iii) La función inversa $f^{-1}\colon W \to V$ es holomorfa en W y su derivada viene dada por

$$(f^{-1})'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{para cada } z \in V\,,$$

o lo que es lo mismo

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(w)\big)} \quad \text{para cada } w \in W\,.$$

Ejemplos 3.3.-

3.3.1.- Puesto que la derivada de la función exponencial es ella misma, el teorema de la función inversa garantiza que es localmente invertible en un entorno de cada punto $z_0 \in \mathbb{C}$, pero podemos decir más: Fijado $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < \mathrm{Im}(z_0) < c + 2\pi$, el abierto

$$V_c = \{z \in \mathbb{C} : c < \mathrm{Im}(z) < c + 2\pi\} \simeq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < c + 2\pi\}$$

contiene a z_0 y exp es una biyección entre V_c y el abierto

$$W_c = \mathbb{C} \setminus \{r\, e^{i\,c} : r \in \mathbb{R}\,,\, r \geq 0\}\,,$$

cuya inversa es la correspondiente rama del logaritmo, $\log_c$; el teorema de la función inversa garantiza que $\log_c$ es holomorfa en W_c y que su derivada es

$$\log_c'(w) = \frac{1}{\exp'\big(\log_c(w)\big)} = \frac{1}{\exp\big(\log_c(w)\big)} = \frac{1}{w}\,, \quad w \in W_c\,.$$

3.3.2.- Si a es un número complejo y se define, elegida una rama del logaritmo en el abierto W_c correspondiente, la función potencial

$$f(z) = z^a = \exp\big(a \log_c(z)\big)\,, \quad z \in W_c\,,$$

ésta es holomorfa en virtud de 2.10, y su derivada es

$$f'(z) = \exp\big(a \log_c(z)\big)\,\frac{a}{z} = a\,\frac{z^a}{z}\,.$$

En particular, haciendo uso de nuevo de la regla de la cadena, elegida una rama de la raíz cuadrada (o si se prefiere, del logaritmo), la función

$$g(z) = \sqrt{1-z^2} = \big(1-z^2\big)^{1/2}$$

es holomorfa en el abierto $A_c = \{z \in \mathbb{C} : 1 - z^2 \in W_c\}$ y su derivada es

$$g'(z) = \frac{1}{2}\,(-2\,z)\,\frac{\sqrt{1-z^2}}{1-z^2} = \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}\,, \quad z \in A_c\,.$$

3.3.3.- La función seno es derivable en todo $\mathbb{C}$ y su derivada, la función coseno, es nula en los puntos de la forma $k\,\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Para el resto de los puntos existe inversa local, que denominaremos de forma genérica un *arcoseno* y denotaremos 'arcsen'; en estos puntos se tiene que

$$\mathrm{arcsen}'(w) = \frac{1}{\mathrm{sen}'\big(\mathrm{arcsen}(w)\big)} = \frac{1}{\cos\big(\mathrm{arcsen}(w)\big)} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-w^2}}\,.$$

El signo $\pm$ hace referencia a la determinación o rama particular elegida para la raíz.

TEMA VII FUNCIONES ANALÍTICAS

§ 1 SERIES DE POTENCIAS.

Una *serie de funciones* definida en un conjunto X vendrá dada asignando a cada punto $x \in X$ una serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, donde $f_n \colon X \to \mathbb{C}$ es una función para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definición 1.1.- Sea z_0 un número complejo. Si $a_0 \in \mathbb{C}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos, la serie funcional $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ se denomina *serie de potencias centrada en el punto* z_0. Si, en este contexto, se sigue el convenio de notación $(z - z_0)^0 = 1$ para cada $z \in \mathbb{C}$, la serie de potencias se representa de forma más compacta como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Definición 1.3.- Se considera la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

i) Se dice que la serie *converge en el punto* $w \in \mathbb{C}$ si la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^n$ es convergente. Si la serie de potencias converge en cada punto de un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ se dice que *converge puntualmente en* X.

ii) Se dice que la serie *converge absolutamente en el punto* $w \in \mathbb{C}$ si la serie de $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (w - z_0)^n|$ es convergente. Si la serie de potencias converge absolutamente en cada punto w de un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ se dice que *converge absolutamente en* X.

Definición 1.5.- Dada una serie de potencias que converge puntualmente en un conjunto $X \subset \mathbb{C}$, para cada $z \in X$ denotemos por $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ a la sucesión de sumas parciales correspondiente y por $S(z)$ a la suma de la serie. Se dice que la serie *converge uniformemente en* X si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende sólo de ε) tal que si $n \geq n_0$ se tiene que $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ para cada $z \in X$.

Definición 1.6.- Se dice que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *converge normalmente* en un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ si existe una serie convergente de números reales positivos $\sum_{n=0}^{\infty} m_n$ tal que $|a_n (z - z_0)^n| \leq m_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in X$.

Proposición 1.7.- (*Criterio M de Weierstrass*). Si una serie de potencias converge normalmente en el conjunto $X \subset \mathbb{C}$, entonces converge absoluta y uniformemente en X.

Lema 1.8.- (*de Abel*). Se considera la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Si R es un número real estrictamente positivo tal que la sucesión de números reales positivos $\{|a_n| R^n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada, entonces la serie de potencias es absolutamente convergente para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z - z_0| < R$. Es más, la serie converge normalmente en los discos de la forma $\overline{B}(z_0, r)$ para todo r con $0 < r < R$.

Corolario 1.9.- Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge en el punto $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, entonces converge absolutamente en cada punto z que verifique $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ y converge normalmente en los discos compactos $\overline{B}(z_0, r)$, $0 < r < |z_1 - z_0|$.

Definición 1.10.- Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, se define su *radio de convergencia*, que denotaremos por ϱ, como sigue:

1. Si la serie converge únicamente en el punto z_0, entonces $\varrho = 0$.
2. Si la serie converge en cada punto de $\mathbb{C}$, se dice que $\varrho = \infty$.
3. En otro caso, su radio de convergencia se define como el superior del conjunto de los números reales positivos r tales que la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ es convergente.

Proposición 1.11.- El número real $\varrho \geq 0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias si, y sólo si, la serie converge en todo punto z con $|z-z_0| < \varrho$ y no converge en cada punto z con $|z-z_0| > \varrho$.

Definición 1.12.- Dada la serie de potencias con radio de convergencia $\varrho > 0$, el disco abierto $B(z_0, \varrho)$ se denomina *abierto de convergencia* de la serie (en el caso de que $\varrho = \infty$ se entiende que dicho disco coincide con $\mathbb{C}$). El conjunto de los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde la serie converge se denomina *campo de convergencia* de la serie.

Observaciones 1.13.-

i) El campo de convergencia de una serie de potencias contiene al abierto de convergencia y, si su radio de convergencia ϱ es finito, está contenido a su vez en el disco cerrado $\overline{B}(z_0, \varrho)$.

ii) El radio de convergencia de una serie de potencias depende únicamente de sus *coeficientes* $\{a_n : n \geq 0\}$, es decir, las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,z^n$ tienen el mismo radio de convergencia; el campo de convergencia de la primera es el trasladado por z_0 del de la segunda.

Proposición 1.14.- Dada la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$, se supone que existe el límite, finito o infinito, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$. Entonces, si ϱ es el radio de convergencia de la serie, se tiene que

$$\varrho = \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda = 0; \\ 0 & \text{si } \lambda = \infty; \\ \dfrac{1}{\lambda} & \text{si } 0 < \lambda < \infty. \end{cases} \tag{1}$$

En particular, si todos los coeficientes de la serie son no nulos, al menos a partir de un término en adelante, y existe $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|/|a_{n+1}|$, este límite coincide con ϱ.

Fórmula de Cauchy-Hadamard 1.18.- El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ viene dado según la fórmula (1) en 1.14, siendo $\lambda = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

§ 2 FUNCIONES DEFINIDAS POR SERIES DE POTENCIAS.

Teorema 2.1.- Sea $\varrho > 0$ (quizá ∞) el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$. Si para cada $z \in B(z_0, \varrho)$ se denota por $f(z)$ a la suma de la serie numérica correspondiente, resulta que f es continua en $B(z_0, \varrho)$ (si $\varrho = \infty$ se entiende que dicho disco es $\mathbb{C}$).

Teorema 2.2.- Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\varrho > 0$, y tal que alguno de sus coeficientes a_n es no nulo. Se denota por f a la función suma de la serie. Existe entonces un número real δ, con $0 < \delta \leq \varrho$, tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \big(B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}\big)$.

Dicho de otra forma: si una serie de potencias tiene suma nula en un entorno del punto en el que está centrada, entonces es la serie idénticamente nula.

