Universidad de Valladolid
E.T.S. de Ingenieros
de Telecomunicación.

FORMULARIO DE
CÁLCULO

1^{er} Curso de
Ingeniero de Telecomunicación

TEMA 1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

§1 GENERALIDADES SOBRE CONJUNTOS.

1.1.- Conjuntos. Su representación.-

Si x es un elemento del conjunto X se dice que *x pertenece a X* y se denota por '$x \in X$'. Si, por el contrario, x no es un elemento de X se escribe '$x \notin X$'.

Dos conjuntos X e Y son *iguales* si, y sólo si, tienen los mismos elementos, en cuyo caso se escribe '$X = Y$'. En caso contrario se escribe '$X \neq Y$'.

Lo habitual es determinar un conjunto mediante una propiedad que verifiquen sus elementos y sólo ellos; la expresión matemática típica para representar un conjunto por este procedimiento es $X = \{x : x \text{ verifica } \mathcal{P}\}$ o $X = \{x \,/\, x \text{ verifica } \mathcal{P}\}$, donde $\mathcal{P}$ es la mencionada propiedad que caracteriza a los elementos de X (los signos ':' y '/' se leen 'tal que').

1.2.- Índices.-

Sucede en ocasiones que todos los elementos de un conjunto X se asocian de forma biunívoca con los de otro conjunto I, y para determinar un elemento $x \in X$ se hace referencia al único elemento $i \in I$ asociado con él; en este caso dicho elemento se escribe 'x_i', los elementos de I se denominan *índices* (el conjunto I se denomina, por tanto, *conjunto de índices*), se dice que X está *indizado* por I y se denota por $X = \{x_i : i \in I\}$ o $X = \{x_i\}_{i \in I}$. Otra notación similar a la anterior para elementos indizados es 'x^i'; para diferenciar ambos casos es habitual referirse a *subíndices* y *superíndices*, respectivamente.

1.3.- Subconjuntos.-

Dados dos conjuntos X e Y, si cada elemento de Y es también un elemento de X se dice que *Y está contenido en X*, o que *X contiene a Y*, o que *Y es un subconjunto de X*, y se denota por '$Y \subset X$' o '$X \supset Y$'. Una notación similar es '$Y \subseteq X$' o '$X \supseteq Y$', utilizada para indicar la posibilidad de que el conjunto Y sea igual al conjunto X.

1.4.- Unión de conjuntos.-

Dados dos conjuntos X e Y se define su *unión*, denotada por '$X \cup Y$', como el conjunto de los elementos que pertenecen, al menos, a uno de ellos: $X \cup Y = \{x : x \in X \text{ o } x \in Y\}$.

En general, dada una colección de conjuntos $\{X_i : i \in I\}$, se define la unión de todos ellos, denotada por '$\bigcup_{i \in I} X_i$', como el conjunto de los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos X_i:

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x : x \in X_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

1.4.1.- $X \cup \emptyset = X$ para todo conjunto X.
1.4.2.- Si X e Y son conjuntos tales que $Y \subset X$, entonces $X \cup Y = X$.
1.4.3.- *Propiedad conmutativa*: Para cada par de conjuntos X e Y se tiene que $X \cup Y = Y \cup X$.
1.4.4.- *Propiedad asociativa*: Dados tres conjuntos X, Y y Z, se tiene que $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$.
1.4.5.- Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos, entonces para cada $j \in I$ se tiene que $X_j \subset \bigcup_{i \in I} X_i$.

1.5.- Intersección de conjuntos.-

Dados dos conjuntos X e Y se define su *intersección*, denotada por '$X \cap Y$', como el conjunto de los elementos que pertenecen a ambos: $X \cap Y = \{x : x \in X \text{ y } x \in Y\}$.

En general, dada una colección de conjuntos $\{X_i : i \in I\}$, se define la intersección de todos ellos, denotada por '$\bigcap_{i \in I} X_i$', como el conjunto de los elementos que pertenecen a todos y cada uno de los conjuntos X_i:

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x : x \in X_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Si dos conjuntos X e Y no tienen elementos en común, i.e. $X \cap Y = \emptyset$, se dice que son *disjuntos entre sí*.

1.5.1.- $X \cap \emptyset = \emptyset$ para todo conjunto X.
1.5.2.- Si X e Y son conjuntos tales que $Y \subset X$, entonces $X \cap Y = Y$.
1.5.3.- *Propiedad conmutativa*: Para cada par de conjuntos X e Y se tiene que $X \cap Y = Y \cap X$.
1.5.4.- *Propiedad asociativa*: Dados tres conjuntos X, Y y Z, se tiene que $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.
1.5.5.- Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos, entonces para cada $j \in I$ se tiene que $\bigcap_{i \in I} X_i \subset X_j$.

1.5.6.- *Propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión*:

Dados conjuntos X, Y y Z, se tiene que $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$, y, en general, dada una familia de conjuntos $\{X_i : i \in I\}$, se verifica que $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \cap Y = \bigcup_{i\in I}(X_i \cap Y)$.

1.5.7.- *Propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección*:

Dados conjuntos X, Y y Z, se tiene que $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$, y, en general, dada una familia de conjuntos $\{X_i : i \in I\}$, se verifica que $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \cup Y = \bigcap_{i\in I}(X_i \cup Y)$.

1.6.- Diferencia de conjuntos.-

Dados dos conjuntos X e Y se define su *diferencia*, denotada por '$X \backslash Y$', como el conjunto de los elementos que pertenecen a X y no pertenecen a Y:

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ y } x \notin Y\} = \{x \in X : x \notin Y\}.$$

1.6.1.- $X \setminus \emptyset = X$ y $X \setminus X = \emptyset$ para todo conjunto X.

1.6.2.- Si X e Y son conjuntos tales que $X \subset Y$, entonces $X \setminus Y = \emptyset$.

1.6.3.- $X \setminus Y \subset X$ para cada par de conjuntos X e Y.

1.6.4.- $(X \setminus Y) \cap Y = \emptyset$ para cada par de conjuntos X e Y.

1.6.5.- $(X \setminus Y) \cup (X \cap Y) = X$ para cada par de conjuntos X e Y; además, esta unión es disjunta, es decir, $(X \setminus Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$.

1.6.6.- Dados conjuntos X, Y, Z, se tiene que $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$, y, en general, dados un conjunto X y una familia de conjuntos $\{Z_i : i \in I\}$ se tiene que $X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} Z_i\right) = \bigcap_{i\in I}(X \setminus Z_i)$.

1.6.7.- Dados conjuntos X, Y, Z, se tiene que $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$, y, en general, dados un conjunto X y una familia de conjuntos $\{Z_i : i \in I\}$ se tiene que $X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} Z_i\right) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus Z_i)$.

En la práctica, a la hora de trabajar con una cierta clase de conjuntos, es usual que todos ellos estén contenidos en uno fijo $\mathcal{U}$, que se denomina *conjunto universal*. En estas condiciones, cuando no hay lugar a confusión, para cada conjunto $X \subset \mathcal{U}$ la diferencia $\mathcal{U} \setminus X$ se denomina *complementario de X en $\mathcal{U}$* o simplemente *complementario de X*, y se suele denotar por 'X^c'.

1.7.- Producto cartesiano de conjuntos.-

Dados dos conjuntos no vacíos X e Y, se define un nuevo conjunto, denominado *producto cartesiano de X e Y*, denotado por '$X \times Y$', y cuyos elementos son todos los pares ordenados de la forma '(x, y)' donde x es un elemento de X e y es un elemento de Y: $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$.

Si $X = \emptyset$ o $Y = \emptyset$ entonces $X \times Y = \emptyset$.

De forma análoga se define el producto cartesiano $X \times Y \times Z$ de tres conjuntos X, Y, Z, cuyos elementos son ternas (x, y, z), etc.

El orden de los factores es crucial a la hora de definir un producto cartesiano: si $X \neq Y$ no es lo mismo $X \times Y$ que $Y \times X$. A esto hace referencia la locución "par ordenado" de la definición.

1.8.- Relaciones en un Conjunto. Conjuntos Ordenados.

Definición 1.8.1.- Sea A un conjunto no vacío. Una *relación* en A es un subconjunto $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times A$. Si $a, b \in A$ se dice que *a está relacionado con b* (por la relación $\mathcal{R}$) si el par (a, b) pertenece a $\mathcal{R}$ y se escribe $a\mathcal{R}b$.

Definición 1.8.4.- Una relación en un conjunto A se dice de *orden* si verifica las propiedades:

i) Propiedad Reflexiva: $a\mathcal{R}a$ para cada $a \in A$.

ii') Propiedad Antisimétrica: Si $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$ entonces $a = b$.

iii) Propiedad Transitiva: Si $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ entonces $a\mathcal{R}c$.

La relación de orden se dice *total* si dados cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que o bien $a\mathcal{R}b$ o $b\mathcal{R}a$.

Definición 1.8.5.- Se llama *conjunto ordenado* a todo conjunto no vacío dotado de una relación de orden. Si la relación de orden es total se dice que el conjunto está *totalmente ordenado*.

Notación: Para una relación de orden es habitual escribir $a \leq b$ o $b \geq a$ en lugar de $a\mathcal{R}b$. Si $a, b \in A$ y se tiene $a \leq b$ y $a \neq b$ se escribe $a < b$ ó $b > a$.

Definición 1.8.6.- Sea A un conjunto ordenado y $B \subset A$, $B \neq \emptyset$. Se dice que $\beta \in A$ es *cota superior* (resp. *cota inferior*) de B si $b \leq \beta$ (resp. $\beta \leq b$) para cada $b \in B$.

Si $B \subset A$ tiene una cota superior (resp. inferior) se dice que B está *acotado superiormente* (resp. *acotado inferiormente*). Si el conjunto B está acotado superior e inferiormente se dice *acotado*.

Supongamos que la relación de orden en A es total. Se dice que un subconjunto B acotado superiormente (resp. inferiormente) tiene *extremo superior* o *supremo* (resp. *extremo inferior* o *ínfimo*) si existe una cota superior (resp. inferior) β, el extremo superior (resp. inferior), que verifica la siguiente propiedad:

"Si γ es otra cota superior (resp. inferior) se tiene: $\beta \le \gamma$ (resp. $\gamma \le \beta$)".

Proposición 1.8.7.- Los extremos superior e inferior de un subconjunto B de un conjunto totalmente ordenado, si existen, son únicos.

Notación: Los extremos superior e inferior de un conjunto no vacío B se denotan, respectivamente, por: $\sup B$ o $\overline{\text{ext}}B$, y $\inf B$ o $\underline{\text{ext}}B$. Si el extremo superior (resp. inferior) de un conjunto B pertenece al mismo, se denomina *máximo* (resp. *mínimo*) de B y se denota por '$\max B$' (resp. '$\min B$').

1.9.- Aplicaciones entre Conjuntos.

Definición 1.9.1.- Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una *correspondencia* de A en B es un subconjunto $\mathcal{C}$ del producto cartesiano $A{\times}B$. Si el par (a,b), $a \in A$, $b \in B$ pertenece a $\mathcal{C}$ se dice que b *está en correspondencia* con a o que b *es imagen* de a por $\mathcal{C}$.

Una correspondencia de A en B se dice que es *aplicación* si además verifica la siguiente propiedad: "Para cada $a \in A$ existe un, y sólo un, $b \in B$ tal que $(a,b) \in \mathcal{C}$".

Habitualmente una aplicación de A en B se representa por $f\colon A \to B$ y se denota por $b = f(a)$ el único $b \in B$ que es imagen de a.

Definición 1.9.2.- Una aplicación $f\colon A \to B$ se dice *inyectiva* si verifica la siguiente propiedad: "Si $a, a' \in A$ y $f(a) = f(a')$ entonces $a = a'$".

Una aplicación $f\colon A \to B$ se dice *suprayectiva* si verifica la siguiente propiedad: "Si $b \in B$ existe al menos un $a \in A$ tal que $b = f(a)$".

Una aplicación $f\colon A \to B$ se dice *biyectiva* si es simultáneamente inyectiva y suprayectiva.

Observación 1.9.3.- Si $f\colon A \to B$ es una biyección entre A y B y $\mathcal{C}$ es la correspondencia que la define, entonces la correspondencia $\mathcal{C}^{-1}$ de B en A definida por $(b,a) \in \mathcal{C}^{-1}$ si, y sólo si, $(a,b) \in \mathcal{C}$, es también una aplicación que se denomina *aplicación inversa* de f y se denota por $f^{-1}\colon B \to A$.

Definición 1.9.4.- Sean A y B conjuntos no vacíos y $f\colon A \to B$ una aplicación.

Si $S \subset A$ el conjunto $\{f(a) \in B : a \in S\} = \{b \in B : \text{ existe } a \in S \text{ con } b = f(a)\}$ se denota por $f(S)$ y se denomina *imagen directa* por f del conjunto S.

Si $T \subset B$ el conjunto $f^{-1}(T) = \{a \in A : f(a) \in T\}$ se denomina *imagen recíproca* por f del conjunto T.

Definición 1.9.5.- Sean A, B, C conjuntos no vacíos y $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ aplicaciones. Se define la aplicación $g{\circ}f\colon A \to C$ como sigue: "Si $a \in A$ y $b = f(a)$, $c = g(b)$ entonces $g{\circ}f(a) := c$". Esta aplicación se denomina *aplicación compuesta de f con g*.

Proposición 1.9.6.- Sean A, B, C conjuntos no vacíos y $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ aplicaciones.

i) Si f y g son inyectivas entonces $g{\circ}f$ es inyectiva.
ii) Si f y g son suprayectivas entonces $g{\circ}f$ es suprayectiva.
iii) Si $S \subset A$ entonces $g{\circ}f(S) = g\big(f(S)\big)$.
iv) Si $T \subset C$ entonces $(g{\circ}f)^{-1}(T) = f^{-1}\big(g^{-1}(T)\big)$.

1.10.- Operaciones.

Definición 1.10.1.- Sea A un conjunto no vacío. Una *operación* o *ley de composición interna* en A es una aplicación $*\colon A{\times}A \to A$.

Si $a, b \in A$ se denota habitualmente por $a * b$ a la imagen de (a,b).

La operación se dice *asociativa* si para cualesquiera $a, b, c \in A$ se tiene que $a * (b * c) = (a * b) * c$.

La operación se dice *conmutativa* si para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que $a * b = b * a$.

Se dice que la operación tiene *elemento neutro* si existe $e \in A$ (el elemento neutro) tal que para cada $a \in A$ se tiene que $a * e = e * a = a$.

Si $a \in A$ se dice que $b \in A$ es el *elemento simétrico* de a respecto de la operación $*$ si $a * b = b * a = e$.

Si $*, \top$ son dos operaciones en el conjunto A se dice que $\top$ es *distributiva* respecto de $*$ si para cualesquiera $a, b, c \in A$ se verifica $a\top(b * c) = (a\top b) * (a\top c)$ y $(b * c)\top a = (b\top a) * (c\top a)$.

Notación: Cuando la operación es aditiva '$+$' se suele denotar por 0 al elemento neutro. Se llama *elemento opuesto* de a al elemento simétrico de a y se denota $-a$.

Si la operación es multiplicativa '$\times$' se suele abreviar $a \times b = a\,b$, el elemento neutro se denomina *elemento unidad* y se suele denotar por 1. El elemento simétrico de a se denomina habitualmente *elemento inverso* y se denota por a^{-1} o ${}^{1}\!/_{a}$.

§ 2 NÚMEROS NATURALES. PRINCIPIO DE INDUCCIÓN.

Es familiar el llamado *Conjunto de los Números Naturales*, que se denota por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, dotado de la relación de orden total habitual según la cual $1 < 2 < 3 < 4, \ldots,$ y de las operaciones suma y producto conocidas. Sus elementos se denominan *números naturales*. Recordemos que la suma y el producto tienen las propiedades *conmutativa* y *asociativa*, y que el producto tiene la *propiedad distributiva* respecto de la suma.

Principio de Inducción 2.2.-
Sea $\mathcal{P}$ una proposición enunciada para los números naturales. Denotemos por $\mathcal{P}(n)$ a la proposición relativa a $n \in \mathbb{N}$. Se supone que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

i) $\mathcal{P}(n_0)$ es cierta.

ii) Si $m \geq n_0$ y $\mathcal{P}(m)$ es cierta entonces $\mathcal{P}(m+1)$ es cierta.

Entonces $\mathcal{P}(n)$ es cierta para cada $n \geq n_0$.
En particular si $n_0 = 1$ resulta que $\mathcal{P}(n)$ es cierta para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.3.- Un conjunto A se dice *finito* o que tiene *cardinal finito* si es vacío o existe una biyección $f\colon A \to J_n$, donde J_n denota el conjunto $J_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$. En este último caso se dice que A tiene cardinal n o que tiene n elementos.

Un conjunto se dice *infinito* o que tiene *cardinal infinito* si no es finito.

§ 3 LA RECTA REAL.

Para subsanar las deficiencias de la aritmética en $\mathbb{N}$ se amplía a un conjunto más grande, con operaciones y relación de orden que, restringidas a $\mathbb{N}$, coinciden con las ya definidas. Éste es el denominado *Conjunto de los Números Enteros*, denotado por $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Sus elementos son los *números enteros*.

Los números enteros carecen (excepto 1 y -1) de elemento inverso para el producto. El *Conjunto de los Números Racionales*, que se representa por $\mathbb{Q}$, amplia este conjunto resolviendo esta carencia y manteniendo las operaciones y la relación de orden. Los elementos de $\mathbb{Q}$ son los *números racionales*.

Los números racionales se representan mediante *fracciones* p/n, $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que dos fracciones p_1/n_1 y p_2/n_2 representan el mismo número racional si, y sólo si, $p_1 n_2 = p_2 n_1$, además

$$\frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2} = \frac{p_1 n_2 + p_2 n_1}{n_1 n_2}; \qquad \frac{p_1}{n_1}\frac{p_2}{n_2} = \frac{p_1 p_2}{n_1 n_2}.$$

Aunque las operaciones dadas en $\mathbb{Q}$ gozan de buenas propiedades, el conjunto resulta ser "incompleto" (p.e. no existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$). El concepto de número real surge de la necesidad de salvar esta incompletitud.

Definición 3.2.- Se llama *Recta Real*, o *Conjunto de los Números Reales*, a todo conjunto no vacío, $\mathbb{R}$, provisto de dos operaciones, "+" y "·" denominadas suma y producto respectivamente, y una relación de orden "$\leq$"que cumplen los siguientes axiomas:

- $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo conmutativo.
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo.
- El producto es distributivo respecto de la suma.
- La relación de orden es total y compatible con la estructura algebraica: si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$, y si además $0 \leq z$ entonces $x \cdot z \leq y \cdot z$.
- **Completitud**: Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y acotado superiormente tiene extremo superior.

Observación 3.3.- Partiendo de la identificación del elemento neutro y del elemento unidad de $\mathbb{Q}$ con los correspondientes de $\mathbb{R}$, se puede considerar $\mathbb{Q}$ como un subconjunto de $\mathbb{R}$, de modo que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Definición 3.4.- Los elementos de $\mathbb{R}$ se denominan *números reales*. Un número real x se dice *positivo* si $x > 0$ y se dice *negativo* si $x < 0$.

Propiedades 3.5.- En lo que sigue w, x, y, z serán números reales.

3.5.1.- Si $x + z = y + z$ entonces $x = y$ (*Ley de cancelación de la suma*).

3.5.2.- Si $x \cdot z = y \cdot z$ y $z \neq 0$ entonces $x = y$ (*Ley de cancelación del producto*).

3.5.3.- $x \cdot 0 = 0$.

3.5.4.- $-(-x) = x$.

3.5.5.- Si $x \neq 0$ entonces $(x^{-1})^{-1} = x$.

3.5.6.- $(-1) \cdot x = -x$.

3.5.7.- $x\cdot(-y) = -(x\cdot y) = (-x)\cdot y$.
3.5.8.- $(-x)+(-y) = -(x+y)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$.
3.5.9.- $(-x)\cdot(-y) = x\cdot y$.
3.5.10.- Si $z \neq 0$ y $w \neq 0$ entonces $\dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{w} = \dfrac{x\cdot w + y\cdot z}{z\cdot w}$.
3.5.11.- Si $x \leq y$ e $y < z$ entonces $x < z$.
3.5.12.- Si $x < y$ e $y \leq z$ entonces $x < z$.
3.5.13.- Si $x + z < y + z$ entonces $x < y$.
3.5.14.- Si $x < y$ entonces $x + z < y + z$.
3.5.15.- Si $x \leq y$ y $z \leq w$ entonces $x + z \leq y + w$.
3.5.16.- Si $x \leq y$ y $z < w$ entonces $x + z < y + w$.
3.5.17.- $x > 0$ si, y sólo si, $-x < 0$.
3.5.18.- Si $x < y$ entonces $-x > -y$.
3.5.19.- Si $x < y$ y $z > 0$ entonces $x\cdot z < y\cdot z$.
3.5.20.- Si $x < y$ y $z < 0$ entonces $x\cdot z > y\cdot z$.
3.5.21.- Si $x \neq 0$ entonces $x^2 = x\cdot x > 0$.
3.5.22.- $1 > 0$ y $-1 < 0$.
3.5.23.- Si $x > 0$ entonces $1/x > 0$.
3.5.24.- Si $0 < x < y$ entonces $0 < 1/y < 1/x$.
3.5.25.- Todo subconjunto de la recta real no vacío y acotado inferiormente tiene extremo inferior.

Propiedad Arquimediana 3.6.- Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, existe entonces un número natural n tal que $y < n\,x$. En particular (tomando $y = 1$) para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n tal que $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Parte Entera de un número real 3.7.- Si $x \in \mathbb{R}$ existe un único $m \in \mathbb{Z}$, que verifica $m \leq x < m + 1$. Dicho número entero se denomina *parte entera* de x y se denota $[x]$.

Propiedad de Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ 3.8.- Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Existe entonces un número racional r tal que $x < r < y$.
Por tanto, entre dos números reales distintos existen infinitos números racionales.

3.9.- Números Irracionales:
Existen números reales que no son racionales, es decir, $\mathbb{R}$ es realmente una extensión propia de $\mathbb{Q}$ (por ejemplo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$):

Definición 3.9.2.- El conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (que es no vacío en virtud del resultado precedente) se denomina *Conjunto de los Números Irracionales* y se denota por $\mathbb{I}$.

Densidad de los números irracionales 3.9.3.- Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Existe un número irracional γ tal que $x < \gamma < y$. Por tanto, entre dos números reales distintos existen infinitos números irracionales.

Observación 3.9.4.- El resultado anterior, junto con la propiedad de densidad de los racionales en $\mathbb{R}$, muestra que en cualquier intervalo de la recta real existen infinitos números racionales, e infinitos números irracionales.

Definición 3.10.- Si $x \in \mathbb{R}$ se define el *valor absoluto* de x y se denota por $|x|$ al número real

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propiedades 3.11.- Sean $x, y, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Se verifican
i) $|x| \geq 0$. Además $|x| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
ii) $-|x| \leq x \leq |x|$.
iii) $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$.
iv) Si $x \neq 0$ entonces $\left|1/x\right| = 1/|x|$.
v) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Desigualdad Triangular*).
vi) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.
vii) $|x| < \varepsilon$ si, y sólo si, $-\varepsilon < x < \varepsilon$.
viii) $|x - y| < \varepsilon$ si, y sólo si, $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$.

Proposición 3.12.- Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. A es acotado si, y sólo si, existe $M \geq 0$ tal que $|x| \leq M$ para cada $x \in A$.

Definición 3.13.- Se dice que un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un *intervalo* si verifica la siguiente propiedad: "Si $x, y \in I$, con $x < y$, entonces para cada $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$ se tiene que $z \in I$".

Observación 3.14.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se llama *intervalo de extremos a y b* a cualquiera de los conjuntos siguientes: $(a,b) = \{c \in \mathbb{R} : a < c < b\}$, $[a,b) = \{c \in \mathbb{R} : a \leq c < b\}$, $(a,b] = \{c \in \mathbb{R} : a < c \leq b\}$, $[a,b] = \{c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b\}$ (respectivamente, *intervalo abierto, semiabierto por la derecha, semiabierto por la izquierda, cerrado*). Cada intervalo de extremos a,b es un conjunto acotado, y a y b son los extremos inferior y superior, respectivamente, de dicho conjunto. Los conjuntos unipuntuales $\{x\}$ son intervalos *reducidos a un punto*. También son intervalos los conjuntos no acotados de la forma $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$, siendo $a \in \mathbb{R}$, así como la recta real, representada por $(-\infty, \infty)$; todos ellos se denominan de forma genérica *intervalos no acotados*. El símbolo '∞' se lee *infinito*.

3.15.- Sumas y productos: Es común el uso de una notación abreviada que pasamos a describir:

- Si $\{a_i : i \in I\}$ es un conjunto o familia finita de números reales, su suma se representa por '$\sum\limits_{i \in I} a_i$', y se lee 'suma o *sumatorio* de a_i cuando $i \in I$'. Cuando $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ se escribe también $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ o $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. También puede suceder que los elementos a sumar sean los que verifiquen una cierta propiedad $\mathcal{P}$, en cuyo caso su suma se representa por '$\sum\limits_{a \text{ verifica } \mathcal{P}} a$'.
- De manera análoga, el producto de los elementos $\{a_i : i \in I\}$ se representa por '$\prod\limits_{i \in I} a_i$'. El producto de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se escribe también $\prod_{i=1}^{n} a_i$ o $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$ o $a_1\, a_2 \cdots a_n$. Como en el caso de sumas, la expresión '$\prod\limits_{a \text{ verifica } \mathcal{P}} a$' denota el producto de los elementos que verifican la propiedad $\mathcal{P}$.

3.16.- Factoriales. Números combinatorios

Para un número entero no negativo n se define su *factorial*, denotado por '$n!$' mediante la fórmula recurrente $0! = 1$; $n! = n\,(n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, o lo que es lo mismo,

$$0! = 1; \qquad n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si k y n son números enteros, con $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$, se define el número combinatorio denominado *n sobre k* y denotado por '$\binom{n}{k}$' o 'C_n^k' como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\; k!}.$$

En realidad los números combinatorios son números naturales y verifican

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \; 0 \leq k \leq n, \qquad \text{y} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \; 1 \leq k \leq n.$$

3.16.1.- Fórmula binomial de Newton: Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

3.17.- Sumas notables: Si $n \in \mathbb{N}$ se verifica que:

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, $r \neq 1$. **ii)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$. **iii)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

3.18.- Desigualdades notables:

i) $(1+p)^n > 1 + n\,p$, si $p > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$, si $n \in \mathbb{N}$.

3.19.- Máximos y mínimos: Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2} \qquad \text{y} \qquad \min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

TEMA 2 SUCESIONES NUMÉRICAS

§ 1 DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA.

Definición 1.1.- Sea X un conjunto no vacío. Una *sucesión de elementos de* X es una aplicación del conjunto de los números naturales en X, esto es, $n \in \mathbb{N} \mapsto \sigma(n) \in X$.

Habitualmente una sucesión se representa de forma más compacta por el símbolo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $x_n = \sigma(n)$; x_n se denomina *término n-ésimo* de la sucesión. El conjunto imagen de la aplicación σ, es decir $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, se denomina *conjunto de términos* o *rango* de la sucesión.

A partir de ahora todas las sucesiones consideradas son de números reales ($X = \mathbb{R}$).

Definición 1.2.- Una sucesión se dice *acotada inferiormente*, *acotada superiormente*, o *acotada* si así lo es el conjunto de sus términos.

Definición 1.3.- Una sucesión se dice *monótona creciente* (resp. *decreciente*) si $x_n \leq x_{n+1}$, (resp. $x_n \geq x_{n+1}$) para cada $n \in \mathbb{N}$. Si la desigualdad es estricta la sucesión se dice *estrictamente monótona.*

Proposición 1.4.- Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente (resp. decreciente) está acotada inferiormente (resp. superiormente).

Definición 1.5.- Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión. Una *subsucesión* de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la composición de una sucesión estrictamente creciente de números naturales con la sucesión dada, $k \in \mathbb{N} \mapsto n_k \in \mathbb{N} \mapsto x_{n_k}$, con $n_{k+1} > n_k$. Una subsucesión vendrá representada, por tanto, como $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

§ 2 CONVERGENCIA.

Definición 2.1.- Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Se dice que la sucesión es *convergente* si existe un número real x verificando la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para cada número natural $n \geq n_0$ se tiene que $|x_n - x| < \varepsilon$, o equivalentemente $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$".

El número x se denomina *límite* de la sucesión, y se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge hacia* x.

Proposición 2.2.- Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente su límite es único.

Notación: Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia x se escribe $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Proposición 2.3.- Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente está acotada.

Proposición 2.4.- Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, entonces es convergente si, y sólo si, es acotada. Además su límite es:

i) $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si es creciente. **ii)** $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si es decreciente.

Proposición 2.5.- Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia x, toda subsucesión suya es convergente hacia el mismo límite x.

Corolario 2.6.- Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene dos subsucesiones que convergen hacia distintos límites, o bien tiene una subsucesión que no converge, entonces no puede ser convergente.

Teorema 2.7.- Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada existe $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, subsucesión de la anterior, que es convergente.

§ 3 LÍMITES INFINITOS.

Definición 3.1.- Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Se dice que la sucesión *tiende a* $+\infty$ (resp. *tiende a* $-\infty$) o que *tiene límite* $+\infty$ (resp. $-\infty$) si verifica la siguiente propiedad:

"Para cada número real $M > 0$ (resp. $N < 0$) existe un número natural n_0 (que depende de M (resp. de N)) tal que para cada número natural $n \geq n_0$ se tiene que $x_n > M$ (resp. $x_n < N$)".

Notación: Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) se escribe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty).$$

Proposición 3.2.- Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ monótona creciente (resp. decreciente) y no acotada tiene límite $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Proposición 3.3.- Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no acotada superiormente (resp. inferiormente) tiene una subsucesión que tiende a $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Criterio de Stolz 3.4.- Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales. Se supone que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, de términos no nulos, es estrictamente creciente y tiende a $+\infty$.

Si la sucesión $\left\{\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite (finito o infinito) L, entonces la sucesión $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite y éste es precisamente L.

Observación 3.5.- (2ª versión del criterio de Stolz)

El mismo resultado se obtiene si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ decrece estrictamente hacia 0 y la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

§4 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

4.1.- Sucesiones Convergentes.

4.1.1.- El carácter de una sucesión de números reales no se altera si se modifican o suprimen en ella un número finito de términos, es decir, la sucesión resultante tiende hacia el mismo límite (finito o infinito) que la original, o no tiene límite si la primera tampoco lo tiene.

4.1.2.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0, entonces la sucesión $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

4.1.3.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real a, entonces la sucesión $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $|a|$. *El recíproco, en general, no es cierto*; no obstante es inmediato de la definición que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 si, y sólo si, la sucesión $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

4.1.4.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un número real $a \neq 0$, entonces:
i) Si $a > 0$, para cada número real α con $0 < \alpha < a$, existe un número natural n_0 (que depende de α), tal que para cada número natural $n \geq n_0$, se tiene $\alpha < a_n$.
ii) Si $a < 0$, para cada número real α con $a < \alpha < 0$, existe un número natural n_0 (que depende de α), tal que para cada número natural $n \geq n_0$, se tiene $a_n < \alpha$.

4.1.5.- Sea β un número real. Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real a, y para cada número natural n se tiene $\beta \leq a_n$ (resp. $a_n \leq \beta$), entonces $\beta \leq a$ (resp. $a \leq \beta$).

4.1.6.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real a y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real b, entonces la sucesión $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real $a + b$.

4.1.7.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real a y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real b, entonces la sucesión $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real $a\,b$.

4.1.8.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia a y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real b, con $b \neq 0$, $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real a/b.

4.1.9.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real a, la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real b, y además $a_n \leq b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \leq b$.

4.1.10.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia a, la sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge hacia a, y $a_n \leq b_n \leq c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y su límite es a (*Criterio del Sandwich*).

4.1.11.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números estrictamente positivos y converge hacia el número real $a > 0$, entonces la sucesión $\{\log(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $\log(a)$.

4.1.12.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número real a, entonces la sucesión $\{e^{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número e^a.

4.1.13.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números estrictamente positivos y converge hacia el número real $a > 0$, y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia el número b, entonces la sucesión $\{a_n{}^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia a^b.

4.2.- Límites Infinitos.

4.2.1.- Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$), entonces está acotada inferiormente (resp. superiormente).

4.2.2.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ (resp. tiende a $-\infty$), y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que $a_n \leq b_n$ (resp. $b_n \leq a_n$) para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ (resp. tiende a $-\infty$).

4.2.3.- Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada inferiormente (resp. superiormente), entonces $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $+\infty$ (resp. tiende a $-\infty$). En particular, esto se aplica si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

4.2.4.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $\pm\infty$ y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un número real $b \neq 0$, entonces la sucesión $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $\pm\infty$ (según la regla de los signos).

4.2.5.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $\pm\infty$, la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un número real $b \neq 0$, con $b_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $\pm\infty$ (según la regla de los signos).

4.2.6.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un número real $a \neq 0$ ó tiende hacia $\pm\infty$ y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0, con $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

i) tiende hacia $\pm\infty$ (según la regla de los signos), si $b_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o si $b_n < 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

ii) no tiene límite (finito o infinito) si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos.

4.2.7.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada (en particular si es convergente) y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $\pm\infty$, con $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

4.2.8.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números reales estrictamente positivos y converge hacia 0 (resp. tiende a $+\infty$), entonces la sucesión $\{\log(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $-\infty$ (resp. tiende a $+\infty$).

4.2.9.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $-\infty$ (resp. tiende a $+\infty$), entonces la sucesión $\{e^{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 (resp. tiende a $+\infty$).

4.2.10.- Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números estrictamente positivos convergente hacia 0:

i) Si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $b > 0$ ó tiende a $+\infty$ entonces la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

ii) Si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $b < 0$ ó tiende a $-\infty$ entonces la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$.

4.2.11.- Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números estrictamente positivos que tiende hacia $+\infty$:

i) Si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $b > 0$ ó tiende a $+\infty$ entonces la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$.

ii) Si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $b < 0$ ó tiende a $-\infty$ entonces la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

4.2.12.- Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números estrictamente positivos que converge hacia a con $0 \leq a < 1$:

i) Si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $+\infty$ entonces $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

ii) Si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $-\infty$ entonces $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$.

4.2.13.- Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos que converge hacia $a > 1$, o que tiende hacia $+\infty$:

i) Si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $+\infty$ entonces la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $+\infty$.

ii) Si la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $-\infty$ entonces la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

4.3.- Indeterminaciones.

4.3.1.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $+\infty$ y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $-\infty$ nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

4.3.2.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge hacia 0, $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

4.3.3.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $\pm\infty$ nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

4.3.4.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $\pm\infty$ y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $\pm\infty$, $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

4.3.5.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números estrictamente positivos y tiende hacia $+\infty$ y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

4.3.6.- Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números estrictamente positivos y converge hacia 0, y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge hacia 0, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

4.3.7.- Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números estrictamente positivos y converge hacia 1, y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende hacia $\pm\infty$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

§ 5 SUCESIONES EQUIVALENTES.

Definición 5.1.- Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales. Se dice que la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *equivalente* a la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ si existe $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, sucesión de números reales convergente hacia 1, y un número natural n_0 tales que $y_n = c_n x_n$ para cada $n \geq n_0$. En este caso se denota $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o simplemente $y_n \sim x_n$.