Corolario 2.3.- (*Principio de identidad*)

Se supone que las series de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$ tienen radios de convergencia no nulos ϱ_1 y ϱ_2, respectivamente, y que existe un número real δ, con $0 < \delta < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$, de manera que las sumas de ambas series coinciden para cada $z \in B(z_0, \delta)$. Entonces las series son iguales, es decir,

$$a_n = b_n \quad \text{para cada } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Lema 2.4.- Sea ϱ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$. La *serie derivada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,(z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,a_{n+1}\,(z-z_0)^n$$

tiene también radio de convergencia ϱ.

Teorema 2.5.- Sea f la función suma de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$, definida en el abierto de convergencia $B(z_0,\varrho)$. Entonces f es holomorfa en este disco y

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,(z-z_0)^n \quad \text{para cada } z\in B(z_0,\varrho)\,.$$

Corolario 2.6.- En las mismas condiciones del teorema anterior, f admite derivadas de cualquier orden en $B(z_0,\varrho)$. Además, para cada $m\in\mathbb{N}$ se tiene

$$f^{m)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)\,a_{n+m}\,(z-z_0)^n\,, \quad z\in B(z_0,\varrho)\,.$$

En particular, $f^{m)}(z_0)=m!\,a_m$ ó $a_m=\dfrac{f^{m)}(z_0)}{m!}$ para cada $m\geq 0$.

Teorema 2.7.- Sea f la función suma de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$, definida en el abierto de convergencia $B(z_0,\varrho)$. Si $C\in\mathbb{C}$, la función F, suma de la serie de potencias

$$C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\,(z-z_0)^{n+1}=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}\,(z-z_0)^n\,,$$

es una primitiva de f en $B(z_0,\varrho)$, es decir, $F'(z)=f(z)$ para cada $z\in B(z_0,\varrho)$.

Definición 2.8.- Dadas las series de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$, se define la serie *suma* de ambas por $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)\,(z-z_0)^n$, y la serie *producto de Cauchy* como

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n\,, \quad \text{siendo } c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\,b_{n-k}\,, \quad n\geq 0\,.$$

Teorema 2.9.- Sean ϱ_1 y ϱ_2 los radios de convergencia de las series de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$, respectivamente. Entonces las series suma y producto de Cauchy de las anteriores tienen radios de convergencia mayores o iguales que $\varrho_0=\min\{\varrho_1,\varrho_2\}$.

Definición 2.10.- Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una función compleja definida en A. Se dice que f es *analítica* en un punto $z_0\in A$ si existen un número $\delta>0$ tal que $B(z_0,\delta)\subset A$, y una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ convergente en $B(z_0,\delta)$, tales que $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ para cada $z\in B(z_0,\delta)$.

Se dice que f es *analítica en* A si es analítica en cada punto de A.

Observaciones 2.11.-

i) En las condiciones de la definición anterior es habitual obviar el dominio de definición de la función f; lo que en realidad es relevante es el radio de convergencia de la serie que la representa, que contiene al disco $B(z_0,\delta)$. Así, al referirse a una tal función, se dice simplemente que es analítica en el punto z_0.

ii) El teorema anterior muestra que la suma y el producto de funciones analíticas en un punto z_0 son también funciones analíticas en dicho punto.

iii) En virtud del corolario 2.6, si f es analítica en el punto z_0, entonces es holomorfa en z_0, aún más, f es indefinidamente derivable en un entorno de dicho punto.

Teorema 2.12.- Se supone que la función f es analítica en el punto z_0, esto es, f se representa en un entorno $B(z_0,\delta)$ de dicho punto mediante la suma de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$. Entonces f es analítica en cada punto $z_1\in B(z_0,\delta)$; concretamente, si $\varepsilon=\delta-|z_1-z_0|$, f se representa en el disco $B(z_1,\varepsilon)$ (que está contenido en $B(z_0,\delta)$) mediante la serie que se obtiene al reordenar en potencias crecientes de $(z-z_1)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(z-z_1+z_1-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,(z_1-z_0)^{n-k}\,(z-z_1)^k\,.$$

Teorema 2.13.- Sean f y g dos funciones analíticas en el punto z_0. Si $g(z_0) \neq 0$, entonces la función f/g es analítica en z_0.

Observación 2.14.- En las condiciones del teorema anterior, supongamos que las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ representan a las funciones f y g, respectivamente, en un entorno de z_0. Para calcular los coeficientes de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ que representa a f/g se puede proceder efectuando la división formal de las dos series anteriores en potencias crecientes de $(z-z_0)$. Sin embargo, es más cómodo proceder mediante el método de los coeficientes indeterminados, teniendo en cuenta que se debe verificar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n\Big),$$

e identificando los coeficientes a_n con los correspondientes al producto de Cauchy de las otras dos series. Esto da lugar a un sistema (infinito) de ecuaciones lineales cuyas incógnitas c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, se despejan recurrentemente.

Teorema 2.15.- Sean g una función analítica en el punto z_0, y f una función analítica en el punto $w_0 = g(z_0)$. Entonces la función $f \circ g$ (que está bien definida en un entorno de z_0 por ser g continua) es analítica en z_0.

2.16.- A continuación se presentan desarrollos en serie de potencias de algunas funciones elementales. Todos los desarrollos se refieren al punto $z_0 = 0$. En cada caso se relaciona el abierto de convergencia de la correspondiente serie de potencias, donde dicha serie representa a la función.

1.- $e^z = \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$

2.- $\operatorname{sen}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

3.- $\cos(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

4.- $\operatorname{Sh}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

5.- $\operatorname{Ch}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

6.- **i)** $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad z \in B(0,1).$

ii) $\displaystyle\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad z \in B(0,1).$

7.- $\log(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \qquad z \in B(0,1). \qquad$ (*rama principal*)

§ 1 INTEGRAL COMPLEJA A LO LARGO DE CURVAS.

Dada una curva paramétrica $\boldsymbol{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, ésta se puede entender también como una curva en $\mathbb{C}$, y viceversa; así, los conceptos de regularidad (continuidad, derivabilidad a trozos, etc.) enunciados para las primeras se trasladan a este otro contexto. Escribiremos habitualmente $\boldsymbol{\gamma}(t) = x(t)+i\,y(t)$ o $z(t) = x(t)+i\,y(t)$, y para los puntos t donde la curva sea derivable se tendrá que $\boldsymbol{\gamma}'(t) = x'(t)+i\,y'(t)$. Otro tanto se puede decir respecto de la noción de curva paramétrica orientada.

Como es habitual, confundiremos las curvas paramétricas regulares y simples $(I, \boldsymbol{\gamma})$ (que no se cortan a sí mismas) con su soporte γ^*, es decir, con la curva geométrica que parametrizan, obviando estos objetos y hablando simplemente de curvas paramétricas, incluso cuando se tenga en mente que se está trabajando en el conjunto $\Gamma = \boldsymbol{\gamma}^* = \{\boldsymbol{\gamma}(t) = x(t) + i\,y(t) \in \mathbb{C} : t \in I\}$, que es el mismo para todas las parametrizaciones regulares equivalentes a $(I, \boldsymbol{\gamma})$.

Lema 1.1.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $\boldsymbol{\gamma}: [a,b] \to U$, $\boldsymbol{\varphi}: [c,d] \to U$ dos parametrizaciones equivalentes de una misma curva geométrica orientada Γ continua y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y $f: U \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces $\displaystyle\int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,\boldsymbol{\gamma}'(t)\,dt = \int_c^d f\big(\boldsymbol{\varphi}(s)\big)\,\boldsymbol{\varphi}'(s)\,ds$.

Definición 1.2.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $f: U \to \mathbb{C}$ una función continua y Γ una curva geométrica orientada y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, parametrizada por la aplicación $\boldsymbol{\gamma}: [a,b] \to U$ (coherente con su orientación). Se define la *integral de f a lo largo de la curva* Γ como

$$\int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,\boldsymbol{\gamma}'(t)\,dt, \tag{1}$$

que se denota indistintamente por $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ o $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz$.

Observaciones 1.3.-

ii) Si la función f se escribe en términos de sus partes real e imaginaria, $f = u + i\,v$, la integral de f a lo largo de Γ se escribe de forma equivalente como

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\Gamma v\,dx + u\,dy = \int_\Gamma (u, -v)\cdot d\boldsymbol{r} + i\int_\Gamma (v, u)\cdot d\boldsymbol{r}. \tag{2}$$

Propiedades 1.4.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, f, g dos funciones complejas y continuas en U y $\boldsymbol{\gamma}: [a,b] \to U$ una parametrización de una curva geométrica orientada Γ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Se verifica:

i) $\displaystyle\int_\Gamma (f+g)(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_\Gamma g(z)\,dz$.

ii) Si $c \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_\Gamma c\,f(z)\,dz = c\int_\Gamma f(z)\,dz$.

iii) $\displaystyle\Big|\int_\Gamma f(z)\,dz\Big| \le \sup\{|f(z)| : z \in \Gamma\}\ \mathrm{long}(\Gamma)$.