Proposición 5.2.- Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales:
i) $x_n \sim x_n$. **ii)** Si $y_n \sim x_n$ entonces $x_n \sim y_n$. **iii)** Si $x_n \sim y_n$ e $y_n \sim z_n$ entonces $x_n \sim z_n$.
iv) Si $x_n \sim y_n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\, x_n \sim \alpha\, y_n$.
v) Si $x_n \neq 0$ e $y_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $x_n \sim y_n$ entonces $1/x_n \sim 1/y_n$.
vi) Si $x_n \neq 0$ e $y_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y la sucesión $\{x_n/y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 1, entonces $x_n \sim y_n$.
vii) Si $x_n \sim y_n$ y $a_n \sim b_n$ entonces $a_n x_n \sim b_n y_n$.
viii) Si $x_n \sim y_n$ ambas sucesiones tienen el mismo carácter. Además si tienen límite, es el mismo.

Observaciones 5.3.-
ii) En un producto de sucesiones, a efectos de cálculo de límites, es lícito sustituir una de las sucesiones factor por otra equivalente.
iii) La utilidad práctica de las sucesiones equivalentes radica en la resolución de indeterminaciones, es decir, en la manipulación de sucesiones que convergen hacia 0 o que tienden hacia infinito.

Proposición 5.4.- Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones equivalentes de números reales estrictamente positivos que tienen límite (finito o infinito) distinto de 1. Entonces $\log(a_n) \sim \log(b_n)$.

Infinitésimos e Infinitos equivalentes 5.5.-
5.5.1.- Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales con $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
i) Las siguientes sucesiones son equivalentes a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

1) $\{\text{sen}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **2)** $\{\text{Sh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **3)** $\{\text{tg}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **4)** $\{\text{Tgh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$
5) $\{\text{arcsen}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **6)** $\{\text{ArgSh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **7)** $\{\text{arctg}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **8)** $\{\text{ArgTgh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$
9) $\{e^{x_n} - 1\}_{n=1}^{\infty}$ **10)** $\{\log(1 + x_n)\}_{n=1}^{\infty}$

La equivalencia 10) también puede ser enunciada: "Si $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 1, $\log(y_n) \sim (y_n - 1)$".
ii) A partir de 5.5.1.i.9) y 5.5.1.i.10) se deducen:
1) Si $a > 0$, $a^{x_n} - 1 \sim \log(a)\, x_n$.
2) Si $p > 0$, $(1 + x_n)^p - 1 \sim p\, x_n$, o lo que es lo mismo $(y_n)^p - 1 \sim p\,(y_n - 1)$, si $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$.
iii) Las sucesiones $\{1 - \cos(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\text{Ch}(x_n) - 1\}_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes a la sucesión $\left\{x_n^2/2\right\}_{n=1}^{\infty}$.

5.5.2.- Sea $\mathcal{P}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ un polinomio de grado $k \geq 1$ $(a_k \neq 0)$. Entonces la sucesión $\{\mathcal{P}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $\{a_k n^k\}_{n=1}^{\infty}$.

5.5.3.- Fórmula de Stirling: La sucesión $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la sucesión $\{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\}_{n=1}^{\infty}$.

5.6.- Propiedades adicionales: Si $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $a_n \sim b_n$
i) No tiene por qué verificarse que $e^{a_n} \sim e^{b_n}$, ni $\log(a_n) \sim \log(b_n)$, ni ${a_n}^n \sim {b_n}^n$.
ii) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, entonces $e^{a_n} \sim e^{b_n}$.
iii) Si $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada, entonces $a_n^{c_n} \sim b_n^{c_n}$.

5.7.- Algunos límites:

1) $\lim_{n\to\infty} b^n = \begin{cases} \infty & \text{si } b > 1 \\ 0 & \text{si } |b| < 1 \\ \text{no existe} & \text{si } b \leq -1 \end{cases}$; **2)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$, $c > 0$; **3)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

5.8.- Órdenes de infinitud:
1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$; **2)** $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a \in \mathbb{R}$; **3)** $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, $a > 1$; **4)** $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^k} = 0$, $k > 0$.

5.9.- Consecuencias del criterio de Stolz:
i) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (finito o infinito), entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = x$.
ii) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $x_n > 0$ para cada n, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = x$.
iii) Si $x_n > 0$ para cada n y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = x$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = x$.

§ 1 DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA.

Definición 1.1.- Una *serie de números reales* es un par ordenado de sucesiones de números reales

$$(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty}), \tag{1}$$

donde $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j, \quad n = 1, 2, \ldots$

El número a_n se llama *término n-ésimo* de la serie y el número S_n se denomina *suma parcial n-ésima* de la serie. Tradicionalmente se utiliza la notación $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para representar la serie **(1)**.

Definición 1.2.- Una serie de números reales se dice *convergente* si la sucesión de sumas parciales de la misma es una sucesión convergente. En caso contrario se dice que la serie *no converge.*

Observaciones 1.3.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales y $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de sus sumas parciales.

i) Si la serie es convergente, se escribe $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$; este límite se llama *suma* de la serie (nótese que se ha denotado igual a la serie y a su suma, si es convergente; la diferencia viene dada por el contexto).

ii) Estudiar la naturaleza, o carácter de la serie, consiste en determinar su convergencia o su no convergencia.

iii) Si la serie es convergente, el problema de *sumar* la serie es encontrar la suma de la misma. Es decir, determinar el número $\lim_{n\to\infty} S_n$.

iv) En ocasiones las series se indizan a partir de un entero k en adelante, p.e.: $\sum_{p=-1}^{\infty} a_p$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=2}^{\infty} a_m$.

Condición necesaria de convergencia 1.4.- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (El recíproco es, en general, falso: es decir, existen series no convergentes cuyo término general tiende hacia 0).

§ 2 EJEMPLOS.

2.1.- Serie Geométrica: Se llama serie geométrica a una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^n$, $a \neq 0$. La serie converge si, y sólo si, su razón r tiene valor absoluto menor que 1; si $|r| < 1$ la suma de la serie es $S = \dfrac{a\, r}{1-r}$.

2.2.- Serie Aritmético-geométrica: Se llama serie aritmético-geométrica a una del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$, donde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una progresión aritmética y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una progresión geométrica. La serie converge si, y sólo si, la razón de la progresión geométrica tiene valor absoluto menor que 1.

En general, si P es un polinomio de grado $k \geq 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)\, r^n$, que se denomina *aritmético-geométrica de orden* k, converge si $|r| < 1$. El cálculo de su suma se puede efectuar mediante un método de recurrencia, concretamente: si se denota $S_k = \sum_{n=1}^{k} P(n)\, r^n$, al calcular $r\, S_k - S_k$ y pasar al límite cuando $k \to \infty$ se llega a la suma de una serie del mismo tipo pero de orden inferior.

2.3.- Serie Hipergeométrica: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales, donde $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. La serie se dice hipergeométrica si existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha n + \gamma \neq 0$ y $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$, $n \in \mathbb{N}$. La serie converge si, y sólo si, $\gamma > \alpha + \beta$, y su suma es $S = \dfrac{\gamma\, a_1}{\gamma - \alpha - \beta}$.

2.4.- Serie Telescópica: Una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de números reales se dice telescópica si es posible encontrar una sucesión $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números reales tal que $a_n = b_n - b_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. La serie converge si, y sólo si, la sucesión $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente. En este caso, la suma de la serie viene dada por $S = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - b_0$.

§ 3 PROPIEDADES DE TIPO GENERAL.

3.1.- El carácter de una serie de números reales no se altera cuando se suprimen los p primeros términos de la misma, o un número finito de ellos (la serie $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$, obtenida a partir de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suprimiendo los p primeros términos de ésta, se denomina *Resto de orden* p). Por tanto una serie converge si, y sólo si, converge uno de sus restos. En este caso, si R_p denota la suma del resto de orden p, se tiene $\lim\limits_{p\to\infty} R_p = 0$.

3.2.- El carácter de una serie de números reales no se altera cuando todos sus términos se multiplican por una constante no nula.

3.3.- Si en una serie convergente de números reales se sustituyen grupos de términos consecutivos por sus correspondientes sumas, se obtiene otra serie convergente con la misma suma.

3.4.- Existen series no convergentes de números reales tales que, al sustituir grupos de términos consecutivos por sus correspondientes sumas, se obtiene una serie convergente (p.e. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$).

3.5.- Sean $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ converge. Además

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

§ 4 SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS.

Definición 4.1.- Se dice que una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es *de términos positivos* si para cada $n \geq 1$ se tiene $a_n \geq 0$.

Propiedad fundamental 4.2.- Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Designemos por $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ a la sucesión de sumas parciales de la misma. Entonces:

i) La sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente.

ii) Si la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente, la serie converge.

iii) Si la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente, la serie no converge; de hecho diverge a $+\infty$.

Criterio de Comparación 4.3.- Sean $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos. Se supone que existe un número natural n_0, tal que $a_n \leq b_n$ para cada $n \geq n_0$. Entonces:

i) Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge, tampoco converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Corolario 4.4.- Sean $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos. Se supone que $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que existe, finito o infinito, el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$. Entonces:

4.4.1.- Si L es finito y no nulo, ambas series tienen el mismo carácter.

4.4.2.- Si $L = \infty$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ no converge, tampoco converge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

4.4.3.- Si $L = 0$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

En el resto de esta sección $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será una serie de términos positivos.

Criterio de d'Alembert o del Cociente 4.5.- Si $a_n > 0$, $n \geq 1$, y existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ (finito o infinito), la serie converge si $\lambda < 1$ y no converge si $\lambda > 1$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie.

De forma más general: Si existen $\mu < 1$ (resp. $\mu \geq 1$) y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \mu \text{ (resp. } \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \mu) \quad \text{para cada } n \geq n_0,$$

entonces la serie converge (resp. no converge).

Criterio de Raabe 4.6.- Si $a_n > 0$ para cada $n \geq 1$, y existe $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lambda$ (finito o infinito), la serie converge si $\lambda > 1$ y no converge si $\lambda < 1$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie; no obstante este resultado se puede mejorar en el sentido siguiente:

Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n\left(1 - {a_{n+1}}/{a_n}\right) \leq 1$ para cada $n \geq n_0$, entonces la serie diverge.

Criterio de la Raíz 4.7.- Si existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ (finito o infinito), la serie converge si $\lambda < 1$ y no converge si $\lambda > 1$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie.

De forma más general: Si existen $\mu < 1$ (resp. $\mu \geq 1$) y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \mu \text{ (resp. } \sqrt[n]{a_n} \geq \mu) \quad \text{para cada } n \geq n_0,$$

entonces la serie converge (resp. no converge).

Criterio de Condensación de Cauchy 4.8.- Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ tienen el mismo carácter.

Ejemplo: El criterio anterior resuelve el carácter de las series de Riemann: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ que convergen si, y sólo si, $\alpha > 1$; y de las series de Bertrand: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta}$ que convergen si, y sólo si, $\alpha > 1$ o $\alpha = 1$ y $\beta > 1$.

Criterio de Pringsheim o del Producto 4.9.- Si existe y es finito $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \lambda \neq 0$, la serie converge si $\alpha > 1$ y no converge si $\alpha \leq 1$.

Primer Criterio Logarítmico 4.10.- Si $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y existe $\lim_{n\to\infty} \frac{-\log(a_n)}{\log(n)} = \lambda$ (finito o infinito), la serie converge si $\lambda > 1$ y no converge si $\lambda < 1$.

Segundo Criterio Logarítmico 4.11.- Si $a_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y existe $\lim_{n\to\infty} \frac{-\log(n\, a_n)}{\log\big(\log(n)\big)} = \lambda$ (finito o infinito), la serie converge si $\lambda > 1$ y no converge si $\lambda < 1$.

§ 5 SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES.

Definición 5.1.- Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teorema 5.2.- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, también converge. Además

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Observaciones 5.3.- Una serie convergente pero no absolutamente convergente se denomina *condicionalmente convergente*.

§ 6 CRITERIOS DE DIRICHLET Y ABEL. SERIES ALTERNADAS.

Criterio de Abel 6.1.- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$ también converge.

Criterio de Dirichlet 6.2.- Si la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una sucesión acotada y la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y converge hacia cero, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$ converge.

Definición 6.3.- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de números reales se dice que es *alternada* si sus términos son alternativamente positivos y negativos, esto es, $a_n = (-1)^n |a_n|$ o $a_n = (-1)^{n+1} |a_n|$.

Criterio de Leibnitz 6.4.- Una serie alternada de términos decrecientes en valor absoluto es convergente si, y sólo si, el término general tiende a cero.

Observación 6.5.- Si una serie alternada de términos decrecientes en valor absoluto es convergente, la diferencia entre la suma de la serie y una de sus sumas parciales es menor que el valor absoluto del primer término de la serie que sigue a la suma parcial considerada, es decir

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - S_n \Big| \leq |a_{n+1}|\,,$$

y en particular

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big| \leq |a_1|\,.$$

§ 7 PRODUCTO DE CAUCHY DE SERIES.

Definición 7.1.- Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series de números reales. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, donde

$$c_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, b_1 + a_n\, b_0, \quad n \geq 0,$$

se llama *Producto de Cauchy* de las series dadas.

Criterio de Mertens 7.2.- Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series de números reales.

i) Si una es convergente y la otra es absolutamente convergente, el producto de Cauchy de ambas es convergente. Además, su suma es el producto de las sumas de las series factores:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

ii) Si ambas series son absolutamente convergentes, el producto de Cauchy de ambas es absolutamente convergente.

Observaciones 7.3.-

ii) El producto de Cauchy de dos series condicionalmente convergentes puede ser una serie no convergente.

Nota: Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define la *exponencial* de x por $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Del criterio de Mertens se deduce que $e^{x+y} = e^x e^y$.

TEMA 4 — FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. LÍMITES Y CONTINUIDAD

§1 NOCIONES DE TOPOLOGÍA.

Definición 1.1.- Sea x un punto de la recta real. Si ε es un número real estrictamente positivo, el *entorno (abierto) centrado en x y de radio ε* es el intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |y-x| < \varepsilon\}$.

Se dice que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es un *entorno* del punto $x \in \mathbb{R}$ si existe un entorno centrado en x, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$. En la situación anterior también se dice que el punto x es *interior* al conjunto A.

Definición 1.2.- Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es *abierto* si es vacío o si es entorno de todos sus puntos, es decir, si se verifica que: "Para cada $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ (que depende de x) tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$".

Definición 1.3.- Sea C un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. El punto x se dice *de acumulación* del conjunto C si para cada entorno V del punto x se tiene que $\big(V \setminus \{x\}\big) \cap C \neq \emptyset$, o equivalentemente si, para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que $\big((x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}\big) \cap C \neq \emptyset$.

Para indicar que x es un punto de acumulación de C se escribe $x \in C'$.

Observación 1.4.- El hecho de que el punto x sea de acumulación del conjunto C significa que en C hay puntos tan próximos a x como se quiera, pero distintos de él.

Definición 1.5.- Sea C un subconjunto de la recta real. El conjunto C se dice *cerrado* si es vacío o si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Proposición 1.6.- Un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ es cerrado si, y sólo si, su complementario, $\mathbb{R} \setminus C$, es abierto.

Proposición 1.8.- Sea B un subconjunto de $\mathbb{R}$. Un punto $x \in \mathbb{R}$ es de acumulación de B si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de B, distintos todos ellos de x, que converge hacia x.

Definición 1.9.- Un subconjunto K de la recta real se dice *compacto* si es cerrado y acotado.

§2 LÍMITES FINITOS.

Cuando una aplicación toma valores en un conjunto numérico recibe el nombre de *función*.

Definición 2.1.- Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A, y f una función definida de A en $\mathbb{R}$. Se dice que *f tiene límite (finito) cuando x tiende hacia a* si existe un número real ℓ verificando la siguiente propiedad: "Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que para cada $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$ con $x \neq a$ (o, equivalentemente, para cada $x \in A$ con $0 < |x-a| < \delta$), se tiene que $f(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ (o, equivalentemente, $|f(x)-\ell| < \varepsilon$)".

El número ℓ se denomina *límite* de la función f en a.

Proposición 2.2.- Si la función f tiene límite (finito) en a, es único. Se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Definición 2.3.- Sean A subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente y f una función definida de A en $\mathbb{R}$. Se dice que *f tiene límite (finito) cuando x tiende hacia $+\infty$* si existe un número real ℓ verificando la siguiente propiedad: "Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $M > 0$ (que depende de ε) tal que para cada $x \in A$ con $x \geq M$, se tiene que $f(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ (o, equivalentemente, $|f(x)-\ell| < \varepsilon$)".

El número ℓ se denomina *límite* de f en $+\infty$ o cuando x tiende hacia $+\infty$.

Proposición 2.4.- Si f tiene límite cuando x tiende hacia $+\infty$, es único. Se escribe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Análogamente se define el límite en $-\infty$ si A no está no acotado inferiormente, denotado $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

Definición 2.7.- Sea f una función definida en un conjunto X a valores reales. Se dice que f es *acotada* en X si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ para cada $x \in X$, o equivalentemente, si existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in X$.

Proposición 2.8.- Si f tiene límite finito en a, existe un número real $\delta > 0$ tal que f está acotada en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$. En particular, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \neq 0$, se tiene que:

i) Si $\ell > 0$, dados números reales α y β con $0 < \alpha < \ell < \beta$, existe un número real $\delta > 0$ tal que para cada $x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$ con $x \neq a$, se verifica que $\alpha < f(x) < \beta$.

ii) Si $\ell < 0$, dados números reales α y β con $\alpha < \ell < \beta < 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que para cada $x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$ con $x \neq a$, se verifica que $\alpha < f(x) < \beta$.

Proposición 2.9.- Sean f y g funciones reales definidas en un subconjunto A de $\mathbb{R}$, y sea a un punto de acumulación de A. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y g está acotada en $\big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big) \cap A$ para algún número real $\delta > 0$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0$ (lo mismo para límites en ∞ o $-\infty$).

2.11.- Límites siguiendo subespacios.

Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y $f : A \to \mathbb{R}$. Si $B \subset A$ y a es también punto de acumulación de B tiene sentido considerar la restricción de f a B, $f_{|_B}$, y el posible límite $\lim\limits_{x \to a} f_{|_B}(x)$. Este límite, si existe, se denomina *límite de la función f en el punto a siguiendo (o a través de) el subespacio B* y se denota por $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$. Análogamente se definen los límites a través de subespacios en $\pm\infty$.

Un caso particular se tiene al considerar los subconjuntos $A^+ = \{x \in A \,:\, a < x\} = A \cap (a, \infty)$ y $A^- = \{x \in A \,:\, x < a\} = A \cap (-\infty, a)$; si a es un punto de acumulación de A^+ (resp. de A^-) el límite de la función f a través de A^+ (resp. de A^-), si existe, se denomina *límite lateral por la derecha* (resp. *por la izquierda*) de f en el punto a, y se denota por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$).

Teorema 2.12.- Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de A. Son equivalentes:

i) f tiene límite ℓ en el punto a.

ii) Para cada subconjunto $B \subset A$ tal que $a \in B'$, f tiene límite en a a través de B, y éste es precisamente ℓ.

Corolario 2.13.- En las condiciones anteriores, se supone además que el punto a es de acumulación de los conjuntos A^+ y A^-. Son equivalentes:

i) f tiene límite ℓ en el punto a.

ii) Existen los dos límites laterales de f en el punto a y coinciden con ℓ.

Corolario 2.14.- (**Criterio secuencial**)

a) Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y $f : A \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

a.i) f tiene límite (finito) en a.

a.ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

Además, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, se tiene $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$ para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A convergente a a.

b) Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente y $f : A \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

b.i) f tiene límite (finito) en $+\infty$.

b.ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A con $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Además, si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $x_n \in A$ y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$, debe ser $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$.

c) Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado inferiormente y $f : A \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

c.i) f tiene límite (finito) en $-\infty$.

c.ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A con $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Además, si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $x_n \in A$ y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$, debe ser $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$.

§ 3 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES FINITOS.

Se enuncian las relativas al límite en un punto $a \in \mathbb{R}$, siendo análogas para los límites en $+\infty$ o $-\infty$. Compárese con las de sucesiones convergentes (referencias entre paréntesis, ver Tema 2). En lo que sigue, f, g y h son funciones reales definidas en un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$, y a un punto de acumulación de A.

3.1.- Si la función f tiene límite ℓ en a, entonces la función $|f|$ tiene límite $|\ell|$ en a. *El recíproco, en general, no es cierto*; no obstante, la función f tiene límite 0 en a si, y sólo si, la función $|f|$ tiene límite 0 en a. (4.1.3)

3.2.- Sea β un número real. Si la función f tiene límite ℓ en a, y para cada $x \in A$ se tiene $\beta \leq f(x)$ (resp. $f(x) \leq \beta$), entonces $\beta \leq \ell$ (resp. $\ell \leq \beta$). (4.1.5)

3.3.- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = k$, entonces $\lim\limits_{x \to a}(f+g)(x) = \ell + k$ (4.1.6), y $\lim\limits_{x \to a}(f\,g)(x) = \ell\, k$ (4.1.7). Si además $k \neq 0$ (f/g está bien definida en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$), $\lim\limits_{x \to a}(f/g)(x) = \ell/k$ (4.1.8).

3.4.- Si las funciones f y g tienen límites ℓ y k, respectivamente, en a, y además $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in A$, entonces $\ell \leq k$. (4.1.9)

3.5.- Si las funciones f y h tienen límite ℓ en a, y además $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para cada $x \in A$, entonces g tiene límite en a y vale ℓ (*Criterio del Sandwich*). (4.1.10)

3.6.- Si la función f tiene límite $\ell > 0$ en a, entonces la función $\log(f)$, que está definida (en virtud de 2.8.1) en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, tiene límite $\log(\ell)$ en a. (4.1.11)

3.7.- Si la función f tiene límite ℓ en a, entonces la función e^f tiene límite e^ℓ en a. (4.1.12)

3.8.- Si las funciones f y g tienen límites ℓ y k, respectivamente, en a, con $\ell > 0$, entonces la función f^g, que está definida en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, tiene límite ℓ^k en a. (4.1.13)

§ 4 LÍMITES INFINITOS.

Definición 4.1.- Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A, y f una función definida de A en $\mathbb{R}$. Se dice que f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a si se verifica la siguiente propiedad: "Para cada número real $K > 0$ (resp. $K < 0$) existe un número real $\delta > 0$, que depende de K, tal que para cada $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$ con $x \neq a$ (o, equivalentemente, para cada $x \in A$ con $0 < |x-a| < \delta$), se tiene que $f(x) \geq K$ (resp. $f(x) \leq K$)".

Si f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a, se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$).

Definición 4.2.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente y f una función definida de A en $\mathbb{R}$. Se dice que f tiene límite $+\infty$ (resp. $-\infty$) cuando x tiende hacia $+\infty$ si se verifica la siguiente propiedad: "Para cada número real $K > 0$ (resp. $K < 0$) existe un número real $M > 0$, que depende de K, tal que para cada $x \in A$ con $x \geq M$, se tiene que $f(x) \geq K$ (resp. $f(x) \leq K$)".

Si f tiende a ∞ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia ∞, se escribe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$).

Análogamente se definen los límites infinitos en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Corolario 4.4.- Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A, y $f : A \to \mathbb{R}$. Se supone además que el punto a es de acumulación de los conjuntos A^+ y A^-. Son equivalentes:

i) f tiende a $+\infty$ (resp. $-\infty$) en el punto a.

ii) Existen los dos límites laterales de f en el punto a y son $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Corolario 4.5.- (Criterio secuencial)

a) Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A, y $f : A \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

a.i) f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a.

a.ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A con $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$).

b) Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente y $f : A \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

b.i) f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende a $+\infty$.

b.ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞ (resp. a $-\infty$).

c) Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado inferiormente y $f : A \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

c.i) f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende a $-\infty$.

c.ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $x_n \in A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞ (resp. a $-\infty$).

§ 5 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS.

Se enuncian las relativas al límite en un punto $a \in \mathbb{R}$, siendo análogas para los límites en $+\infty$ o $-\infty$. Compárese con las de sucesiones no acotadas (referencias entre paréntesis, ver Tema 2). En lo que sigue, f, g y h son funciones reales definidas en un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$, y a un punto de acumulación de A.

5.1.- Si la función f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a y para cada $x \in A$ se tiene que $f(x) \leq g(x)$ (resp. $g(x) \leq f(x)$), entonces la función g tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$). (4.2.2)

5.2.- Si f tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a y g está acotada inferiormente (resp. superiormente) en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, entonces la función $f + g$ tiende a $+\infty$ (resp. a $-\infty$) cuando x tiende hacia a. En particular, la propiedad se verifica cuando g tiene límite (finito) en a. (4.2.3)

5.3.- Si la función f tiende a $\pm\infty$ cuando x tiende hacia a y g tiene límite finito no nulo ℓ en a, la función $f\,g$ tiende hacia $\pm\infty$ (según la regla de los signos) cuando x tiende hacia a (4.2.4), y lo mismo sucede con $f/_g$ (4.2.5), que está bien definida en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$.

5.4.- Si f tiene límite finito no nulo o tiende hacia $\pm\infty$ cuando x tiende hacia a, y la función g tiene límite 0 en a, existiendo $\delta > 0$ tal que g no se anula en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$, entonces la función $f/_g$:

i) tiende a $\pm\infty$, según la regla de los signos, si g tiene signo constante en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$. (4.2.6.i)

ii) no tiene límite (finito o infinito) si g no tiene signo constante en ningún entorno de a. (4.2.6.ii)

5.5.- Si f está acotada en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$ (en particular, si f tiene límite finito en a) y la función g tiende hacia $\pm\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función $f/_g$ tiene límite 0 en a. (4.2.7)

5.6.- Si la función f es estrictamente positiva en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$ y tiene límite 0 (resp. ∞) cuando x tiende hacia a, entonces la función $\log(f)$ tiene límite $-\infty$ (resp. ∞) en a. (4.2.8)

5.7.- Si la función f tiene límite $-\infty$ (resp. $+\infty$) cuando x tiende hacia a, entonces la función e^f tiene límite 0 (resp. $+\infty$) en a. (4.2.9)

5.8.- Se supone que f es estrictamente positiva en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, y tiene límite 0 cuando x tiende hacia a.

i) Si la función g tiene límite finito $\ell > 0$ o si tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiene límite 0 en a.

ii) Si la función g tiene límite finito $\ell < 0$ o si tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a. (4.2.10)

5.9.- Se supone que la función f tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a.

i) Si la función g tiene límite finito $\ell > 0$ o si tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a.

ii) Si la función g tiene límite finito $\ell < 0$ o si tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiene límite 0 en a. (4.2.11)

5.10.- Se supone que la función f tiene límite ℓ en el punto a, con $0 \le \ell < 1$.

i) Si la función g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiene límite 0 en a.

ii) Si la función g tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a. (4.2.12)

5.11.- Se supone que la función f tiene límite ℓ cuando x tiende hacia a, con $1 < \ell$.

i) Si la función g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a.

ii) Si la función g tiende a $-\infty$ cuando x tiende hacia a, entonces la función f^g tiene límite 0 en a. (4.2.13)

§ 6 INDETERMINACIONES.

Consideraremos funciones reales f y g definidas en un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$, y a será un punto de acumulación de A. Análogas consideraciones se tienen para límites en ∞ o $-\infty$.

6.1.- Si f tiende hacia $+\infty$ y g tiende hacia $-\infty$ cuando x tiende hacia a, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función $f + g$. Es decir, la función $f + g$ puede tener límite, tender a $\pm\infty$, o carecer de límite, en a.

6.2.- Si la función f tiene límite 0 en a y la función g también, existiendo $\delta > 0$ tal que g no se anula en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función $f/_g$.

6.3.- Si la función f tiene límite 0 y la función g tiende hacia $\pm\infty$ cuando x tiende hacia a, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función $f\,g$.

6.4.- Si la función f tiende hacia $\pm\infty$ y la función g tiende hacia $\pm\infty$ cuando x tiende hacia a, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función $f/_g$.

6.5.- Si la función f tiende hacia $+\infty$ y la función g tiene límite 0, cuando x tiende hacia a, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función f^g.

6.6.- Si las funciones f y g tienen límite 0, cuando x tiende hacia a, y f es estrictamente positiva en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función f^g.

6.7.- Si la función f tiene límite 1 y la función g tiende hacia $\pm\infty$, cuando x tiende hacia a, nada se puede asegurar, a priori, acerca del comportamiento de la función f^g.

§ 7 NOTACIÓN DE LANDAU. FUNCIONES EQUIVALENTES.

7.1.- Notación de Landau: Sean $A \subset \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y $f,\, g : A \to \mathbb{R}$.

7.1.1.- Se dice que f es una O de g en el punto a y se escribe "$f = O(g)$ en a" si existen un número $\delta > 0$ y una constante $M \geq 0$ tales que $|f(x)| \leq M\,|g(x)|$ para cada $x \in A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$.

7.1.2.- Se dice que f es una o de g en el punto a y se escribe "$f = o(g)$ en a" si existe $\delta > 0$ y una función ε definida en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ con $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ y tal que $f(x) = \varepsilon(x)\, g(x)$ para cada $x \in A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$.

Las notaciones "$f = O(g)$ en ∞" y "$f = O(g)$ en $-\infty$" se aplican en términos semejantes.

Proposición 7.3.- Sean $A \subset \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y $f,\, g,\, h$ y $k : A \to \mathbb{R}$.
ii) Si $f = o(h)$ en a y $g = o(h)$ en a, entonces $f + g = o(h)$ en a.
iii) Si $f = o(h)$ en a y $g = O(k)$ en a, entonces $f\,g = o(h\,k)$ en a.

Definición 7.4.- Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de A. Se dice que f es *equivalente* a g en a si existe un función h, definida en $A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ para algún $\delta > 0$, con $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$ y tal que, para cada $x \in A \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$ se tiene que $f(x) = h(x)\, g(x)$. En este caso se denota $f \sim_a g$.

Análogamente se define el concepto de funciones equivalentes en $+\infty$ y $-\infty$.

Proposición 7.5.- Sean $A \subset \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A, y $f,\, g,\, h,\, \varphi,\, \psi : A \to \mathbb{R}$. Se verifica:
i) $f \sim_a f$. **ii)** Si $g \sim_a f$ entonces $f \sim_a g$. **iii)** Si $f \sim_a g$ y $g \sim_a h$ entonces $f \sim_a h$.
iv) Si $f \sim_a g$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\, f \sim_a \alpha\, g$.
v) Si $f(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 0$ para cada $x \in A$, y $f \sim_a g$ entonces ${}^1\!/_f \sim_a {}^1\!/_g$.
vi) Si $f(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 0$ para cada $x \in A$, y ${}^f\!/_g$ tiene límite 1 en el punto a, entonces $f \sim_a g$.
vii) Si $f \sim_a g$ y $\varphi \sim_a \psi$ entonces $\varphi\, f \sim_a \psi\, g$.
viii) Si $f \sim_a g$ ambas funciones tienen el mismo comportamiento en el punto a, es decir, tienen límite o no en dicho punto simultáneamente. Además si tienen límite (finito o infinito) dicho límite es el mismo.

Proposición 7.7.- Sean $A \subset \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y $\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}$ estrictamente positivas, equivalentes en a y con límite (finito o infinito) distinto de 1 en a, entonces $\log(\varphi) \sim_a \log(\psi)$.

7.8.- Infinitésimos e Infinitos equivalentes.

7.8.1.- Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$ (o $a = \pm\infty$ si A no es acotado) y $f, g : A \to \mathbb{R}$ con $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 1$.
i) Las siguientes funciones son equivalentes a f en el punto a:
1) $\operatorname{sen}\big(f(x)\big)$ **2)** $\operatorname{Sh}\big(f(x)\big)$ **3)** $\operatorname{tg}\big(f(x)\big)$ **4)** $\operatorname{Tgh}\big(f(x)\big)$ **5)** $\operatorname{arcsen}\big(f(x)\big)$
6) $\operatorname{ArgSh}\big(f(x)\big)$ **7)** $\operatorname{arctg}\big(f(x)\big)$ **8)** $\operatorname{ArgTgh}\big(f(x)\big)$ **9)** $e^{f(x)} - 1$ **10)** $\log\big(1 + f(x)\big)$
El apartado 10) se enuncia también de forma equivalente: "$\log\big(g(x)\big) \sim_a (g(x) - 1)$".
ii) A partir de **7.8.1.i.9** y **7.8.1.i.10** se deducen:
1) Si $b > 0$, $b^{f(x)} - 1 \sim_a \log(b)\, f(x)$.
2) Si $p > 0$, $\big(1 + f(x)\big)^p - 1 \sim_a p\, f(x)$; $g(x)^p - 1 \sim_a p\,\big(g(x) - 1\big)$.
iii) Las funciones $1 - \cos\big(f(x)\big)$ y $\operatorname{Ch}\big(f(x)\big) - 1$ son equivalentes a la función $\dfrac{f(x)^2}{2}$ en a.

7.8.2.- Sea $\mathcal{P}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ ($a_k \neq 0$). Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \infty$, entonces $\mathcal{P}\big(h(x)\big) \sim_a a_k h(x)^k$.

Órdenes de infinitud 7.9.- Sean $b > 1$ y $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = \infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} b^{1/x}\, x^\alpha = \infty\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log(x)\, x^\alpha = 0\,.$$

§ 8 CONTINUIDAD.

Definición 8.1.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y f una función real definida en A. Si $a \in A$ se dice que f es *continua en el punto* a si se verifica la siguiente propiedad: "Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que si $x \in A$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$".

Se dice que f es *continua en* A si es continua en cada punto de A.

Teorema 8.2.- Sean $A \subset \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A y $f : A \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

i) f es continua en a.

ii) Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y es precisamente $f(a)$.

Proposición 8.4.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ y a un punto de A tal que f es continua en a.

i) Existe $\delta > 0$ tal que f es acotada en $(a-\delta, a+\delta) \cap A$.

ii) Si $f(a) \neq 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(a)$ para cada $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$.

Proposición 8.5.- Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ y f una función real definida en A que es continua en el punto a. Si $B \subset A$ y $a \in B$, entonces la función $f_{|B}$ es continua en a.

Proposición 8.6.- Sean $A \subset \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A, y f una función definida de A en $\mathbb{R}$. Se supone además que el punto a es de acumulación de los conjuntos A^+ y A^-. Son equivalentes:

i) f es continua en el punto a.

ii) Existen los dos límites laterales de f en el punto a y coinciden ambos con $f(a)$.

Proposición 8.7.- Sean $A \subset \mathbb{R}$, f una función real definida en A, y a un punto de A. Son equivalentes:

i) f es continua en a.

ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de A que converge hacia a se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Propiedades 8.8.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, a un punto de A, y f, g funciones reales definidas en A y continuas en el punto a. Se verifica:

i) $f+g$ es continua en a. **ii)** $f\,g$ es continua en a. **iii)** $|f|$ es continua en a.

iv) Si $g(a) \neq 0$, entonces ${}^1\!/_g$ (bien definida en $(a-\delta, a+\delta) \cap A$ para algún $\delta > 0$) es continua en a.

v) Si $g(a) \neq 0$, ${}^f\!/_g$ es continua en a.

§ 9 TEOREMAS BÁSICOS.

Teorema de Bolzano 9.1.- Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Se supone que $f(a)\,f(b) < 0$, es decir f toma valores no nulos y de signos opuestos en los extremos del intervalo. Entonces, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Propiedad de Darboux 9.2.- Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Para cada número real ξ entre $f(a)$ y $f(b)$ (es decir, $f(a) \leq \xi \leq f(b)$ si $f(a) \leq f(b)$ o $f(b) \leq \xi \leq f(a)$ en caso contrario) existe al menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \xi$.

Corolario 9.3.- Sean I un intervalo genérico de la recta real (acotado o no, cerrado o no, etc.) y f una función real definida y continua en I. Si f es no constante, su imagen, $f(I)$, es un intervalo.