Proposición 1.5.- Sean $(I, \boldsymbol{\gamma})$, $(J, \boldsymbol{\varphi})$ dos curvas paramétricas equivalentes que definen orientaciones opuestas en la curva geométrica Γ que parametrizan. Si f es una función continua en un abierto que contiene al soporte de la curva, entonces $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz = -\int_{\boldsymbol{\varphi}} f(z)\,dz$.

Definición 1.6.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f: U \to \mathbb{C}$ una función continua en U. Se dice que f tiene una *primitiva* en U si existe una función F definida y holomorfa en todo el abierto U de tal manera que $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in U$.

Proposición 1.7.- Sea f una función continua en el abierto U con primitiva F en dicho conjunto, y sea $\boldsymbol{\gamma}: [a,b] \to U$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Entonces $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz = F\big(\boldsymbol{\gamma}(b)\big) - F\big(\boldsymbol{\gamma}(a)\big)$.

Teorema 1.8.- Sean U un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ y $f: U \to \mathbb{C}$ una función continua. Son equivalentes los siguientes enunciados:

a) La integral de f a lo largo de una curva con soporte contenido en U sólo depende de los extremos de la curva, es decir, si $\boldsymbol{\gamma}: [a,b] \to U$ y $\boldsymbol{\varphi}: [c,d] \to U$ son dos curvas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y con los mismos extremos ($\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\varphi}(c)$, $\boldsymbol{\gamma}(b) = \boldsymbol{\varphi}(d)$), entonces $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\boldsymbol{\varphi}} f(z)\,dz$.

b) La integral de f a lo largo de cualquier curva cerrada con soporte contenido en U es nula, esto es, si $\boldsymbol{\gamma}: [a,b] \to U$ es una curva cerrada de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, entonces $\displaystyle\oint_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz = 0$.

c) f tiene una primitiva en U.

§ 2 FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY.

Teorema 2.1.- (*de Cauchy-Goursat para triángulos*)

Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f: U \to \mathbb{C}$ una función continua en U y derivable en todos los puntos de U excepto quizá en una cantidad finita de ellos. Si T es un triángulo cuya adherencia está contenida en U, $T \cup \partial T \subset U$, entonces $\displaystyle\oint_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.

Corolario 2.2.- Con las mismas hipótesis del teorema anterior, si U es convexo, entonces f tiene primitiva en todo U y por tanto $\displaystyle\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$ para toda curva Γ cerrada y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos contenida en U.

Teorema 2.4.- (*Fórmula integral de Cauchy para circunferencias*)

Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $f: U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo U y $z_0 \in U$. Si el disco cerrado $\overline{B}(z_0, r)$ está totalmente contenido en U y se denota por Γ a su borde con la orientación inducida, entonces para todo $z \in B(z_0, r)$ ($|z - z_0| < r$) se verifica

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\,dw. \tag{3}$$

Esto es, parametrizando Γ por $\boldsymbol{\gamma}(t) = z_0 + r\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\,\pi]$, cuya derivada es $\boldsymbol{\gamma}'(t) = i\,r\,e^{i\,t}$, se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \frac{f(z_0 + r\,e^{i\,t})\,r\,e^{i\,t}}{z_0 + r\,e^{i\,t} - z}\,dt.$$

Lema 2.6.- Sean Γ una curva geométrica orientada y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en $\mathbb{C}$ y h una función continua en Γ. La función f definida en $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ por $\displaystyle f(z) = \int_{\Gamma} \frac{h(w)}{w - z}\,dw$ es holomorfa, admite derivadas de cualquier orden y son todas ellas holomorfas. Es más, para cada $n \in \mathbb{N}$ la derivada de orden n de f se representa por

$$f^{n)}(z) = n! \int_{\Gamma} \frac{h(w)}{(w - z)^{n+1}}\,dw, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

Teorema 2.7.- Si f es una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$, entonces f es indefinidamente derivable en dicho abierto.

Corolario 2.8.- Si f es una función continua en un abierto U de $\mathbb{C}$ y tiene una primitiva en U, entonces es holomorfa en dicho abierto.

Corolario 2.9.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función continua en todo U y derivable en todos los puntos de U excepto quizá en una cantidad finita de ellos. Entonces f es holomorfa en todo U.

Teorema 2.10.- (*Fórmula integral de Cauchy*)

Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f: U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo U. Si D es un dominio de Jordan tal que su adherencia $D \cup \partial D$ está contenida en U, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z}\,dw \quad \text{para todo } z \in D, \tag{5.1}$$

considerando en ∂D la orientación inducida por D. En consecuencia, si $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\,\pi\,i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\,dw \quad \text{para todo } z \in D. \tag{5.2}$$

Teorema 2.12.- (*de Morera*)

Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función continua en U tal que

$$\oint_{\partial T} f(z)\, dz = 0$$

para cada triángulo T con $\overline{T} \subset U$. Entonces f es holomorfa en U.

§ 3 CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA DE CAUCHY.

Teorema 3.1.- Si f es una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$, entonces f es analítica en U. De hecho, si $z_0 \in U$ y $B(z_0, r) \subset U$, entonces para cada $z \in B(z_0, r)$ se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n\,. \tag{6}$$

Observaciones 3.2.-

ii) La serie (6) se denomina *serie de Taylor de* f *en el punto* z_0. El teorema anterior implica que, si $B(z_0, R)$ es el mayor disco abierto centrado en z_0 y contenido en U, entonces el radio de convergencia de esta serie es mayor o igual que R; por tanto, si $U = \mathbb{C}$, la serie de Taylor converge en todo $\mathbb{C}$.

Proposición 3.3.- (*Desigualdades de Cauchy para las derivadas*)

Sea f una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$. Si el disco cerrado $\overline{B}(z_0, r)$ está contenido en U, entonces, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, se verifica

$$|f^{n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n} \sup\{|f(w)| : |w - z_0| = r\}\,.$$

Corolario 3.5.- (*Teorema de Liouville*)

Sea f una función compleja definida y holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Si f es acotada, es decir, si existe $M > 0$ con $|f(z)| \le M$ para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

Observación 3.6.- Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se denominan *funciones enteras*. Según 3.2.ii, para este tipo de funciones su serie de Taylor en cualquier punto z_0 converge hacia f en todo $\mathbb{C}$; como es posible aplicar las desigualdades de 3.3 para cualquier $r > 0$, haciendo tender r hacia ∞ resulta que $f^{n)}(z_0) = 0$ para todo $n \ge 1$ y $f(z) = f(z_0)$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

Corolario 3.7.- (*Teorema fundamental del álgebra*)

Si P es un polinomio de grado mayor o igual que 1 con coeficientes complejos, P tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. De hecho, si el grado de P es $n \ge 1$, entonces P se escribe

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \;=\; a_n\,(z - r_1)^{m_1}(z - r_2)^{m_2} \cdots (z - r_k)^{m_k}\,,$$

siendo m_j la multiplicidad de la raíz r_j y $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.

Teorema 3.8.- (*Principio de los ceros aislados*)

Sea f una función holomorfa en un abierto conexo U de $\mathbb{C}$. Supongamos que existe $A \subset U$ tal que:

i) $f(a) = 0$ para cada $a \in A$.

ii) A tiene al menos un punto de acumulación en U.

Entonces f es la función idénticamente nula en U.

Corolario 3.9.- (*Principio de identidad*)

Sean f y g dos funciones holomorfas en un mismo abierto conexo U de $\mathbb{C}$ que coinciden en un subconjunto A que tiene al menos un punto de acumulación en U. Entonces $f(z) = g(z)$ para cada $z \in U$.

Observaciones 3.10.-

i) Los dos resultados anteriores son falsos si el abierto U no es conexo.

ii) La forma habitual de aplicar estos principios consiste en considerar como conjunto A el rango de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de U, con $a_n \ne a_m$ si $n \ne m$, y que converge hacia un punto $a \in U$.

Teorema 3.11.- (*del módulo máximo*)

Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Si existe un punto $z_0 \in U$ tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$, entonces f es constante en U.

Corolario 3.12.- (*Teorema del módulo mínimo*)

Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in U$. Si existe un punto $z_0 \in U$ tal que $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in U$, entonces f es constante en U.

Corolario 3.13.- Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. La función f es constante en U si se verifica una de las condiciones siguientes:

a) Existe un punto $z_0 \in U$ tal que $\operatorname{Re}\big(f(z_0)\big) \geq \operatorname{Re}\big(f(z)\big)$ para todo $z \in U$.

b) Existe un punto $z_0 \in U$ tal que $\operatorname{Re}\big(f(z_0)\big) \leq \operatorname{Re}\big(f(z)\big)$ para todo $z \in U$.

c) Existe un punto $z_0 \in U$ tal que $\operatorname{Im}\big(f(z_0)\big) \geq \operatorname{Im}\big(f(z)\big)$ para todo $z \in U$.

d) Existe un punto $z_0 \in U$ tal que $\operatorname{Im}\big(f(z_0)\big) \leq \operatorname{Im}\big(f(z)\big)$ para todo $z \in U$.