Teorema de Weierstrass 9.4.- Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (en particular K puede ser un intervalo cerrado y acotado). Si f es una función real definida y continua en K, entonces f está acotada. De hecho, f alcanza sus extremos, es decir, existen $\alpha, \beta \in K$ tales que

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)\,, \quad \text{para cada } x \in K\,.$$

Teorema 9.5.- (continuidad de la función compuesta) Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$ y f, g sendas funciones reales definidas en A y B respectivamente, y tales que $f(A) \subset B$. Si $a \in A$, f es continua en a, $b \in B$, g es continua en b y $f(a) = b$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en a. En particular, si f es continua en A y g es continua en B, entonces $g \circ f$ es continua en A.

Definición 9.6.- Sea f una función definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}$. Se dice que f es *monótona creciente* (resp. *decreciente*) en A si para cada par de puntos $x, y \in A$ tales que $x < y$ se tiene $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$). Si $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$) siempre que $x, y \in A$ con $x < y$ la función se dice *estrictamente monótona*.

Teorema 9.7.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y f una función definida y continua en I. La condición necesaria y suficiente para que f sea inyectiva en I es que sea estrictamente monótona en I. Es más, f^{-1} es creciente (resp. decreciente) si f así lo es.

Teorema 9.8.- (continuidad de la función inversa) Sea f una función definida, continua e inyectiva en el intervalo I de $\mathbb{R}$. Denotemos por J al conjunto imagen de f (que es un intervalo en virtud del corolario 9.3). Entonces la función $f^{-1}\colon J \to I$ es continua.

TEMA 5 — FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. CÁLCULO DIFERENCIAL

§1 CONCEPTO DE DERIVADA. PRIMERAS PROPIEDADES.

Definición 1.1.- Sea f una función real definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, y sea $a \in I$ (obsérvese que a es un punto de acumulación de I). Se dice que f es *derivable en el punto* a si existe y es finito el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En ese caso, el valor del límite se representa por $f'(a)$ o $\dfrac{df}{dx}(a)$, y se denomina *derivada de f en el punto a*.

Se dice que f es *derivable en I* si es derivable en cada uno de los puntos de I.

Propiedades 1.7.- Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.7.1.- Si f es derivable en a, f es continua en a (el recíproco es, en general, falso).

1.7.2.- Si f y g son derivables en a, $\alpha f + \beta g$ es derivable en a, además $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.

1.7.3.- Si f es una función constante, entonces f es derivable en I y para todo $x \in I$ se tiene que $f'(x) = 0$.

1.7.4.- Si f y g son derivables en a, entonces $f\,g$ es derivable en a, y $(f\,g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$.

1.7.5.- Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en a, y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}.$$

Definición 1.8.- Sea f una función real definida en un intervalo de la forma $[a, b)$. Entonces, tiene sentido considerar el límite $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, que si existe y es finito se denomina *derivada lateral por la derecha de f en el punto a*, y se representa por $f'(a^+)$ o $f'_+(a)$.

Análogamente, para una función f definida en un intervalo de la forma $(a, b]$, se define *derivada lateral por la izquierda de f en el punto b* y se denota por $f'(b^-)$ o $f'_-(b)$.

Así, si se tiene una función f definida en el intervalo $I = [a, b]$, decir que f es *derivable en I* significa que f es derivable en cada punto del interior de I y que existen las correspondientes derivadas laterales en a y b.

Proposición 1.9.- Sean f una función real definida en un intervalo abierto I y $a \in I$. Son equivalentes:

i) f es derivable en a.

ii) f admite derivadas laterales en a y coinciden.

En este caso, el valor de las derivadas laterales coincide con $f'(a)$.

Regla de la Cadena 1.10.- Sean I y J intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to J$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ tales que:

i) f es derivable en $a \in I$.

ii) g es derivable en $b = f(a) \in J$.

Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es derivable en a, además

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\,f'(a) = g'(b)\,f'(a).$$

Derivación de la función inversa 1.11.- Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y f una función real definida, continua e inyectiva en I. Si f es derivable en $a \in I$ y $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $b = f(a)$ y

$$(f^{-1})'\big(f(a)\big) = 1/f'(a) \qquad \text{ó} \qquad (f^{-1})'(b) = 1/f'\big(f^{-1}(b)\big).$$

Definición 1.13.- Sea f una función definida y derivable en un intervalo I. Tiene sentido considerar la función derivada, que denotaremos por f', que a cada punto $x \in I$ le asocia el valor $f'(x)$. Esta nueva función puede ser derivable a su vez en un punto a de I, es decir, puede existir $(f')'(a)$, que se denota por $f''(a)$, y se denomina *derivada segunda* de f en a. Si f' es derivable en todo I, se puede considerar una nueva función, la derivada segunda de f, denotada por f'', que asocia a cada punto $x \in I$ el valor $f''(x)$. Análogamente, se pueden definir *derivadas sucesivas* de orden $k \in \mathbb{N}$ arbitrario. La notación usual para la derivada de orden k o derivada k-ésima de una función f es $f^{k)}$ o $d^k f$. Por convenio, $f^{0)} = f$.

Definición 1.14.- Sea k un número natural, $k \geq 1$. Se dice que una función real f definida en el intervalo I es *de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* I si f admite derivadas sucesivas hasta orden k en I y todas ellas son continuas (esto equivale a que exista $f^{k)}$ y sea continua). Se dice que una función real f definida en el intervalo I es *de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *en* I si f admite derivadas sucesivas de orden arbitrario en I (y, por tanto, todas son continuas).

Fórmula de Leibnitz 1.15.- Sean f, g funciones de clase $\mathcal{C}^n$ en un intervalo I. Entonces, $f\,g$ es de clase $\mathcal{C}^n$ en I, y para cada $k \leq n$ se tiene que

$$(f\,g)^{k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{k-i)}(x)\, g^{i)}(x)\,, \quad x \in I\,.$$

§ 2 TEOREMAS DE ROLLE Y DEL VALOR MEDIO. MONOTONÍA.

Definición 2.1.- Sean f una función real definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}$ y x_0 un punto de A. Se dice que f *presenta un mínimo relativo en* x_0 (resp. *máximo relativo*), si existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ se tiene que $f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $f(x) \leq f(x_0)$).

Los máximos y mínimos relativos reciben el nombre común de *extremos relativos*. En las condiciones anteriores, si para $x \neq x_0$ se puede asegurar la desigualdad estricta entre las correspondientes imágenes, se habla de *extremos relativos estrictos*.

Teorema 2.2.- Sea f una función real definida en un intervalo I, y sea x_0 un punto interior de I en el que f presenta un extremo relativo. Si f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Observaciones 2.3.-

i) Un extremo relativo no tiene por qué presentarse en un punto en el que la función sea derivable.

iii) El resultado anterior se aplica sólo a puntos interiores del intervalo. Toda función continua en un intervalo compacto alcanza sus extremos absolutos, que son por tanto extremos relativos, pero puede que esto ocurra en los extremos del intervalo y que, aun existiendo la derivada lateral correspondiente, ésta no sea nula.

Teorema de Rolle 2.4.- Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio de Cauchy 2.5.- Sean $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)\,\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\,\big(f(b) - f(a)\big)$.

Teorema de los incrementos finitos de Lagrange 2.6.-

Sea f una función real definida y continua en $[a, b]$, y derivable en (a, b). Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$.

Corolario 2.8.- Sea f una función real derivable en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Si $f'(x) = 0$ para cada $x \in I$, entonces f es constante en I (este resultado es falso si I no es un intervalo).

Corolario 2.9.- Si f es derivable en un intervalo I, entonces:

2.9.1.- f es creciente (resp. decreciente) en I si, y sólo si, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$), para cada $x \in I$.

2.9.2.- Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) para cada x interior a I, entonces f es estrictamente creciente (resp. decreciente) en I.

Regla de L'Hôpital 2.11.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de I. Si f y g son funciones derivables en I tales que $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in I \setminus \{a\}$, y se verifica que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)\,, \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x)\,,$$

entonces, si existe $\lim\limits_{x\to a} {f'(x)}/{g'(x)} = L$ (finito o infinito), se tiene que $\lim\limits_{x\to a} {f(x)}/{g(x)} = L$.

§ 3 FÓRMULA DE TAYLOR. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES.

Definición 3.1.- Sea f una función real definida en un intervalo I y sea $a \in I$. Si f admite derivadas sucesivas hasta el orden $n \geq 1$ en el punto a, se denomina *polinomio de Taylor de grado* n *de* f *en* a al polinomio

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}\,(x - a)^n\,.$$

El polinomio de Taylor es el único de grado menor o igual que n que satisface: $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a)$, ..., $P^{n)}(a) = f^{n)}(a)$, condiciones que lo determinan.

Corolario 3.3.- Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función que admite derivadas hasta el orden $n+1$ en cada punto de I. Si $a \in I$ para cada $x \in I$ existe un punto ξ_x en el intervalo de extremos a y x tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{f^{n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,.$$

Observaciones 3.4.-

i) El último sumando de la expresión anterior es el denominado *resto de Taylor de orden* n *en* a, denotado por $R_n(f,a)(x)$, y que ha sido expresado en la forma conocida como *de Lagrange*.

ii) Otra forma de representar la fórmula de Taylor es la siguiente: dada $f\colon (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R}$ que admite derivadas hasta el orden $n+1$ en cada punto, para cada $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < \delta$ existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + \frac{f''(a)}{2!}\,h^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}\,h^n + \frac{f^{n+1)}(a+\theta\,h)}{(n+1)!}\,h^{n+1}\,.$$

Proposición 3.5.- Sea f una función $n-1$ veces derivable en un intervalo abierto I. Si $a \in I$ y existe $f^{n)}(a)$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0$, es decir, $R_n(f,a)(x) = f(x) - T_n(f,a)(x) = o\big((x-a)^n\big)$ en $x = a$.

Definición 3.7.- Sea f una función definida en un intervalo I. Se dice que f es *convexa* (resp. *cóncava*) en I si para todos $x, y \in I$ y todo $\alpha \in (0,1)$ se tiene que $f\big((1-\alpha)\,x + \alpha\,y\big) \leq (1-\alpha)\,f(x) + \alpha\,f(y)$ (resp. $f\big((1-\alpha)\,x + \alpha\,y\big) \geq (1-\alpha)\,f(x) + \alpha\,f(y)$).

Proposición 3.9.- Sea f una función derivable en un intervalo I. Entonces, f es convexa (resp. cóncava) en I si, y sólo si, f' es creciente (resp. decreciente) en I. En particular, si f es dos veces derivable en I, f es convexa (resp. cóncava) en I si, y sólo si, para cada $x \in I$ se tiene que $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$).

Proposición 3.14.- Sean I un intervalo abierto, f una función real definida en I que admite $n-1$ derivadas en I, con $n \geq 2$, y a un punto de I tal que existe $f^{n)}(a)$. Supongamos que

$$f'(a) = \ldots = f^{n-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad f^{n)}(a) \neq 0\,.$$

Si n es par, f presenta un extremo relativo en a, que será un máximo si $f^{n)}(a) < 0$ y un mínimo si $f^{n)}(a) > 0$.

§ 4 DESARROLLOS LIMITADOS.

Definición 4.1.- Sean I un intervalo abierto, $x_0 \in I$ y $n \in \mathbb{N}$. Se dice que una función real f definida en I admite *desarrollo limitado* (*polinómico*) de orden n en x_0 si existen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y una función $\varepsilon : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ con $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, tales que para cada $x \in I \setminus \{x_0\}$ se puede escribir

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \varepsilon(x)(x-x_0)^n = P(x) + \varepsilon(x)(x-x_0)^n\,, \tag{1}$$

es decir, $f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) - \ldots - a_n(x-x_0)^n = o\big((x-x_0)^n\big)$ en $x = x_0$. La expresión a la derecha de la igualdad (1) es el *desarrollo limitado*. El polinomio P se denomina *parte regular* del desarrollo.

Propiedades 4.2.- Con la notación anterior, si f admite desarrollo limitado de orden $n \geq 1$ en x_0:

4.2.1.- El desarrollo limitado es único.

4.2.2.- f admite desarrollo limitado de orden m para todo $m \leq n$. La parte regular del desarrollo de orden m se obtiene desestimando los monomios de grado mayor que m en la parte regular del desarrollo de orden n.

4.2.3.- Si f es continua en x_0, entonces $a_0 = f(x_0)$.

4.2.4.- Si f es derivable en x_0, entonces $a_1 = f'(x_0)$.

Propiedades 4.3.- Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, y $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones que admiten desarrollo limitado de orden $n \in \mathbb{N}$ en x_0, dado por los polinomios P y Q, respectivamente. Entonces, se verifica que:

4.3.1.- Para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la función $\alpha\,f + \beta\,g$ admite por desarrollo limitado de orden n en x_0 el polinomio $\alpha\,P + \beta\,Q$. (Propiedad de linealidad.)

4.3.2.- La función $f\,g$ admite por desarrollo limitado de orden n en x_0 el polinomio que resulta al calcular $P\,Q$ y despreciar los términos en $(x-x_0)$ de grado estrictamente mayor que n.

4.3.3.- Si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, la función f/g admite por desarrollo limitado de orden n en x_0 el polinomio que se obtiene al dividir, hasta llegar al grado n, P entre Q según las potencias crecientes de $(x-x_0)$.

4.3.4.- Si F es una primitiva de f en I (es decir $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in I$), F admite por desarrollo limitado de orden $n+1$ en x_0 el polinomio R, primitiva de P, tal que $R(x_0) = F(x_0)$.

Proposición 4.4.- Sean I, J intervalos, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, f admite desarrollo limitado de orden n en el punto x_0 el polinomio P y g admite por desarrollo limitado de orden n en y_0 el polinomio Q. Entonces $g \circ f$ admite por desarrollo limitado de orden n en x_0, cuya parte regular es el polinomio que resulta al despreciar en el polinomio $Q\big(P(x)\big)$ los términos en $(x - x_0)$ de grado estrictamente mayor que n.

Teorema 4.5.- Sea f una función real definida y $n-1$ veces derivable en el intervalo I, y sea $x_0 \in I$ tal que existe $f^{n)}(x_0)$. Entonces, f admite desarrollo limitado de orden n en x_0, y es el desarrollo de Taylor de grado n de f en x_0.

Desarrollos Limitados de las Funciones Elementales 4.7.- Todos los desarrollos se refieren a $x_0 = 0$. El orden viene dado por la expresión de Landau $o(x^m)$.

1.- $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$

2.- $a^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k \log(a)^k}{k!} + o(x^n)$

3.- $\operatorname{sen}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$

4.- $\cos(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$

5.- $\operatorname{tg}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2\,x^5}{15} + \dfrac{17\,x^7}{315} + \dfrac{62\,x^9}{2835} + \dfrac{1382\,x^{11}}{155925} + o(x^{12})$

6.- $\operatorname{Sh}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$

7.- $\operatorname{Ch}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$

8.- $\operatorname{Tgh}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2\,x^5}{15} - \dfrac{17\,x^7}{315} + \dfrac{62\,x^9}{2835} - \dfrac{1382\,x^{11}}{155925} + o(x^{12})$

9.- $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha\,x}{1!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\,x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,x^n}{n!} + o(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$

Casos particulares: **i)** Si $\alpha \in \mathbb{N}$ se obtiene la *Fórmula del Binomio de Newton.*

ii) $\alpha = \frac{1}{2}$; $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2\cdot 4} + \dfrac{3\,x^3}{2\cdot 4\cdot 6} - \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-3)\,x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + o(x^n)$

iii) $\alpha = -\frac{1}{2}$; **a)** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3\,x^2}{2\cdot 4} - \ldots + (-1)^n \dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + o(x^n)$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3\,x^4}{2\cdot 4} - \ldots + (-1)^n \dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + o(x^{2n+1})$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3\,x^4}{2\cdot 4} + \ldots + \dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + o(x^{2n+1})$

iv) $\alpha = -1$; **a)** $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n\,x^n + o(x^n)$

b) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + o(x^n)$

c) $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots + (-1)^n\,x^{2n} + o(x^{2n+1})$

10.- i) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\,\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$ (ver 9.iv.a)

ii) $\log(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \ldots - \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$ (ver 9.iv.b)

11.- $\operatorname{arcsen}(x) = x + \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+1)} + o(x^{2n+2})$ (ver 9.iii.c)

12.- $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} - \dfrac{3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \ldots - \dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+1)} + o(x^{2n+2})$

13.- $\operatorname{arctg}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} + \ldots + (-1)^n\,\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$ (ver 9.iv.c)

14.- $\operatorname{ArgSh}(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$= x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \ldots + (-1)^n\,\dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+1)} + o(x^{2n+2})$ (ver 9.iii.b)

15.- $\operatorname{ArgTgh}(x) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$ (ver 10)

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.

§ 1 Función Exponencial de base *e*.

Definición 1.1.- Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define la *exponencial* de x como el número $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Proposición 1.2.- Para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Propiedades 1.3.-

1.3.1.- $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

1.3.2.- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$ y $\exp(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

1.3.3.- $\exp(-x) = \exp(x)^{-1} = {}^1\!/_{\exp(x)}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

1.3.4.- $1 + x \leq \exp(x) \leq 1 + x \exp(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

1.3.5.- $\exp(x) > 1$ si $x > 0$; $0 < \exp(x) < 1$ si $x < 0$.

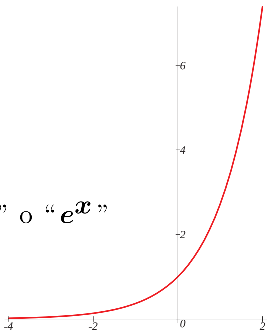
Proposición 1.4.- $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $\exp(x) > \exp(y)$.

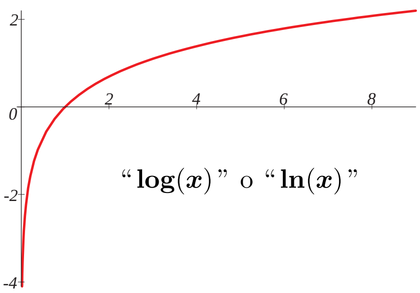
Proposición 1.5.- La función exp es continua en todo $\mathbb{R}$.

Proposición 1.6.- $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es una biyección, en particular $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.

Proposición 1.7.- La función exp es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, además $\exp'(x) = \exp(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

“ $\boldsymbol{\exp(x)}$ ” o “ $\boldsymbol{e^x}$ ”





“ $\boldsymbol{\log(x)}$ ” o “ $\boldsymbol{\ln(x)}$ ”

§ 2 Función Logaritmo Natural.

Definición 2.1.- La función inversa de $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (ver 1.6) se denomina *logaritmo natural* o *neperiano* y se denota por “log” o “ln”.

Propiedades 2.2.-

2.2.1.- $\log(x\, y) = \log(x) + \log(y)$ para todos $x, y > 0$.

2.2.2.- $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$ y $\log(x) > 0$ para cada $x > 1$.

2.2.3.- $\log({}^1\!/_x) = -\log(x)$ para cada $x > 0$.

2.2.4.- $\log(x) < 0$ si $0 < x < 1$.

2.2.5.- $1 - {}^1\!/_x \leq \log(x) \leq x - 1$ para cada $x > 0$.

Proposición 2.3.- $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $\log(x) > \log(y)$.

Proposición 2.4.- La función log es continua en $(0, \infty)$.

Proposición 2.5.- log es una biyección del intervalo $(0, \infty)$ en $\mathbb{R}$, en particular

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty .$$

Proposición 2.6.- La función log es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(0, \infty)$, además $\log'(x) = \frac{1}{x}$ para cada $x > 0$.

§ 3 Función Exponencial de base arbitraria.

Definición 3.1.- Sea a un número real con $a > 0$ y $a \neq 1$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define la *exponencial de base a* de x, y se denota por "a^x", como el número real $a^x = \exp\big(x \log(a)\big)$.

Propiedades 3.2.-

3.2.1.- $a^{x+y} = a^x\, a^y$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

3.2.2.- $a^0 = 1$ y $a^x > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

3.2.3.- $a^{-x} = {}^1\!/_{a^x}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

3.2.4.- Si $a > 1$, $a^x > 1$ para $x > 0$ y $0 < a^x < 1$ para $x < 0$.

3.2.5.- Si $0 < a < 1$, $0 < a^x < 1$ para $x > 0$ y $a^x > 1$ para $x < 0$.

Proposición 3.3.- Si $a > 1$, $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $a^x > a^y$.
Si $0 < a < 1$, la función $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, es decir, si $x > y$ entonces $a^x < a^y$.

Proposición 3.4.- La función a^x es continua en todo $\mathbb{R}$.

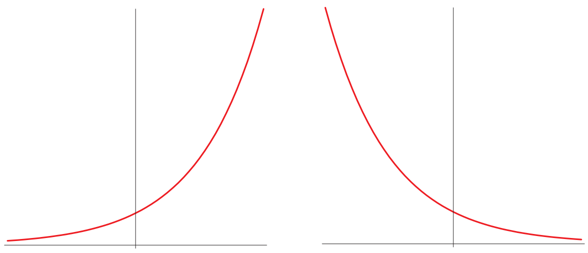
Proposición 3.5.- a^x es una biyección de $\mathbb{R}$ en el intervalo $(0, \infty)$, en particular:

Si $a > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$.

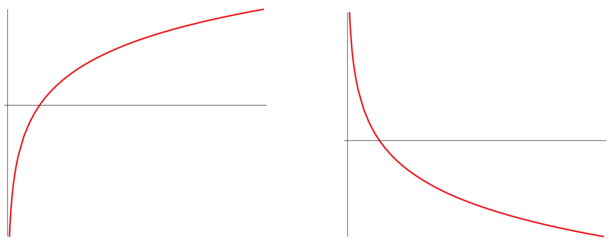
Si $0 < a < 1$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = 0$.

Proposición 3.6.- La función a^x es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, además $(a^x)' = \log(a)\, a^x$.

$a > 1$ "$\boldsymbol{a^x}$" $0 < a < 1$



$a > 1$ "$\boldsymbol{\log_a(x)}$" $0 < a < 1$



§ 4 Función Logaritmo de base arbitraria.

Definición 4.1.- Si a es un número real con $a > 0$, $a \neq 1$, la función inversa de $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (ver 3.5) se denomina *logaritmo en base a* y se denota por "$\log_a$".

Propiedades 4.2.-

4.2.1.- $\log_a(x\, y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ para todos $x, y > 0$.

4.2.2.- $\log_a(1) = 0$ y $\log_a(a) = 1$.

4.2.3.- $\log_a({}^1\!/_x) = -\log_a(x)$ para cada $x > 0$.

4.2.4.- Si $a > 1$, $\log_a(x) > 0$ para cada $x > 1$ y $\log_a(x) < 0$ para $0 < x < 1$.

4.2.5.- Si $0 < a < 1$, $\log_a(x) < 0$ para cada $x > 1$ y $\log_a(x) > 0$ para $0 < x < 1$.

4.2.6.- Si $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, entonces $\log_b(x) = \log_b(a)\, \log_a(x)$ para cada $x > 0$. En particular,

$$\log_a(x) = {}^{\log(x)}\!/_{\log(a)} = {}^{\ln(x)}\!/_{\ln(a)} \quad \text{para cada } x > 0\,.$$

Proposición 4.3.- Si $a > 1$, la función $\log_a\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $\log_a(x) > \log_a(y)$.
Si $0 < a < 1$, $\log_a\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, es decir, si $x > y$ entonces $\log_a(x) < \log_a(y)$.

Proposición 4.4.- La función $\log_a$ es continua en $(0, \infty)$.

Proposición 4.5.- $\log_a$ es una biyección del intervalo $(0, \infty)$ en $\mathbb{R}$, en particular:

Si $a > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$.

Si $0 < a < 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty$.

Proposición 4.6.- $\log_a$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(0, \infty)$, además $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{\log(a)}\,\dfrac{1}{x}$ para cada $x > 0$.

§ 5 Función Potencial.

Definición 5.1.- Fijado $a \in \mathbb{R}$ para cada $x > 0$ se define la *potencia de base* x *y exponente* a por

$$x^a = \exp\big(a \log(x)\big)\,.$$

Propiedades 5.2.-

5.2.1.- $(x\,y)^a = x^a\,y^a$ para todos $x, y > 0$.

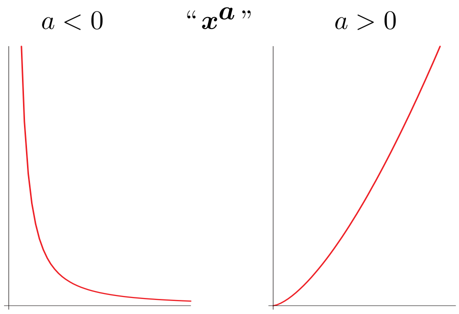
5.2.2.- $(x^a)^b = x^{a\,b}$ y $x^a\,x^b = x^{a+b}$ para cada $x > 0$ y todos $a, b \in \mathbb{R}$.

5.2.3.- Si $a \in \mathbb{N}$, entonces $x^a = x\,x \overset{a \text{ veces}}{\cdots} x$ para cada $x > 0$.

5.2.4.- Si $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, entonces $x^a = \dfrac{1}{x\,x \overset{|a| \text{ veces}}{\cdots} x}$ para cada $x > 0$.

Proposición 5.3.- Si $a > 0$, $x^a \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, es decir, si $x > y$ entonces $x^a > y^a$. Si $a < 0$, la función $x^a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, es decir, si $x > y$ entonces $x^a < y^a$.

Proposición 5.4.- La función x^a es continua en $(0, \infty)$.



Proposición 5.5.- Si $a \neq 0$, x^a es una biyección de $(0, \infty)$ en $(0, \infty)$, en particular:

Si $a > 0$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} x^a = 0 \quad$ y $\quad \lim\limits_{x \to \infty} x^a = \infty\,.$

Si $a < 0$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} x^a = \infty \quad$ y $\quad \lim\limits_{x \to \infty} x^a = 0\,.$

Proposición 5.6.- La función x^a es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(0, \infty)$, además $(x^a)' = a\,x^{a-1}$.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

§ 6 Funciones seno y coseno.

Definición 6.1.- Si $x \in \mathbb{R}$ se definen el *coseno* y el *seno* de x, respectivamente, por

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n}\,, \qquad \operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\,x^{2\,n+1}\,.$$

Proposición 6.3.- Si $x \in \mathbb{R}$ se verifica:

i) $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$ **ii)** $\cos(x) = \cos(-x)$

iii) $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$ **iv)** $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$.

Propiedades 6.4.- Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

6.4.1.- $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$

6.4.2.- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$

6.4.3.- $\operatorname{sen}(2\,x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ **6.4.4.-** $\cos(2\,x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$

6.4.5.- $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2\,x)}{2}$ **6.4.6.-** $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2\,x)}{2}$

6.4.7.- $\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$

6.4.8.- $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$

6.4.9.- $\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{2}$

6.4.10.- $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

6.4.11.- $\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

6.4.12.- $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

6.4.13.- $\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

Proposición 6.5.- Las funciones $\operatorname{sen}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son continuas.

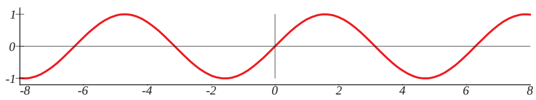
Proposición 6.6.- Las funciones $\operatorname{sen}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}$; además,

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x) \qquad \text{y} \qquad \cos'(x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad \text{para cada } x\in\mathbb{R}\,.$$

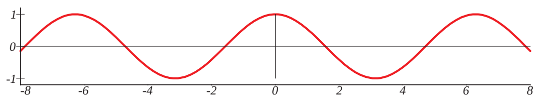
Proposición 6.7.- $\operatorname{sen}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son funciones periódicas, de periodo $2\,\pi$:

$$\cos(x+2\,\pi) = \cos(x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(x+2\,\pi) = \operatorname{sen}(x) \qquad \text{para cada } x\in\mathbb{R}\,.$$

“sen(x)”



“cos(x)”



Propiedades 6.9.-

6.9.1.- $\cos(0)=1$ y $\operatorname{sen}(0)=0$. **6.9.2.-** $\cos\left(\pi/2\right)=0$ y $\operatorname{sen}\left(\pi/2\right)=1$.

6.9.3.- $\cos(\pi)=-1$ y $\operatorname{sen}(\pi)=0$.

6.9.4.- $\operatorname{sen}(x+\pi)=-\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

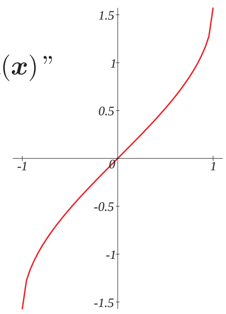
6.9.5.- $\operatorname{sen}\left(\pi/2-x\right)=\cos(x)$ y $\cos\left(\pi/2-x\right)=\operatorname{sen}(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

6.9.6.- $\operatorname{sen}(x)=0$ si, y sólo si, $x=k\,\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$.

6.9.7.- $\cos(x)=0$ si, y sólo si, $x=\pi/2+k\,\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$.

§ 7 Funciones inversas de seno y coseno.

“arcsen(x)”



Proposición 7.1.- $\operatorname{sen}:\left[-\pi/2,\pi/2\right]\to[-1,1]$ es una biyección creciente. A la función inversa se le denomina *arco-seno* y se denota por “arcsen”.

Proposición 7.2.- $\operatorname{arcsen}:(-1,1)\to\left(-\pi/2,\pi/2\right)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es

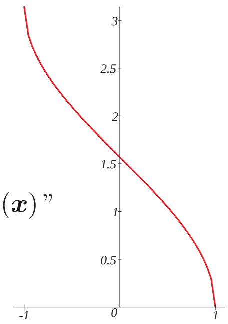
$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{para cada } x\in(-1,1)\,.$$

Proposición 7.3.- $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ es una biyección decreciente. A la función inversa se le denomina *arco-coseno* y se le denota por “arccos”.

Proposición 7.4.- $\arccos:(-1,1)\to(0,\pi)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{para cada } x\in(-1,1)\,.$$

“arccos(x)”



§ 8 Funciones tangente y cotangente.

Definición 8.1.- Para $x\in\mathbb{R}$, $x\neq k\,\pi+\pi/2$ $(k\in\mathbb{Z})$, se define $\operatorname{tg}(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, que recibe el nombre de *tangente* de x. Para $x\in\mathbb{R}$, $x\neq k\,\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, se define $\operatorname{cotg}(x)=\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$, denominada *cotangente* de x.

Proposición 8.2.- Las funciones tg y cotg son continuas en sus respectivos dominios de definición.

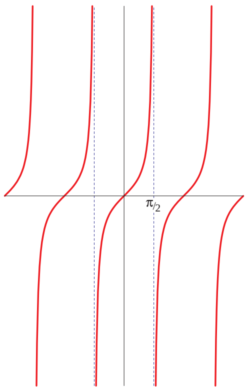
Proposición 8.3.- La función $\operatorname{tg}:\mathbb{R}\setminus\{k\,\pi+\pi/2 : k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1+\operatorname{tg}(x)^2 \qquad \text{para cada } x\in\mathbb{R}\setminus\{k\,\pi+\pi/2 : k\in\mathbb{Z}\}\,.$$

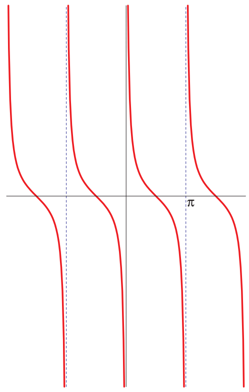
Proposición 8.4.- La función $\operatorname{cotg}:\mathbb{R}\setminus\{k\,\pi : k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es

$$\operatorname{cotg}'(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}(x)^2} = -1-\operatorname{cotg}(x)^2 \qquad \text{para cada } x\in\mathbb{R}\setminus\{k\,\pi : k\in\mathbb{Z}\}\,.$$

"**tg(*x*)**"



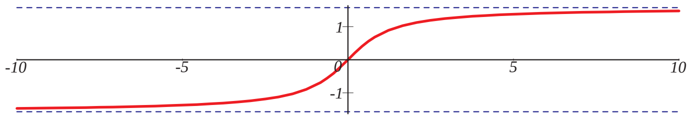
"**cotg(*x*)**"



Proposición 8.5.- $\mathrm{tg} : \left(-\,{}^{\pi}\!/_{2}, {}^{\pi}\!/_{2}\right) \to \mathbb{R}$ es una biyección creciente. A la función inversa se le denomina *arco-tangente* y se denota por "arctg".

Proposición 8.6.- $\mathrm{arctg}\colon \mathbb{R} \to \left(-\,{}^{\pi}\!/_{2}, {}^{\pi}\!/_{2}\right)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es $\mathrm{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$

"**arctg(*x*)**"



Observación 8.7.- El estudio de la función inversa de cotg, el *arco-cotangente*, se realiza sin dificultad a partir del resultado anterior observando que $\mathrm{cotg}(x) = \mathrm{tg}\left({}^{\pi}\!/_{2} - x\right)$ para cada $x \in \mathbb{R}\,.$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

§ 9 Funciones seno y coseno hiperbólicos.

Definición 9.1.- Si $x \in \mathbb{R}$ se definen el *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* de x, respectivamente, por

$$\mathrm{Ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\,, \qquad \mathrm{Sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\,.$$

Propiedades 9.2.-

9.2.1.- $\mathrm{Ch}(0) = 1$ y $\mathrm{Sh}(0) = 0$

9.2.2.- $\mathrm{Ch}(x) \geq 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

9.2.3.- $\mathrm{Sh}(x) > 0$ si $x > 0$, y $\mathrm{Sh}(x) < 0$ si $x < 0$.

9.2.4.- $\mathrm{Sh}(x) = -\,\mathrm{Sh}(-x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

9.2.5.- $\mathrm{Ch}(x) = \mathrm{Ch}(-x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

9.2.6.- $\mathrm{Ch}^2(x) - \mathrm{Sh}^2(x) = 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Propiedades 9.3.- Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

9.3.1.- $\mathrm{Sh}(x+y) = \mathrm{Sh}(x)\,\mathrm{Ch}(y) + \mathrm{Ch}(x)\,\mathrm{Sh}(y)$

9.3.2.- $\mathrm{Ch}(x+y) = \mathrm{Ch}(x)\,\mathrm{Ch}(y) + \mathrm{Sh}(x)\,\mathrm{Sh}(y)$.

9.3.3.- $\mathrm{Sh}(2\,x) = 2\,\mathrm{Sh}(x)\,\mathrm{Ch}(x)$.

9.3.4.- $\mathrm{Ch}(2\,x) = \mathrm{Ch}^2(x) + \mathrm{Sh}^2(x)$.

9.3.5.- $\mathrm{Sh}^2(x) = \dfrac{\mathrm{Ch}(2\,x) - 1}{2}$.

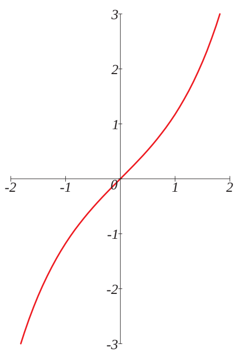
9.3.6.- $\mathrm{Ch}^2(x) = \dfrac{\mathrm{Ch}(2\,x) + 1}{2}$.

Proposición 9.4.- Las funciones $\mathrm{Sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\mathrm{Ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas.

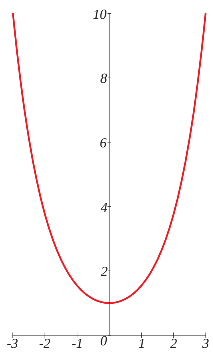
Proposición 9.5.- Las funciones $\mathrm{Sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\mathrm{Ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}$, además

$$\mathrm{Sh}'(x) = \mathrm{Ch}(x) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Ch}'(x) = \mathrm{Sh}(x) \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

"**Sh(*x*)**"



"**Ch(*x*)**"



§ 10 Funciones inversas del seno y coseno hiperbólicos.