Corolario 3.15.- Sean U un abierto conexo y acotado de $\mathbb{C}$ y $f = u + iv$ una función holomorfa en U y continua en $\overline{U}$. Entonces:

i) Existe un punto ξ de la frontera de U tal que $|f(\xi)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$, es decir, $|f|$ alcanza su máximo en $\operatorname{Fr}(U)$.

ii) Si además $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \overline{U}$, entonces $|f|$ alcanza su mínimo en $\operatorname{Fr}(U)$.

iii) La función u alcanza sus extremos en $\operatorname{Fr}(U)$.

iv) La función v alcanza sus extremos en $\operatorname{Fr}(U)$.

Teorema 3.16.- Sea U un abierto conexo y simplemente conexo de $\mathbb{C}$. Para una función continua $f = u + i\,v : U \to \mathbb{C}$ son equivalentes los siguientes enunciados:

a) f es holomorfa en U.

b) f tiene una primitiva en U.

c) Para cada curva Γ cerrada, de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y con soporte contenido en U se tiene que

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

d) Para cada dominio de Jordan D con $\partial D \subset U$ se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{\partial D}\frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \text{para todo } z \in D\,.$$

e) f es analítica en U.

f) u y v son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en U y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.

Observación 3.17.- Si el abierto U no es simplemente conexo se tiene que:

1. Las propiedades a), e) y f) son equivalentes.

2. Las condiciones b) y c) son equivalentes e implican las tres anteriores, pero no recíprocamente.

3. El enunciado d) no tiene sentido, pues el hecho de que $\partial D \subset U$ no garantiza que $D \subset U$, pero añadiendo esta hipótesis la equivalencia con a) viene dada por el lema 2.6 y el teorema 2.10.

TEMA IX SINGULARIDADES AISLADAS

§ 1 CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES.

Definición 1.1.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $z_0 \in U$. Si f es una función definida y holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$, se dice que f presenta o tiene una *singularidad aislada* en el punto z_0. En estas condiciones:

i) Si existe y es finito $\lim_{z \to z_0} f(z)$, se dice que la singularidad es *evitable*.

ii) Si $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, se dice que la singularidad es *polar* o que z_0 es un *polo* de la función f.

iii) Si la singularidad en el punto z_0 no es evitable ni polar, se dice que es *esencial*.

Teorema 1.4.- (*Caracterización de singularidades evitables*)
Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Son equivalentes:

a) z_0 es una singularidad evitable de f.
b) Existe una función g holomorfa en todo U y tal que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$.
c) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}(z_0, \varepsilon) \subset U$ y f está acotada en $\overline{B}(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$.
d) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

Teorema 1.5.- (*Caracterización de singularidades polares*)
Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Son equivalentes:

a) z_0 es una singularidad polar de f.
b) Existe una función g holomorfa en todo U con $g(z_0) \neq 0$ y un número natural m tales que $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$.
c) Existe un número natural m tal que el límite $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ existe, es finito y no nulo.

Observación 1.6.- El número natural m que se cita en las proposiciones b) y c) del teorema anterior resulta ser el mismo y se denomina *orden del polo* de f en z_0.

Definición 1.7.- Sean f una función holomorfa en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y k un número natural. Se dice que f tiene un *cero de orden* k en el punto z_0 si

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{k-1)}(z_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f^{k)}(z_0) \neq 0 .$$

Admitiremos también que pueda ser $k = 0$, entendiendo en este caso que $f(z_0) \neq 0$.

Observación 1.8.- Si f es holomorfa en un disco $B(z_0, \delta)$ y tiene en el punto z_0 un cero de orden $k \geq 1$, entonces para cada $z \in B(z_0, \delta)$ se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-k} = (z - z_0)^k \varphi(z) ,$$

siendo φ una función holomorfa en $B(z_0, \delta)$ y tal que $\varphi(z_0) = f^{k)}(z_0)/k! \neq 0$. Recíprocamente, si f se escribe en $B(z_0, \delta)$ como $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, siendo $k \geq 1$ y φ holomorfa en este disco y con $\varphi(z_0) \neq 0$, entonces f tiene en z_0 un cero de orden k.

Proposición 1.9.- Sean f y g dos funciones definidas y holomorfas en un disco $B(z_0, \delta)$ tales que f tiene un cero de orden p en z_0 y g tiene un cero de orden q en z_0. Entonces la función f/g tiene una singularidad aislada en el punto z_0 y se verifica:

i) La singularidad es evitable si, y sólo si, $p \geq q$. En este caso f/g tiene un cero de orden $p - q$ en z_0.
ii) La singularidad es polar si, y sólo si, $p < q$. En este caso f/g tiene un polo de orden $q - p$ en z_0.

Proposición 1.10.- Sean f y g dos funciones holomorfas en $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ tales que f tiene un polo de orden p en z_0 y g tiene un polo de orden q en z_0. Entonces la función f/g tiene una singularidad aislada en el punto z_0 y se verifica:

i) La singularidad es evitable si, y sólo si, $p \leq q$. En este caso f/g tiene un cero de orden $q - p$ en z_0.
ii) La singularidad es polar si, y sólo si, $p > q$. En este caso f/g tiene un polo de orden $p - q$ en z_0.

§ 2 SERIES DE LAURENT.

Definición 2.1.- Si r y R son dos números reales con $0 < r < R$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, el conjunto dado por

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} = B(z_0, R) \setminus \overline{B}(z_0, r)$$

se denomina *corona* (*abierta*) centrada en z_0 de radios r y R. El concepto de corona se generaliza admitiendo la posibilidad de que $r = 0$ ó $R = \infty$. Concretamente:

En el caso particular de que $r = 0$ y $R \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} = B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ se representa por $B'(z_0, R)$ y se denomina *disco punteado* de centro z_0 y radio R.

Si $R = \infty$, la corona centrada en z_0 y de radios r e ∞ es $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0|\}$, el complementario de la bola cerrada $\overline{B}(z_0, r)$ si $r > 0$, ó $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ si $r = 0$.

Lema 2.2.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Se supone que $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 \le r < R \le \infty$ son tales que la corona $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ está contenida en U. Sean además ϱ_1, ϱ_2 tales que $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ y Γ_1, Γ_2 las circunferencias centradas en z_0 y de radios ϱ_1 y ϱ_2, respectivamente, orientadas ambas en sentido positivo. Entonces, para cada z con $\varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2$ se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,.$$

Teorema 2.4.- (*Desarrollos de Laurent*)

Sea f una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$ que contiene a la corona $C = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$. Entonces existen:

i) una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ que converge absolutamente en $B(z_0, R)$ y

ii) una serie de potencias negativas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \dfrac{1}{(z - z_0)^n}$ que converge absolutamente en $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r)$,

tales que, para cada $z \in C$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n}\,. \tag{1}$$

Los coeficientes de estas series vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varrho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varrho} f(w)\, (w - z_0)^{n-1}\, dw\,,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

siendo Γ_ϱ cualquier circunferencia centrada en z_0 y de radio ϱ, $r < \varrho < R$, orientada positivamente.

Observaciones 2.5.-

i) La expresión (1) se denomina *desarrollo en serie de Laurent* de f en la corona C; la primera serie es la *parte regular* del desarrollo y la segunda la *parte residual* o *singular*. Las expresiones (2) muestran que el desarollo en serie de Laurent es único.

ii) Es usual denotar, para $n \ge 1$, $b_n = a_{-n}$ y así la expresión (1) se escribe de forma más compacta $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, y las fórmulas dadas en (2) se resumen en una:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varrho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

iii) En las condiciones del teorema f es representable en serie de Laurent en la mayor corona centrada en z_0 y contenida en U.

Teorema 2.6.- (*Clasificación de singularidades*)

Sean f una función holomorfa en un disco punteado $B'(z_0, R)$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \dfrac{1}{(z - z_0)^n}$ su desarrollo de Laurent en $B'(z_0, R)$. Entonces:

i) z_0 es una singularidad evitable de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo es nula, es decir, si $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) z_0 es un polo de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo es una suma finita, es decir, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_m \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > m$. En este caso m es el orden del polo.

iii) z_0 es una singularidad esencial de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo tiene infinitos términos no nulos.

Observación 2.7.- A la hora de calcular desarrollos de Laurent de fracciones racionales resultan de utilidad los desarrollos de Taylor de la suma geométrica y sus derivadas,

$$f(w) = \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n\,; \qquad f^{k)}(w) = \frac{k!}{(1-w)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)\, w^n\,, \quad k \geq 1\,.$$

Si $z_0 \neq r_j$, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-r_j)^m} &= \frac{1}{\big((z-z_0)-(r_j-z_0)\big)^m} = \frac{(-1)^m}{(r_j-z_0)^m}\, \frac{1}{\big(1-{(z-z_0)}/{(r_j-z_0)}\big)^m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(r_j-z_0)^m}\, \frac{(n+m-1)\cdots(n+1)}{(m-1)!}\, \frac{(z-z_0)^n}{(r_j-z_0)^n}\,, \end{aligned}$$

que no es otra cosa que el desarrollo de Taylor de dicha función, válido en el disco $B(z_0, |r_j - z_0|)$, puesto que esta serie converge para $|w| = {|z-z_0|}/{|r_j-z_0|} < 1$. También se puede considerar el desarrollo en la corona $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > |r_j - z_0|\}$, en este caso se escribe

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-r_j)^m} &= \frac{1}{\big((z-z_0)-(r_j-z_0)\big)^m} = \frac{1}{(z-z_0)^m}\, \frac{1}{\big(1-{(r_j-z_0)}/{(z-z_0)}\big)^m} \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)\cdots(n+1)}{(m-1)!}\, \frac{(r_j-z_0)^n}{(z-z_0)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)\cdots(n+1)}{(m-1)!}\, (r_j-z_0)^n\, \frac{1}{(z-z_0)^{n+m}}\,, \end{aligned}$$

siendo ésta una serie en potencias negativas de $(z-z_0)$ que converge para $|w| = {|r_j-z_0|}/{|z-z_0|} < 1$.

§ 3 RESIDUOS.

Definición 3.1.- Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \frac{1}{(z-z_0)^n}$ el desarrollo de Laurent de una función holomorfa f en un disco punteado $B'(z_0, R)$. El número b_1 se denomina *residuo* de f en z_0 y se denota por $\operatorname{Res}(f, z_0)$.

Proposición 3.3.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$ que tiene una singularidad de tipo evitable en el punto z_0. Entonces $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$.

Corolario 3.4.- Sean f y g dos funciones holomorfas en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que tienen un cero del mismo orden en z_0. Entonces $\operatorname{Res}\big({f}/{g}, z_0\big) = 0$. Lo mismo sucede si el orden del cero de f en z_0 es superior al del cero de g.

Corolario 3.5.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f, g dos funciones holomorfas en $U \setminus \{z_0\}$ que tienen un polo del mismo orden en z_0. Entonces $\operatorname{Res}\big({f}/{g}, z_0\big) = 0$. Lo mismo se puede decir si el orden del polo de g en z_0 es superior al del polo de f.

Proposición 3.7.- Sea g una función holomorfa en un disco $B(z_0, r)$ con $g(z_0) \neq 0$. Si $m \in \mathbb{N}$, la función f definida en el disco punteado $B'(z_0, r)$ por $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ tiene un polo de orden m en el punto z_0 y

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{m-1)}(z_0)}{(m-1)!}\,.$$

Proposición 3.9.- Sean f y g funciones holomorfas en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f no se anula en z_0 y g tiene un cero simple en z_0, es decir, $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces ${f}/{g}$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}\,.$$

Proposición 3.10.- Sean f y g dos funciones holomorfas en un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f tiene un cero de orden m en z_0 y g tiene un cero de orden $m+1$ en z_0. Entonces ${f}/{g}$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = (m+1)\, \frac{f^{m)}(z_0)}{g^{m+1)}(z_0)}\,.$$

Proposición 3.11.- Sean f y g funciones holomorfas en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f no se anula en z_0 y g tiene un cero doble en z_0, es decir, $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ y $g''(z_0) \neq 0$. Entonces $f/_g$ tiene un polo doble en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = 2\,\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} - \frac{2}{3}\,\frac{f(z_0)\,g'''(z_0)}{\big[g''(z_0)\big]^2}\,.$$

Proposición 3.12.- Sean f y g funciones holomorfas en un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f tiene un cero simple en z_0 y g tiene un cero de orden 3 en z_0, es decir, $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = g'(z_0) = g''(z_0) = 0$ y $g'''(z_0) \neq 0$. Entonces $f/_g$ tiene un polo doble en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = 3\,\frac{f''(z_0)}{g'''(z_0)} - \frac{3}{2}\,\frac{f'(z_0)\,g^{4)}(z_0)}{\big[g'''(z_0)\big]^2}\,.$$

Proposición 3.13.- Sean f y g funciones holomorfas en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f no se anula en z_0 y g tiene un cero de orden m en z_0, es decir,

$$f(z_0) \neq 0\,, \qquad g(z_0) = g'(z_0) = \ldots = g^{m-1)} = 0 \quad \text{y} \quad g^{m)}(z_0) \neq 0\,.$$

Entonces $f/_g$ tiene un polo de orden m en z_0 y su residuo viene dado por

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = \left[\frac{m!}{g^{m)}(z_0)}\right]^m \begin{vmatrix} \dfrac{g^{m)}(z_0)}{m!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(z_0) \\ \dfrac{g^{m+1)}(z_0)}{(m+1)!} & \dfrac{g^{m)}(z_0)}{m!} & 0 & \cdots & 0 & f'(z_0) \\ \dfrac{g^{m+2)}(z_0)}{(m+2)!} & \dfrac{g^{m+1)}(z_0)}{(m+1)!} & \dfrac{g^{m)}(z_0)}{m!} & \cdots & 0 & \dfrac{f''(z_0)}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{g^{2m-2)}(z_0)}{(2\,m-2)!} & \dfrac{g^{2m-3)}(z_0)}{(2\,m-3)!} & \dfrac{g^{2m-4)}(z_0)}{(2\,m-4)!} & \cdots & \dfrac{g^{m)}(z_0)}{m!} & \dfrac{f^{m-2)}(z_0)}{(m-2)!} \\ \dfrac{g^{2m-1)}(z_0)}{(2\,m-1)!} & \dfrac{g^{2m-2)}(z_0)}{(2\,m-2)!} & \dfrac{g^{2m-3)}(z_0)}{(2\,m-3)!} & \cdots & \dfrac{g^{m+1)}(z_0)}{(m+1)!} & \dfrac{f^{m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \end{vmatrix}$$

§ 4 TEOREMA DE LOS RESIDUOS. APLICACIONES.

Teorema 4.1.- (*Teorema de los residuos*)
Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función definida y holomorfa en U salvo quizá en una familia de puntos que son todos ellos singularidades aisladas de f. Supongamos que D es un dominio de Jordan con $D \cup \partial D \subset U$ y tal que ninguna de las singularidades de f está en la curva $\Gamma = \partial D$. Entonces, si $z_1, z_2, \ldots, z_m$ son las singularidades de f en el interior de D, se tiene que

$$\oint_\Gamma f(w)\,dw = 2\,\pi\,i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_j)\,,$$

cuando en Γ se considera la orientación natural inducida por D.

4.3.- Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

4.3.1.- Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano superior

$$\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}\,,$$

y f una función definida y holomorfa en U excepto para un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en el eje real. Si existen constantes $M, R > 0$ y $p > 1$ tales que en Π^+ se tiene que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p} \quad \text{si } |z| \geq R\,, \tag{3}$$

entonces f es integrable en $\mathbb{R}$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(f, a)\,.$$

4.3.2.- Si se verifican las condiciones de 4.3.1 sustituyendo Π^+ por el semiplano inferior

$$\Pi^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \leq 0\},$$

entonces f es integrable en $\mathbb{R}$ y su integral viene dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(f, b).$$

Observaciones 4.4.-

ii) Las funciones racionales $f = {}^{P}/_{Q}$, donde P y Q son polinomios tales que $\operatorname{grado}(Q) \geq \operatorname{grado}(P) + 2$ y Q no tiene ceros en la recta real, verifican la condición (3) en ambos semiplanos, concretamente, el exponente p es en este caso $p = \operatorname{grado}(Q) - \operatorname{grado}(P) \geq 2 > 1$.

4.5.- Lema de Jordan.

Sea f una función holomorfa en un disco punteado $B'(z_0, r)$ y tal que en el punto z_0 tiene un polo simple. Para cada ε con $0 < \varepsilon < r$, sea $\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon$ un arco de circunferencia de centro z_0, ángulo fijo α y radio ε, orientado en sentido antihorario. Entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon} f(z)\,dz = \alpha\,i\,\operatorname{Res}(f, z_0).$$

4.7.- Valor Principal de Cauchy.