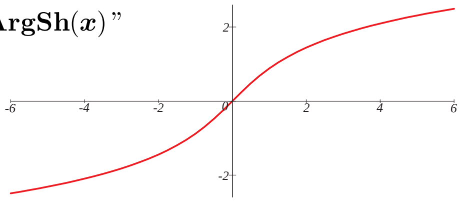
Proposición 10.1.- $\mathrm{Sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una biyección creciente. A la función inversa se le denomina *argumento del seno hiperbólico* y se denota por "ArgSh".

Proposición 10.2.- $\mathrm{ArgSh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es $\mathrm{ArgSh}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,,\ x\in\mathbb{R}\,.$

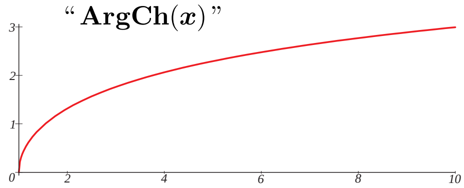
Proposición 10.3.- $\mathrm{Ch}:[0,\infty)\to[1,\infty)$ es una biyección decreciente. A la función inversa se le denomina *argumento del coseno hiperbólico* y se le denota por "ArgCh".

Proposición 10.4.- $\mathrm{ArgCh}:(1,\infty)\to(0,\infty)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Además $\mathrm{ArgCh}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,\ x\in(1,\infty)\,.$

" **ArgSh(x)** "



" **ArgCh(x)** "



§ 11 Funciones tangente y cotangente hiperbólicas.

Definición 11.1.- Para cada $x\in\mathbb{R}$ se define la *tangente hiperbólica* de x por

$$\mathrm{Tgh}(x)=\frac{\mathrm{Sh}(x)}{\mathrm{Ch}(x)}=\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}\,.$$

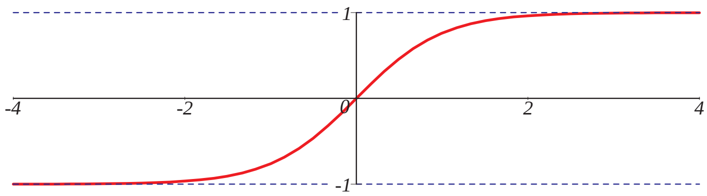
Para $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, se define la *cotangente hiperbólica* de x como

$$\mathrm{Cotgh}(x)=\frac{\mathrm{Ch}(x)}{\mathrm{Sh}(x)}=\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{\exp(x)-\exp(-x)}\,.$$

Proposición 11.2.- $\mathrm{Tgh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua.

Proposición 11.3.- $\mathrm{Tgh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y $\mathrm{Tgh}'(x)=1-\mathrm{Tgh}(x)^2=\dfrac{1}{\mathrm{Ch}(x)^2}\,,\ x\in\mathbb{R}\,.$

" **Tgh(x)** "



Proposición 11.4.- $\mathrm{Cotgh}:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ es una función continua.

Proposición 11.5.- $\mathrm{Cotgh}:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Su derivada es

$$\mathrm{Cotgh}'(x)=1-\mathrm{Cotgh}^2=\frac{-1}{\mathrm{Sh}(x)^2}\quad\text{para cada } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Proposición 11.6.- $\mathrm{Tgh}:\mathbb{R}\to(-1,1)$ es una biyección creciente. A la función inversa se le denomina *argumento de la tangente hiperbólica* y se denota por "ArgTgh".

Proposición 11.7.- $\mathrm{ArgTgh}:(-1,1)\to\mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$, cuya derivada es $\mathrm{ArgTgh}'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ para cada $x\in(-1,1)\,.$

TEMA 6 CÁLCULO DE PRIMITIVAS

§ 1 DEFINICIONES Y PRIMERAS PROPIEDADES.

Definición 1.1.- Sea f una función real definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$. Se dice que la función F, definida y derivable en el mismo intervalo, es una primitiva de f si se verifica que $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in I$.

Propiedades 1.2.-

1.2.1.- Si F es una primitiva de f y C es un número real, entonces la función $F + C$ es también una primitiva de f. De hecho, si G es otra primitiva de F, se tiene que $F - G$ es constante.

Nota: El conjunto de primitivas de una función f se denomina *Integral Indefinida de* f, y se denota por $\int f(x)\,dx$ o $\int f$. Según lo anterior, si F es una primitiva de f, es usual escribir $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

1.2.2.- Si F, G son primitivas de las funciones f y g respectivamente, definidas ambas en un mismo intervalo I, y si α, β son números reales, entonces $\alpha\,F + \beta\,G$ es una primitiva de $\alpha\,f + \beta\,g$ en I.

1.2.3.- Fórmula de Integración por Partes: Sean f, g dos funciones definidas en el mismo intervalo y tal que ambas son derivables. Entonces

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx\,,$$

o, de forma más compacta: $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$, donde $u = f(x)$, $du = f'(x)\,dx$, $v = g(x)$, $dv = g'(x)\,dx$.

1.2.4.- Método de Sustitución: Sean f y φ funciones de variable real tales que φ es derivable y la imagen de φ está contenida en el dominio de f. Si F es una primitiva de f, entonces

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C\,.$$

Cambio de Variable: Sean f y φ funciones definidas en los intervalos (a,b) y (c,d) respectivamente, tales que φ transforma biyectivamente el intervalo (c,d) en (a,b) y tanto φ como φ^{-1} son derivables. Pongamos $f\big(\varphi(y)\big)\,\varphi'(y) = g(y)$. Si G es una primitiva de g, se tiene que

$$\int f(x)\,dx = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C\,.$$

Nota: En las condiciones anteriores, es usual representar la identidad $d\varphi(y) = \varphi'(y)\,dy$ por $dx = \varphi'\,dy$.

§ 2 INTEGRACIÓN DE FRACCIONES RACIONALES.

Definición 2.1.- Una función f se dice que es una *Función* o *Fracción Racional* si se escribe en su dominio de definición como cociente de dos polinomios: $f(x) = P(x)/Q(x)$.

Si el grado de P es mayor o igual que el grado de Q es posible escribir $f(x) = C(x) + R(x)/Q(x)$, donde C es el polinomio cociente y R es el resto, que tiene grado estrictamente menor que Q. En adelante sólo se consideran fracciones racionales con el grado del numerador menor que el del denominador.

Teorema: Todo polinomio $Q(x)$ con coeficientes reales se puede descomponer de forma única como

$$Q(x) = C\,(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_r)^{m_r}q_1(x)^{n_1}\ldots q_s(x)^{n_s},$$

donde $C \in \mathbb{R}$, $a_1,\ldots,a_r$ son las raíces reales de Q, $m_1,\ldots,m_r$ son sus multiplicidades respectivas, $q_1,\ldots,q_s$ son polinomios mónicos de grado 2 sin raíces reales, y n_1, n_2, …, n_s son sus multiplicidades.

2.2.- Método de Descomposición en Fracciones Simples.

Teorema: Si $f(x) = P(x)/Q(x)$ es una fracción racional y Q se descompone como antes, entonces $f(x)$ se escribe de forma única

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{A_{r,1}}{(x-a_r)} + \frac{A_{r,2}}{(x-a_r)^2} + \ldots + \frac{A_{r,m_r}}{(x-a_r)^{m_r}} + \ldots \\ & + \frac{B_{1,1}\,x + C_{1,1}}{q_1(x)} + \ldots + \frac{B_{1,n_1}\,x + C_{1,n_1}}{q_1(x)^{n_1}} + \ldots + \frac{B_{s,1}\,x + C_{s,1}}{q_s(x)} + \ldots + \frac{B_{s,n_s}\,x + C_{s,n_s}}{q_s(x)^{n_s}}, \end{aligned}$$

donde los $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ son números reales.

Primitivas de las Fracciones Simples:

2.2.1.- $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \log(|x-a|) + C.$

2.2.2.- $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C,\ n > 1.$

2.2.3.- $\displaystyle\int \frac{A\,x+B}{x^2+\alpha\,x+\beta}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2\,x+\alpha}{x^2+\alpha\,x+\beta}\,dx + \frac{A}{2}\int \frac{2B/A-\alpha}{x^2+\alpha\,x+\beta}\,;$

* $\displaystyle\int \frac{A}{2}\,\frac{2\,x+\alpha}{x^2+\alpha\,x+\beta}\,dx = \frac{A}{2}\log(|x^2+\alpha\,x+\beta|) + C\,.$

* Ya que $x^2+\alpha\,x+\beta = (x+\alpha/2)^2 + (\beta - \alpha^2/4) = (x+\mu)^2+\gamma^2 = \gamma^2\big((x+\mu)^2/\gamma^2+1\big)$, donde $\mu = \alpha/2, \gamma^2 = \beta - \alpha^2/4$, aplicando el cambio de variable $\boldsymbol{x+\mu = \gamma\,t}$; $dx = \boldsymbol{\gamma}\,dt$ resulta

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha\,x+\beta} = \int \frac{dx}{\gamma^2\big((x+\mu)^2/\gamma^2+1\big)} = \frac{1}{\gamma}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\gamma}\operatorname{arctg}(t) + C = \frac{1}{\gamma}\operatorname{arctg}\big((x+\mu)/\gamma\big) + C\,.$$

2.2.4.- $\displaystyle\int \frac{A\,x+B}{(x^2+\alpha\,x+\beta)^n}\,dx$, $n>1$; requieren un procedimiento de recurrencia o el de Hermite.

2.3.- Método de Hermite: Si $P(x)/Q(x)$ es una fracción racional, entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{R(x)}{M(x)} + \int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx,$$

donde M es un polinomio cuyos factores son los mismos de Q, con su multiplicidad disminuida en una unidad, R es un polinomio de grado menor que M, B es el producto de todos los factores irreducibles de Q, es decir $B\,M = Q$, y A es un polinomio de grado menor que B.

Para determinar estos polinomios basta observar que debe verificarse $\displaystyle\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{R(x)}{M(x)}\right) + \frac{A(x)}{B(x)}$, lo cual permite calcular los coeficientes de $R(x)$ y $A(x)$ por el método de los coeficientes indeterminados. Una vez hecho esto el problema se reduce a calcular la primitiva de $A(x)/B(x)$, que es posible según el método 2.2.

§ 3 FRACCIONES RACIONALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Aquí se consideran funciones del tipo $R\big(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\big)$, donde R es una fracción racional de dos variables.

3.1.- El procedimiento general consiste en aplicar el cambio de variable $\boldsymbol{t = \operatorname{tg}(x/2)}$, para el que $\boldsymbol{dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt}$, $\boldsymbol{\operatorname{sen}(x) = \dfrac{2\,t}{1+t^2}}$ y $\boldsymbol{\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$.

3.2.- Otras situaciones más sencillas.

3.2.1.- $R\big(\operatorname{sen}(x),\cos(x)\big)$ *es impar respecto al coseno*: $R\big(\operatorname{sen}(x),-\cos(x)\big) = -R\big(\operatorname{sen}(x),\cos(x)\big)$.
Se resuelven mediante el cambio $\boldsymbol{t = \operatorname{sen}(x)}$; $\boldsymbol{1-t^2 = \cos(x)^2}$; $\boldsymbol{dt = \cos(x)\,dx}$,

3.2.2.- $R\big(\operatorname{sen}(x),\cos(x)\big)$ *es impar respecto al seno*: $R\big(-\operatorname{sen}(x),\cos(x)\big) = -R\big(\operatorname{sen}(x),\cos(x)\big)$. Mediante el cambio $\boldsymbol{t = \cos(x)}$; $\boldsymbol{1-t^2 = \operatorname{sen}(x)^2}$; $\boldsymbol{dt = -\operatorname{sen}(x)\,dx}$.

3.2.3.- $R\big(\operatorname{sen}(x),\cos(x)\big)$ *es par respecto al seno y al coseno*: $R\big(-\operatorname{sen}(x),-\cos(x)\big) = R\big(\operatorname{sen}(x),\cos(x)\big)$. Se efectúa el cambio $\boldsymbol{t = \operatorname{tg}(x)}$, resultando

$$\boldsymbol{\frac{t^2}{1+t^2} = \operatorname{sen}(x)^2}\,;\quad \boldsymbol{\frac{1}{1+t^2} = \cos(x)^2}\,;\quad \boldsymbol{dt = \big(1+\operatorname{tg}(x)^2\big)\,dx} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt}\,.$$

§ 4 FRACCIONES RACIONALES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

Nos interesamos ahora por las primitivas de funciones del tipo $R(e^x)$, donde R es una fracción racional.

4.1.- El procedimiento general es realizar el cambio de variable $\boldsymbol{e^x = t}$, es decir, $\boldsymbol{x = \log(t)}$, con lo cual $\boldsymbol{dt = e^x\,dx}$ o $\boldsymbol{dx = \dfrac{1}{t}\,dt}$.

4.2.- Fracciones Racionales de las Funciones Hiperbólicas.
Al igual que en el parágrafo §3 nos interesamos en las primitivas de las funciones del tipo $R\big(\operatorname{Sh}(x), \operatorname{Ch}(x)\big)$, donde R es una fracción racional de dos variables.

4.2.1.- De forma análoga al método expuesto en el apartado 3.1, el cambio de variable

$$\boldsymbol{t = \operatorname{Tgh}\big(x/2\big)\,; \qquad x = 2\operatorname{ArgTgh}(t)\,; \qquad dx = \frac{2}{1-t^2}\,dt}\,,$$

reduce estas primitivas a las de fracciones racionales.

Nota: Es posible también aplicar el argumento de 4.1, puesto que toda fracción racional $R\big(\operatorname{Sh}(x), \operatorname{Ch}(x)\big)$ es una fracción racional $S(e^x)$. (Nótese que $e^x e^{-x} = 1$).

4.2.2.- Los mismos argumentos utilizados en 3.2 pueden ser repetidos, paso por paso, sustituyendo las funciones trigonométricas por las hiperbólicas de igual nombre.

§5 INTEGRALES DEL TIPO $\displaystyle\int R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{m_\nu/n_\nu}\right) dx$.

Pongamos $p = \text{m.c.m.}(n_1, n_2, \ldots, n_\nu)$; el procedimiento general consiste en efectuar el cambio de variable

$$\boldsymbol{\frac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^p, \quad x = \frac{t^p d - b}{a - t^p c} = \varphi(t)\,; \quad dx = \varphi'(t)\,dt}\,.$$

5.1.- Casos particulares. En las situaciones siguientes las funciones φ y φ' son polinomios.

5.1.1.- Integrales del tipo $\displaystyle\int R\Big(x, x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, \ldots, x^{m_\nu/n_\nu}\Big)\,dx$.

5.1.2.- Integrales del tipo $\displaystyle\int R\Big(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, (ax+b)^{m_2/n_2}, \ldots, (ax+b)^{m_\nu/n_\nu}\Big)\,dx$.

5.1.3.- Integrales del tipo $\displaystyle\int R\Big(x, \sqrt[m]{ax+b}\Big)\,dx$.

§6 INTEGRALES BINÓMICAS o BINOMIAS $\displaystyle\int x^m \big(a\,x^n + b\big)^p\,dx$.

Si m,n y p son números racionales, y $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$, haciendo el cambio de variable

$$\boldsymbol{t = x^n\,; \quad x = t^{1/n}\,; \quad dx = \frac{1}{n}\,t^{1/n-1}\,dt}\,,$$

se tiene que $\displaystyle\int x^m \big(a\,x^n + b\big)^p\,dx = \frac{1}{n}\int t^q \big(a\,t + b\big)^p\,dt$. Sobre el último integrando se observa que:

6.1.- Si $p \in \mathbb{Z}$, es de la forma $R(t, t^q)$, con R fracción racional, y la primitiva es del tipo 5.1.1.

6.2.- Si $q \in \mathbb{Z}$, es de la forma $R\big(t, (at+b)^p\big)$, R fracción racional, y la primitiva es del tipo 5.1.2.

6.3.- Si $p+q \in \mathbb{Z}$, se escribe como $\left(\dfrac{at+b}{t}\right)^p t^{p+q}$, que es del tipo estudiado en §5 con $c=1$ y $d=0$.

6.4.- Casos particulares: No es necesaria la reducción al tipo §5 en los siguientes casos:

6.4.1.- Si p es natural, por la fórmula del Binomio de Newton,

$$\int t^q (a\,t+b)^p dt = \int t^q \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k\, b^{p-k}\, t^k = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k\, b^{p-k} \int t^{k+q}\,dt\,.$$

6.4.2.- Si q es natural, con el cambio $\boldsymbol{z = a\,t + b\,;\ t = \dfrac{z-b}{a}\,;\ dt = \dfrac{1}{a}\,dz}$, se reduce al caso anterior:

$$\int t^q\,(a\,t+b)^p\,dt = \frac{1}{a^{q+1}}\int (z-b)^q z^p\,dz\,.$$

6.4.3.- Si $-(p+q+2)$ es natural, mediante el cambio $\boldsymbol{t = \dfrac{1}{z}\,;\ dt = \dfrac{-1}{z^2}\,dz}$, se reduce a 6.4.2:

$$\int t^q\,(a\,t+b)^p\,dt = -\int z^{-(q+p+2)}(a+b\,z)^p\,dz\,.$$

§ 7 INTEGRALES DEL TIPO $\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}\Big)\,dx$.

7.1.- Racionalización. Se exponen cambios de variable según el signo de los coeficientes a y c.

7.1.1.- Si $a>0$, se hace el cambio de variable

$$\boldsymbol{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=\sqrt{a}\,x+t\,; \qquad x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}=r(t)\,; \quad dx=r'(t)\,dt}\,,$$

resultando que $r(t)$ y $r'(t)$ son funciones racionales.

7.1.2.- Si $c>0$, es posible efectuar el cambio

$$\boldsymbol{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=t\,x+\sqrt{c}\,; \qquad x=\frac{2\,t\sqrt{c}-b}{a-t^2}=r(t)\,; \quad dx=r'(t)\,dt}\,,$$

y de nuevo $r(t)$ y $r'(t)$ son racionales.