Definición.- Sea f una función definida y continua en $\mathbb{R}$ excepto en un número finito de puntos $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Si f es integrable en $(-\infty, x_1 - \varepsilon)$ y $(x_n + \varepsilon, \infty)$ para todo $\varepsilon > 0$ (o simplemente, si las correspondientes integrales impropias convergen) y existe y es finito el límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{x_1 - \varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2 - \varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n - \varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx \right),$$

entonces dicho límite se denomina *valor principal de Cauchy* de la integral de f en $\mathbb{R}$ (o, simplemente, valor principal de Cauchy de f en $\mathbb{R}$) y se denota $VP \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

4.7.1.- Sean U un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano Π^+ y f una función holomorfa en U excepto en un número finito de singularidades aisladas. Sean $x_1, \ldots, x_m$ las posibles singularidades de f en el eje real y supongamos que todas ellas son polos simples. Si se verifica además la condición (3), entonces existe el valor principal de Cauchy de f en $\mathbb{R}$ y se tiene que

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(f, a) + \pi\,i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, x_j).$$

4.7.2.- Si se sustituye Π^+ por Π^-, y se verifican las restantes condiciones, entonces

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\,\pi i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(f, b) - \pi\,i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, x_j).$$

4.9.- Transformadas de Fourier: $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx}$.

Dada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y un número real ω, si la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$ es convergente, su valor se denomina *transformada de Fourier* de f en el punto ω y se denota por $\widehat{f}(\omega)$.

4.9.1.- Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano Π^+ y f una función definida y holomorfa en U excepto para un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en el eje real. Supongamos también que existen constantes M, $R > 0$ tales que en Π^+ se tiene que

$$|f(z)| \leq {}^{M}/_{|z|} \qquad \text{si } |z| \geq R. \tag{4}$$

Entonces, para cada $\omega < 0$ existe $\widehat{f}(\omega)$ y

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = 2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), a).$$

4.9.2.- Si las condiciones anteriores se verifican sustituyendo Π^+ por el semiplano inferior Π^-, entonces existe $\widehat{f}(\omega)$ para cada $\omega > 0$ y

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = -2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), b).$$

Observaciones 4.10.-

ii) Las funciones racionales $f = {}^{P}/_{Q}$, donde P y Q son polinomios tales que grado$(Q) >$ grado(P) y Q no tiene ceros en la recta real, verifican la condición (4) en ambos semiplanos.

iii) En realidad, se puede sustituir la condición (4) por esta otra más débil: $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. $(4')$

4.11.- Valor Principal de Cauchy de transformadas de Fourier.

4.11.1.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano superior Π^+ y f una función definida y holomorfa en U, excepto para un número finito de singularidades aisladas. Sean $x_1, \ldots, x_m$ las posibles singularidades en el eje real y supongamos que todas son polos simples. Si se verifica la condición (4), entonces, para cada $\omega < 0$ existe el valor principal de Cauchy de $e^{-i\omega x} f(x)$ y

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, f(x)\, dx = 2\,\pi\, i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), a) + \pi\, i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), x_j)\,.$$

4.11.2.- Si se sustituye Π^+ por Π^- y se verifican en este semiplano las mismas condiciones, entonces, para cada $\omega > 0$ existe el valor principal de Cauchy de $e^{-i\omega x} f(x)$ y se tiene que

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, f(x)\, dx = -2\,\pi\, i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), b) - \pi\, i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(e^{-i\omega z} f(z), x_j)\,.$$

4.13.- Integrales racionales trigonométricas.

Sea $R(x, y)$ una función racional en las dos variables (x, y) cuyo denominador no se anula en la circunferencia unidad $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Entonces

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)\big)\, d\theta \;=\; 2\,\pi\, i \sum_{|a|<1} \operatorname{Res}(f, a)\,,$$

donde la función f se define por

$$f(z) = \frac{1}{i\, z}\, R\left(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2\, i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\right).$$

4.15.- Transformadas de Mellin: $\int_0^\infty \boldsymbol{x^{\alpha-1} f(x)\, dx}$

Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$, excepto para un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en la semirrecta real positiva $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Sea $\alpha > 0$ un número real no entero y supongamos que:

i) Existen constantes $M_1,\, R_1 > 0$ y $\beta > \alpha$ tales que

$$|f(z)| \le \frac{M_1}{|z|^\beta} \quad \text{si } |z| \ge R_1\,;$$

ii) Existen constantes $M_2,\, R_2 > 0$ y $0 < \delta < \alpha$ tales que

$$|f(z)| \le \frac{M_2}{|z|^\delta} \quad \text{si } 0 < |z| \le R_2\,.$$

Entonces la integral impropia $\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\, dx$ es absolutamente convergente y su valor, denominado *transformada de Mellin* de f en α, es igual a

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\, dx = \frac{-\pi\, e^{-i\,\alpha\,\pi}}{\operatorname{sen}(\alpha\,\pi)} \sum_{\substack{b\neq 0\\ b \text{ sing. de } f}} \operatorname{Res}\big(z^{\alpha-1} f(z), b\big)\,,$$

donde $z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\log_c(z)}$ se define usando la rama del logaritmo correspondiente a $c = 0$, esto es,

$$0 < \arg(z) < 2\,\pi\,.$$

Observación 4.16.- Las condiciones anteriores se cumplen si $f = {}^{P}/_{Q}$, donde P y Q son polinomios de grados p y q respectivamente, tales que Q no tiene ceros en $\mathbb{R}^+$ y verifican:

i) $0 < \alpha < q - p = \beta$.

ii) Si n_Q es el orden del cero de Q en $z_0 = 0$ ($n_Q = 0$ si $Q(0) \neq 0$) y n_P es el orden del cero de P en $z_0 = 0$, entonces $n_Q - n_P < \alpha$.

TEMA X — ANÁLISIS DE FOURIER

§ 1 SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES.

Definición 1.1.- Sea X un conjunto no vacío. Se denotan por $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ y $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ los espacios vectoriales de las funciones de X en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente. Una *sucesión de funciones reales* (resp. *complejas*) en X es una sucesión de elementos de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ (resp. de $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$). La notación y terminología general de sucesiones se aplica igualmente en este caso, así que la forma usual de denotar una sucesión de funciones es $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 1.2.- Se dice que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones reales o complejas en X está *puntualmente acotada* si la sucesión numérica $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada para cada $x \in X$. Análogamente se definen las sucesiones de funciones reales puntualmente acotadas superior o inferiormente.

Se dice que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones reales o complejas en X está *uniformemente acotada* o *totalmente acotada* si existe una constante $M \geq 0$ tal que $\big|f_n(x)\big| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.5.- Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en el conjunto X. Se dice que la sucesión es *puntualmente convergente* si para cada $x \in X$ la sucesión numérica $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es puntualmente convergente, la función f definida en X por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, se denomina *límite puntual* de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 1.6.- Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en el conjunto X. Se dice que la sucesión es *uniformemente convergente* si existe una función f en X verificando la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para todo número natural $n \geq n_0$ se tiene que $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$ para cada $x \in X$".

Definición 1.13.- Una *serie de funciones* (reales o complejas) en un conjunto no vacío X es un par ordenado de sucesiones de funciones en X, $\left(\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, donde $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j$, $n = 1, 2, \ldots$ Al igual que en el caso de series numéricas la función f_n se denomina *término n-ésimo* de la serie y la función S_n *suma parcial n-ésima* de la serie de funciones. También en este caso la serie se representa de forma abreviada por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definición 1.14.- Se dice que una serie de funciones $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ en un conjunto X es *puntualmente convergente* si la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sumas parciales de la misma es puntualmente convergente en X.

Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ es puntualmente convergente en X, la función f definida en X por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ se denomina *función suma* de la serie y se denota por $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Definición 1.16.- Dada una serie de funciones $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ en un conjunto X, si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ es puntualmente convergente en X se dice que la serie original es *absolutamente convergente* en X.

Definición 1.17.- Sean X un conjunto no vacío y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones en X. Se dice que la serie es *uniformemente convergente* en X si la sucesión de sumas parciales de la misma es uniformemente convergente.

Definición 1.19.- Sean X un conjunto no vacío y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones en X. Se dice que la serie *converge normalmente* en X si existe una serie convergente de números reales positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\big|f_n(x)\big| \leq m_n$ para cada $x \in X$.

Teorema 1.20.- (*Criterio de Weierstrass*). Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones en el conjunto X. Si la serie converge normalmente en X, entonces converge absolutamente en cada punto de X y uniformemente en X.

Teorema 1.24.- (*Continuidad del límite puntual*). Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $x_0 \in A$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente en A hacia la función f. Si f_n es continua en x_0 para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua en x_0.

En consecuencia, si f_n es continua en A para cada $n \in \mathbb{N}$, la función límite f es continua en A.

Corolario 1.25.- (*Continuidad de la función suma*). Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $x_0 \in A$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones que converge uniformemente en A. Si f_n es continua en x_0 para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la suma de la serie es una función continua en x_0.

En consecuencia, si f_n es continua en A para todo $n \in \mathbb{N}$, la función suma es continua en A.

Teorema 1.26.- (*Derivabilidad del límite puntual*). Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones derivables en I. Se supone que:

i) La sucesión de derivadas $\{f_n{}'\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los subintervalos compactos de I hacia la función g.

ii) Existe un $x_0 \in I$ tal que la sucesión numérica $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Entonces la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de I hacia una función f que es derivable en I. Además, $f'(x) = g(x)$ para cada $x \in I$.

Corolario 1.28.- (*Derivabilidad de la función suma*). Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones derivables en I. Se supone que:

i) La serie de las derivadas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n{}'$ converge uniformemente en los subintervalos compactos de I.

ii) Existe un $x_0 \in I$ tal que la serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ es convergente.

Entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en los compactos de I. Además, $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\Big)'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$ para cada $x \in I$.

Teorema 1.29.- (*Integrabilidad del límite puntual*). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables Riemann en el intervalo $[a,b]$, que converge uniformemente en $[a,b]$ hacia una función f. Entonces:

i) f es integrable en $[a,b]$.

ii) Si se consideran las funciones definidas en $[a,b]$ por $F(x) = \int_a^x f$; $F_n(x) = \int_a^x f_n$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a,b]$ hacia la función F. En particular, $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

Corolario 1.30.- (*Integrabilidad de la función suma*). Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones integrables en el intervalo $[a,b]$, que converge uniformemente en $[a,b]$. Entonces:

i) La función suma es integrable en $[a,b]$.

ii) Si se consideran en $[a,b]$ las funciones $F(x) = \displaystyle\int_a^x \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)$; $F_n(x) = \displaystyle\int_a^x \Big(\sum_{j=1}^{n} f_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^x f_j$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión de funciones $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a,b]$ hacia la función F. En particular, $\displaystyle\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$.

Corolario 1.31.- Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones integrables en el intervalo $[a,b]$, que converge normalmente en $[a,b]$. Entonces la función suma es integrable en $[a,b]$ y $\displaystyle\Big|\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)\Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |f_n|$.

Teorema 1.32.- (*de la aproximación polinomial de Weierstrass*). Sean K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y f una función continua en K. Existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en K hacia f. En particular, dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio P tal que $\big|f(x) - P(x)\big| < \varepsilon$ para cada $x \in K$.

Teorema 1.33.- (*de la aproximación trigonométrica*). Sea f una función compleja definida y continua en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y tal que $f(-\pi) = f(\pi)$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una función

$$P(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \Big(a_k \cos(k\,t) + b_k \operatorname{sen}(k\,t)\Big),$$

donde $m \in \mathbb{N}$ y $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ dependen de ε, y tal que $\big|f(t) - P(t)\big| < \varepsilon$ para cada $t \in [-\pi,\pi]$.

§ 2 SERIES TRIGONOMÉTRICAS.

Definición 2.1.- Por *serie trigonométrica* se entiende toda serie funcional del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\,x) + b_k \operatorname{sen}(k\,x) \Big) \,, \tag{1}$$

donde a_0 es un número complejo y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sendas sucesiones de números complejos; estos números se denominan *coeficientes* de la serie.

Observaciones 2.2.-

i) Las sumas parciales de una serie trigonométrica son polinomios trigonométricos que se pueden reescribir en términos de la exponencial compleja, así que es usual representar también la serie (1) por

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{i\,k\,x} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\, e^{-i\,k\,x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\,k\,x} \,, \tag{2}$$

donde $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{(a_k - i\,b_k)}{2}$ y $c_{-k} = \frac{(a_k + i\,b_k)}{2}$, $k \geq 1$; o dicho de otra forma, $a_k = c_k + c_{-k}$ para $k \geq 0$, y $b_k = i\,(c_k - c_{-k})$ si $k \geq 1$. La expresión (2) se denomina *forma compleja* de la serie trigonométrica (1). Los conceptos de convergencia, convergencia uniforme, etc. se trasladan a las series dadas en forma compleja (2) en términos de los ya conocidos para series funcionales generales.

ii) Si la serie trigonométrica (1) (resp. (2)) converge uniformemente, entonces su suma define una función f continua en $\mathbb{R}$ y periódica de periodo $2\,\pi$; además, es fácil comprobar que

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \,, \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(k\,x)\, dx \qquad \text{y} \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \operatorname{sen}(k\,x)\, dx \,, \quad k \in \mathbb{N} , \tag{3}$$

o lo que es lo mismo,

$$c_k = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \,, \quad k \in \mathbb{Z} \,. \tag{4}$$

Definición 2.3.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función acotada, periódica de periodo $2\,\pi$ e integrable en el sentido de Riemann en cada intervalo compacto de la recta. Se define la *serie de Fourier de* f como la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\,x) + b_k \operatorname{sen}(k\,x) \Big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\,k\,x} \,,$$

cuyos coeficientes vienen dados por las expresiones (3) y (4), respectivamente. El número c_k recibe el nombre de *k-ésimo coeficiente de Fourier de f* y se denota también por $\widehat{f}(k)$. Si $n \in \mathbb{N}$, el polinomio trigonométrico

$$s_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(k\,x) + b_k \operatorname{sen}(k\,x) \Big) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{i\,k\,x}$$

se denomina *polinomio n-ésimo de Fourier* de la función f.

Observaciones 2.4.-

i) Para funciones de periodo $2\,\pi$, las integrales que aparecen en (3) y (4) extendidas al intervalo $[-\pi, \pi]$ se pueden considerar en cualquier otro intervalo de amplitud $2\,\pi$ sin alterar su valor.

ii) Al conjunto de las funciones complejas definidas en $\mathbb{R}$, periódicas de periodo $2\,\pi$, acotadas e integrables en el sentido de Riemann en los intervalos compactos lo denotaremos por $\mathcal{R}(\mathbb{T})$.

Teorema 2.5.- Sea f una función de $\mathcal{R}(\mathbb{T})$, continua en todo $\mathbb{R}$, y tal que su serie de Fourier converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Entonces la suma de la serie de Fourier coincide con f .

Lema 2.6.- (*de Riemann-Lebesgue*). Si $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, entonces $\lim_{n\to\infty} \widehat{f}(n) = \lim_{n\to-\infty} \widehat{f}(n) = 0$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(n\,t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(n\,t)\, dt = 0 \,.$$

Proposición 2.7.- Sea $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en todo $\mathbb{R}$. Entonces su serie de Fourier converge uniformemente hacia f en $\mathbb{R}$. Lo mismo se puede decir si f es dos veces derivable y su derivada segunda es integrable en $[-\pi, \pi]$.

Notación: Dada una función f definida en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}$, denotaremos por $f(a^+)$ y $f(a^-)$ el valor de los límites $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$, respectivamente, si existen. Nótese que estos límites existen y son finitos si f es monótona en un entorno compacto de a, $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.

Corolario 2.14.- (*Criterio de Jordan*)

Sea $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ monótona en un intervalo $[a,b]$. Si $x \in (a,b)$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f)(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\,.$$

Si además f es continua en (a,b), la serie de Fourier de f converge uniformemente hacia f en cada subintervalo compacto $J \subset (a,b)$.

Lema 2.15.- Sea f una función acotada en un intervalo $[a,b]$. Se supone que f tiene un número finito de discontinuidades en dicho intervalo y que f presenta un número finito de extremos relativos en $[a,b]$. Entonces, existen dos funciones g_1, g_2 acotadas y monótonas crecientes en $[a,b]$ tales que $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$, $x \in [a,b]$. En esta situación es aplicable el lema de Jordan a f en $[a,b]$.

Notación: Dado un intervalo I de $\mathbb{R}$, al conjunto de las funciones $f\colon I \to \mathbb{C}$ cuya integral impropia es absolutamente convergente lo denotaremos por $\mathcal{L}^1(I)$; por $\mathcal{L}^2(I)$ denotaremos al espacio de las funciones complejas f definidas en I, localmente integrables y tales que $|f|^2$ es integrable en I.

Lema 2.21.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f,g\colon I \to \mathbb{C}$ para las que tienen sentido las integrales impropias en el intervalo I. Entonces se tiene que

$$\Big(\int_I |f(t)\,g(t)|\,dt\Big)^2 \le \int_I |f(t)|^2\,dt \int_I |g(t)|^2\,dt \qquad (\textit{desigualdad de Schwarz})\,.$$

En particular, si las funciones $|f|^2$ y $|g|^2$ son integrables en I, también lo es $f\,g$.

Corolario 2.22.- Sean I un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ y $f\colon I \to \mathbb{C}$ localmente integrable. Si $|f|^2$ es integrable en I, entonces también es integrable f.

Si denotamos por $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ el conjunto de funciones de $\mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$ y tales que $f(-\pi) = f(\pi)$, y definimos análogamente $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, el corolario anterior muestra que $\mathcal{R}(\mathbb{T}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{T}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.

Observación 2.23.- Para funciones $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ tiene perfecto sentido considerar la serie de Fourier asociada ($|f(x)\,e^{i\,k\,x}| = |f(x)|$). Se usan en este caso las mismas notación y terminología y se verifican todos los resultados expuestos anteriormente con la única salvedad de que las integrales consideradas son en sentido impropio.

Teorema 2.24.- Si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, entonces $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x) - s_n(f)(x)\big|^2\,dx = 0$, y se verifica la *Identidad de Parseval*:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{2}\,,$$

siendo a_n, b_n los coeficientes de la serie de Fourier de f escrita en la forma (1).

Teorema 2.25.- Si $f,g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, entonces $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)}\,.$

Observación 2.26.- El tratamiento de funciones g periódicas de periodo $2\,T$, con $T \ne \pi$, se realiza en los mismos términos considerando funciones f del tipo tratado, asociadas mediante la relación $f(x) = g\big({}^{Tx}/_{\pi}\big)$. Si la serie de Fourier de f viene dada por la expresión (1), entonces se asocia a g la serie (de Fourier $2T$-periódica)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \cos\Big(\frac{k\,\pi}{T}\,x\Big) + b_k \operatorname{sen}\Big(\frac{k\,\pi}{T}\,x\Big)\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp\Big(i\,\frac{k\,\pi}{T}\,x\Big)\,,$$

deduciéndose del teorema del cambio de variable que

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g(x)\,\cos\Big(\frac{k\,\pi}{T}\,x\Big)\,dx\,, \quad k \ge 0\,; \qquad b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g(x)\,\operatorname{sen}\Big(\frac{k\,\pi}{T}\,x\Big)\,dx\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

$$c_k = \frac{1}{2\,T}\int_{-T}^{T} g(x)\,\exp\Big(-\,i\,\frac{k\,\pi}{T}\,x\Big)\,dx\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Propiedad 2.27.- Sean f una función de $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ y $a_0/2+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(k\,x)+b_k\,\mathrm{sen}(k\,x)\big)$ su serie de Fourier.

i) Si f es par ($f(x)=f(-x)$, $x\in\mathbb{R}$), entonces

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\cos(k\,x)\,dx\,,\quad k\geq 0\,,\qquad \text{y}\qquad b_k=0\,,\quad k\in\mathbb{N}\,.$$

ii) Si f es impar ($-f(x)=f(-x)$, $x\in\mathbb{R}$), entonces

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(k\,x)\,dx\,,\quad k\in\mathbb{N}\,,\qquad \text{y}\qquad a_k=0\,,\quad k\geq 0\,.$$

§ 3 TRANSFORMACIÓN DE FOURIER EN $\mathbb{R}$.

En lo que sigue denotaremos por $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ al conjunto de las funciones complejas f definidas en $\mathbb{R}$ e integrables, es decir, para las que la integral impropia correspondiente en $\mathbb{R}$ es absolutamente convergente.

Definición 3.1.- Para una función $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ se define su *transformada de Fourier*, denotada por $\widehat{f}$ o $\mathcal{F}(f)$, como la función $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dada por

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,t}\,f(t)\,dt=\int_{\mathbb{R}}\exp(-i\,\omega\,t)\,f(t)\,dt\,.$$

Propiedades 3.3.- Sean $f,g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Se verifican:

i) $|\widehat{f}(\omega)|\leq\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,dt$ para cada $\omega\in\mathbb{R}$, es decir, la transformada de Fourier de una función integrable es una función acotada.

ii) Si $a,b\in\mathbb{C}$, $\mathcal{F}(a\,f+b\,g)=a\,\mathcal{F}(f)+b\,\mathcal{F}(g)$, es decir, la transformación de Fourier es lineal.

iii) Si $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$, y $g(t)=f\big(t/\lambda\big)$ para cada $t\in\mathbb{R}$, entonces $\widehat{g}(\omega)=|\lambda|\,\widehat{f}(\lambda\,\omega)$.

iv) Si $g(t)=f(-t)$ para cada $t\in\mathbb{R}$, entonces $\widehat{g}(\omega)=\widehat{f}(-\omega)$.

v) Si $g(t)=\overline{f(t)}$ para cada $t\in\mathbb{R}$, entonces $\widehat{g}(\omega)=\overline{\widehat{f}(-\omega)}$.

vi) Si $t_0\in\mathbb{R}$ y $g(t)=f(t-t_0)$ para cada $t\in\mathbb{R}$, entonces $\widehat{g}(\omega)=\widehat{f}(\omega)\,e^{-i\,t_0\,\omega}$.

vii) Si $\omega_0\in\mathbb{R}$ y $g(t)=f(t)\,e^{i\,\omega_0\,t}$ para cada $t\in\mathbb{R}$, entonces $\widehat{g}(\omega)=\widehat{f}(\omega-\omega_0)$.

Teorema 3.4.- Si f es una función de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier $\widehat{f}$ es una función continua en $\mathbb{R}$, es más, de hecho $\widehat{f}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Teorema 3.5.- Sea $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tal que la función $g(t)=-i\,t\,f(t)$ es también integrable en $\mathbb{R}$. Entonces $\widehat{f}$ es diferenciable y $\widehat{f}\,'(\omega)=\widehat{g}(\omega)$.

Teorema 3.6.- (*de Riemann-Lebesgue*)

Si $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, entonces $\lim\limits_{\omega\to\infty}\widehat{f}(\omega)=\lim\limits_{\omega\to-\infty}\widehat{f}(\omega)=0$.

Notación: Por $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ denotaremos el conjunto de las funciones complejas definidas y continuas en $\mathbb{R}$ que tienen límite 0 en $-\infty$ y en ∞. De lo anterior se deduce que si $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f}\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Definición 3.7.- Sean f una función integrable y g una función integrable o acotada en $\mathbb{R}$. Se define la *convolución* de f y g, denotada $g*f$, por

$$(g*f)(x)=\int_{\mathbb{R}} g(x-t)\,f(t)\,dt\,,$$

en aquellos puntos x para los que la integral tenga sentido.

Propiedades 3.9.- Sean $f,g,h\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Se verifican:

i) $f*g=g*f$.

ii) $f*(g*h)=(f*g)*h$.

iii) Si $a,b\in\mathbb{C}$, $f*(a\,g+b\,h)=a\,(f*g)+b\,(f*h)$.

Proposición 3.10.- Sean f, g dos funciones integrables en $\mathbb{R}$ y supongamos que $g*f$ es también integrable. Se verifica que $\widehat{g*f} = \widehat{g}\,\widehat{f}$.

Definición 3.15.- Sea $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Se define su *transformada inversa de Fourier*, denotada $\mathcal{F}^{-1}(g)$, como la función definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ por

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,x}\, g(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\,\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp(i\,\omega\,x)\, g(\omega)\, d\omega\,.$$

Observación 3.16.- Si $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{F}(g)(x) = 2\,\pi\,\mathcal{F}^{-1}(g)(-x)$.

Teorema 3.17.- (*Fórmula de inversión en* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$). Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tal que también $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Si f es monótona en un entorno $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ del punto x (o si se verifican en dicho entorno las hipótesis de 2.15), entonces

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\,)(x) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\,\omega\,x}\,\widehat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

En particular, si además f es continua en el punto x, se tiene que

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\,)(x) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\,\omega\,x}\,\widehat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Observación 3.18.- Con las mismas hipótesis del teorema anterior, la última igualdad se escribe de forma equivalente como

$$\mathcal{F}(\widehat{f}\,)(-x) = 2\,\pi\,\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\,)(x) = 2\,\pi\, f(x)\,.$$

Teorema 3.19.- (*de Plancherel*). Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Entonces $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\,\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|^2\, d\omega\,.$$

Más aún, si f y g son dos funciones de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\, dt = \frac{1}{2\,\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\,\overline{\widehat{g}(\omega)}\, d\omega\,.$$

Teorema 3.20.- (*Fórmula de inversión en* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$). Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y supongamos que también $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Si f es monótona en un entorno $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ del punto x, entonces

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\,\pi}\int_{-A}^{A} e^{i\,\omega\,x}\,\widehat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Observación 3.21.- Obviamente, con las hipótesis del teorema anterior, si además f es continua en el punto x, se tiene que

$$f(x) = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\,\pi}\int_{-A}^{A} e^{i\,\omega\,x}\,\widehat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Teorema 3.22.- Sea f una función compleja definida en $\mathbb{R}$ tal que tanto f como $\widehat{f}$ pertenecen a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Entonces, si $T>0$, para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\,n\,T) = \frac{1}{2\,T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\Big(n\,\frac{\pi}{T}\Big)\ \exp\Big(i\,n\,\frac{\pi}{T}\,x\Big)\,,$$

y como consecuencia se deduce la *fórmula de sumación de Poisson*:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\,n\,T) = \frac{1}{2\,T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\Big(n\,\frac{\pi}{T}\Big)\,.$$