7.1.3.- Si $c\le 0$ y $a<0$, el trinomio $a\,x^2+b\,x+c$ se anula en dos puntos, entre los cuales es no negativo, es decir, $a\,x^2+b\,x+c=a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$. La relación $\boldsymbol{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=t\,(x-\alpha)}$, es decir, $\boldsymbol{a\,(x-\beta)=t^2\,(x-\alpha)}$, permite considerar el cambio de variable dado por

$$\boldsymbol{x=\frac{a\,\beta-t^2\,\alpha}{a-t^2}=r(t)\,; \quad dx=r'(t)\,dt}\,.$$

7.3.- Reducción a fracciones racionales de funciones trigonométricas o hiperbólicas. Se distinguen dos situaciones generales según el signo de a.

7.3.1.- Si $\boldsymbol{a>0}$ es posible escribir $a\,x^2+b\,x+c=\big(\sqrt{a}\,x+{}^{b}\!/_{2\sqrt{a}}\big)^2+\big(c-{}^{b^2}\!/_{4\,a}\big)$.

7.3.1.1.- Si además $\boldsymbol{c-\frac{b^2}{4\,a}>0}$ denotando $\gamma^2=c-\frac{b^2}{4\,a}$ resulta que

$$a\,x^2+b\,x+c=\gamma^2\Big(\big(\sqrt{a}\,x/\gamma+{}^{b}\!/_{2\gamma\sqrt{a}}\big)^2+1\Big)\,,$$

y al realizar el cambio de variable

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{\gamma}\,x+\frac{b}{2\gamma\sqrt{a}}=t\,; \quad x=\frac{\gamma}{\sqrt{a}}\,t-\frac{b}{2\,a}\,; \quad dx=\frac{\gamma}{\sqrt{a}}\,dt}\,,$$

se obtiene $\displaystyle\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}\Big)\,dx=\int S\Big(t, \sqrt{t^2+1}\Big)\,dt$, donde $S(x,y)$ es una fracción racional. Luego, puesto que $\mathrm{Ch}^2(z)=\mathrm{Sh}^2(z)+1$, el cambio

$$\boldsymbol{t=\mathrm{Sh}(z)\,; \quad \sqrt{t^2+1}=\mathrm{Ch}(z)\,; \quad dt=\mathrm{Ch}(z)\,dz},$$

conduce a $\displaystyle\int S\Big(t, \sqrt{t^2+1}\Big)\,dt=\int S\big(\mathrm{Sh}(z),\mathrm{Ch}(z)\big)\ \mathrm{Ch}(z)\,dz$, que se resuelve según lo expuesto en 4.2.

7.3.1.2.- Si por el contrario se tiene que $\boldsymbol{c-\frac{b^2}{4\,a}<0}$, denotando ahora $\gamma^2=\frac{b^2}{4\,a}-c$, resulta

$$a\,x^2+b\,x+c=\gamma^2\Big(\big(\sqrt{a}\,x/\gamma+{}^{b}\!/_{2\gamma\sqrt{a}}\big)^2-1\Big)\,,$$

y del mismo cambio realizado en 7.3.1.1 se sigue que $\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}\Big)\,dx=\int S\Big(t, \sqrt{t^2-1}\Big)\,dt$, con S fracción racional. En este caso, con el cambio de variable

$$\boldsymbol{t=\mathrm{Ch}(z)\,; \quad \sqrt{t^2-1}=\mathrm{Sh}(z)\,; \quad dt=\mathrm{Sh}(z)\,dz}\,,$$

resulta $\int S\Big(t, \sqrt{t^2-1}\Big)\,dt=\int S\big(\mathrm{Ch}(z),\mathrm{Sh}(z)\big)\ \mathrm{Sh}(z)\,dz$.

7.3.2.- Si $\boldsymbol{a<0}$ $(-a>0)$ se tiene que $a\,x^2+b\,x+c=-\big(\sqrt{-a}\,x-{}^{b}\!/_{2\sqrt{-a}}\big)^2+\big(c-{}^{b^2}\!/_{4\,a}\big)$. Puesto que el trinomio no es negativo siempre debe ser $c-\frac{b^2}{4\,a}>0$; denotando $\gamma^2=c-\frac{b^2}{4\,a}$ resulta

$$a\,x^2+b\,x+c=\gamma^2\Big(1-\big(\sqrt{-a}\,x/\gamma-{}^{b}\!/_{2\gamma\sqrt{-a}}\big)^2\Big)\,,$$

y haciendo el cambio de variable

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{-a}}{\gamma}\,x-\frac{b}{2\gamma\sqrt{-a}}=t\,; \quad x=\frac{\gamma}{\sqrt{-a}}\,t-\frac{b}{2a}\,; \quad dx=\frac{\gamma}{\sqrt{-a}}\,dt}\,,$$

se sigue que $\displaystyle\int R\Big(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}\Big)\,dx = \int S\Big(t, \sqrt{1-t^2}\Big)\,dt$, con S fracción racional. Cualquiera de los dos cambios siguientes transforman el último integrando en una fracción racional de las funciones trigonométricas:

$$\boldsymbol{t = \mathbf{sen}(z)\,; \quad \sqrt{1-t^2} = \mathbf{cos}(z), \quad dt = \mathbf{cos}(z)\,dz\,,}$$
$$\boldsymbol{t = \mathbf{cos}(z)\,; \quad \sqrt{1-t^2} = \mathbf{sen}(z), \quad dt = -\,\mathbf{sen}(z)\,dz\,.}$$

§ 8 MÉTODOS DE RECURRENCIA.

8.1.- Integrales de la forma $\boldsymbol{I_n(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}}$.

En virtud de la fórmula de integración por partes, si se considera $u = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$ y $dv = dx$, se tiene que

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2\,n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx == \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2\,n\Big(\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx - \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}\Big),$$

es decir, $I_n(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^n} + 2\,n\big(I_n(x) - I_{n+1}(x)\big)$, y despejando $I_{n+1}(x)$, se sigue que

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\Big(\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n(x)\Big) \quad \text{para todo } n\,.$$

Aplicando n veces dicha fórmula, el problema se reduce a calcular

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x) + C\,.$$

8.2.- Primitivas de productos de polinomios y funciones trigonométricas o exponenciales.
Se detalla la fórmula de recurrencia para la primitiva de la función $P(x)\,e^{\alpha x}$, donde P es un polinomio de grado $n \geq 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$; de forma similar se procede para calcular $\int P(x)\,\operatorname{sen}(\alpha x)\,dx$ o $\int P(x)\,\cos(\alpha x)\,dx$.
Si se considera $u = P(x)$, $dv = e^{\alpha x}\,dx$, integrando por partes, se obtiene que

$$\int P(x)\,e^{\alpha x}\,dx = \frac{P(x)\,e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int P'(x)\,e^{\alpha x}\,dx\,,$$

y en consecuencia, repitiendo el proceso n veces, el problema se reduce a calcular una primitiva de $P^{n)}(x)\,e^{\alpha x}$, es decir, una primitiva de $\beta\,e^{\alpha x}$, $\beta \in \mathbb{R}$, que es $\dfrac{\beta}{\alpha}e^{\alpha x}$.

8.3.- Si P es un polinomio de dos variables con coeficientes reales, las integrales indefinidas

$$\int P\big(x, \log(x)\big)\,dx\,; \quad \int P\Big(x, \arccos(x)\Big)\,dx\,; \quad \int P\big(x, \operatorname{arcsen}(x)\big)\,dx\,,$$

realizando respectivamente los cambios de variable

$$\boldsymbol{x = e^t\,; \quad x = \mathbf{cos}(t)\,; \quad x = \mathbf{sen}(t)\,,}$$

resultan ser de la forma $\int P(e^t, t)\,e^t\,dt$, $-\int P\big(\cos(t), t\big)\,\operatorname{sen}(t)\,dt$, $\int P\big(\operatorname{sen}(t), t\big)\,\cos(t)\,dt$, y se reducen al caso 8.2 usando las propiedades de la función exponencial o convenientes fórmulas trigonométricas.

§ 9 TABLA DE PRIMITIVAS.

POTENCIALES

- $\displaystyle\int u(x)^a\,u'(x)\,dx = \frac{1}{a+1}\,u(x)^{a+1} + C.\quad (a \neq -1)$

LOGARÍTMICAS

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \log\big(|u(x)|\big) + C.$

EXPONENCIALES

- $\displaystyle\int e^{u(x)}\,u'(x)\,dx = e^{u(x)} + C.$
- $\displaystyle\int a^{u(x)}\,u'(x)\,dx = \frac{1}{\log(a)}\,a^{u(x)} + C.\quad (a > 0,\ a \neq 1)$

TRIGONOMÉTRICAS

- $\displaystyle\int \cos\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx = \operatorname{sen}\big(u(x)\big) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx = -\cos\big(u(x)\big) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\cos^2\big(u(x)\big)}\, dx = \int \sec^2\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx = \int \Big(1 + \operatorname{tg}^2\big(u(x)\big)\Big)\, u'(x)\, dx = \operatorname{tg}\big(u(x)\big) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2\big(u(x)\big)}\, dx = \int \operatorname{cosec}^2\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx = \int \Big(1 + \operatorname{cotg}^2\big(u(x)\big)\Big)\, u'(x)\, dx = -\operatorname{cotg}\big(u(x)\big) + C.$

INVERSAS DE TRIGONOMÉTRICAS

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}\, dx = \operatorname{arcsen}\big(u(x)\big) + C = -\arccos\big(u(x)\big) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}\, dx = \operatorname{arctg}\big(u(x)\big) + C = -\operatorname{arccotg}\big(u(x)\big) + C.$

HIPERBÓLICAS

- $\displaystyle\int \operatorname{Ch}\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx = \operatorname{Sh}\big(u(x)\big) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{Sh}\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx = \operatorname{Ch}\big(u(x)\big) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\operatorname{Ch}^2\big(u(x)\big)}\, dx = \operatorname{Tgh}\big(u(x)\big) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\operatorname{Sh}^2\big(u(x)\big)}\, dx = -\operatorname{CoTgh}\big(u(x)\big) + C.$

ARGUMENTOS HIPERBÓLICOS

- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) + 1}}\, dx = \operatorname{ArgSh}\big(u(x)\big) + C = \log\Big(u(x) + \sqrt{u^2(x) + 1}\Big) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - 1}}\, dx = \operatorname{ArgCh}\big(u(x)\big) + C = \log\Big|u(x) + \sqrt{u^2(x) - 1}\Big| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1 - u^2(x)}\, dx = \operatorname{ArgTgh}\big(u(x)\big) + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1 + u(x)}{1 - u(x)}\right| + C.$

OTRAS

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(a\,x)\operatorname{sen}(b\,x)\, dx = \frac{\operatorname{sen}\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} + C \quad (a^2 - b^2 \neq 0).$
- $\displaystyle\int \cos(a\,x)\cos(b\,x)\, dx = \frac{\operatorname{sen}\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} + C \quad (a^2 - b^2 \neq 0).$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(a\,x)\cos(b\,x)\, dx = -\frac{\cos\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} - \frac{\cos\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} + C \quad (a^2 - b^2 \neq 0).$
- $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen}(b\,x)\, dx = \frac{e^{ax}\big(a\operatorname{sen}(b\,x) - b\cos(b\,x)\big)}{a^2 + b^2} + C.$
- $\displaystyle\int e^{ax}\cos(b\,x)\, dx = \frac{e^{ax}\big(b\operatorname{sen}(b\,x) + a\cos(b\,x)\big)}{a^2 + b^2} + C.$
- $\displaystyle\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\, dx + C.$
- $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen}(ax)\, dx = \frac{-x^n\cos(ax)}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos(ax)\, dx + C.$
- $\displaystyle\int x^n \cos(ax)\, dx = \frac{x^n\operatorname{sen}(ax)}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sen}(ax)\, dx + C.$

§ 1 CONSTRUCCIÓN DE LA INTEGRAL.

Definición 1.1.- Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Se llama *partición* de $[a, b]$ a todo conjunto

$$P = \{ x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b \},$$

donde $x_{i-1} < x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ son los subintervalos de la partición, y su *amplitud* es $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Se llama *diámetro* de la partición al número $\|P\| = \max\{ \Delta x_i : i = 1, 2, \dots, n \}$.

Denotaremos por $\mathcal{P}([a, b])$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

Definición 1.3.- Sean P y Q dos particiones del intervalo $[a, b]$. Se dice que P es *más fina* que Q si $P \supset Q$, es decir, si P se puede obtener añadiendo puntos a Q.

Dadas dos particiones arbitrarias P y Q, la partición $P \cup Q$ se denomina *refinamiento común* a ambas.

Definición 1.4.- Sea f una función real definida en el intervalo $[a, b]$ y acotada. Dada una partición P de $[a, b]$, $P = \{ x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b \}$, para $i = 1, 2, \dots, n$ definimos

$$m_i(f) = \inf\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \} \quad \text{y} \quad M_i(f) = \sup\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \},$$

que son números reales. Cuando no haya lugar a confusión, escribiremos simplemente m_i y M_i.

Se llama *suma inferior de Darboux* asociada a f y a P al valor $s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, y *suma superior de Darboux* asociada a f y a P al valor $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$.

Si $m = \inf\{ f(x) : x \in [a, b] \}$ y $M = \sup\{ f(x) : x \in [a, b] \}$, para cada partición P se tiene

$$m(b - a) \le s(f, P) \le S(f, P) \le M(b - a)\,.$$

Definición 1.6.- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Se define la *integral superior de Riemann* de f en $[a, b]$ como el número real $\overline{\int_a^b} f = \inf\{ S(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b]) \}$, Análogamente, se define la *integral inferior de Riemann* de f en $[a, b]$ como $\underline{\int_a^b} f = \sup\{ s(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b]) \} \in \mathbb{R}$.

Definición 1.8.- Se dice que una función real f, definida en $[a, b]$ y acotada, es *integrable en el sentido de Riemann* o simplemente *integrable Riemann* en $[a, b]$ si $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$; en este caso, al valor de ambas sumas se le denomina *integral de f entre a y b* y se le representa por $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)\,dx$.

En adelante, nos referiremos a las funciones integrables Riemann simplemente como integrables.

Definición 1.10.- Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Dada una partición $P = \{ x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b \}$ de $[a, b]$, y elegido un punto t_i en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, el conjunto $T = \{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$ se denomina *conjunto de puntos intermedios asociado a P*. $\mathcal{T}(P)$ designa la familia de los conjuntos de puntos intermedios asociados a la partición P. Si $T \in \mathcal{T}(P)$ se llama *suma de Riemann asociada a f, a P y a T* al número

$$\sigma(f, P, T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

Proposición 1.12.- Sea f una función real definida en $[a, b]$ y acotada. Son equivalentes:

i) f es integrable en $[a, b]$.

ii) Existe $I(f) \in \mathbb{R}$ que verifica la siguiente propiedad: "Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para toda partición P de $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$ y para cada $T \in \mathcal{T}(P)$ se tiene que $|I(f) - \sigma(f, P, T)| < \varepsilon$.

En este caso, $I(f) = \int_a^b f$.

Corolario 1.14.- Sea f una función real definida en $[a, b]$ e integrable en dicho intervalo. Sea $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de $[a, b]$ con $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$, y $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de conjuntos de puntos intermedios asociados a las particiones de $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$. Entonces $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma(f, P_k, T_k) = \int_a^b f$.

§ 2 PROPIEDADES GENERALES DE LA INTEGRAL.

Teorema 2.1.- Toda función continua en $[a, b]$ es integrable.

Teorema 2.2.- Toda función monótona en $[a, b]$ es integrable.

Proposición 2.3.- Sean f y g funciones reales definidas en $[a, b]$ e integrables, y sea $k \in \mathbb{R}$.

2.3.1.- Linealidad: Las funciones $f + g$ y $k\,f$ son integrables en $[a, b]$, y se tiene que

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \text{y} \qquad \int_a^b kf = k\int_a^b f\,.$$

2.3.2.- Monotonía: Si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g\,.$

2.3.3.- La función $|f|$ es integrable en $[a, b]$, y $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,.$ El recíproco no es cierto, es decir, la integrabilidad de $|f|$ no implica la de f.

Proposición 2.4.- Sea f una función integrable en $[a, b]$ y tal que $f([a, b]) \subset [c, d]$. Sea g una función continua en $[c, d]$. Entonces la función $g \circ f$ es integrable en $[a, b]$.

Corolario 2.5.- Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$. Entonces:

i) f^2 y fg son integrables en $[a, b]$.

ii) Si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq \delta$ para cada $x \in [a, b]$, la función $1/f$ es integrable en $[a, b]$.

Proposición 2.6.- (**aditividad respecto del intervalo**)

i) Si f es integrable en $[a, b]$, lo es en todo subintervalo de $[a, b]$.

ii) Recíprocamente, sea $c \in (a, b)$ de modo que f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Entonces, f es integrable en $[a, b]$, y se tiene que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Notación: Para $\alpha < \beta$ se conviene que $\int_\beta^\alpha f = -\int_\alpha^\beta f$, y $\int_\alpha^\alpha f = 0$. Con este convenio, dados tres números reales cualesquiera α, β, $\gamma \in [a, b]$ se cumple que

$$\int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f = \int_\alpha^\beta f\,. \qquad (\textit{Identidad de Chasles})$$

Proposición 2.7.- Sean f y g funciones acotadas en $[a, b]$ que difieren en un conjunto finito de puntos de $[a, b]$. Entonces, f y g son simultáneamente integrables o no integrables, y, en caso de serlo, se tiene que $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Definición 2.8.- Sea f una función real definida en el intervalo $[a, b]$. Se dice que f es *continua a trozos* si existe una partición $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$ de modo que f es continua en (x_{i-1}, x_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, y existen los límites laterales (finitos) en cada punto de la partición. Si además f es constante en cada subintervalo, se dice *escalonada*.

Se dice que f es *monótona a trozos* si existe una partición $P \in \mathcal{P}([a, b])$ de manera que f es monótona en cada uno de los intervalos (x_{i-1}, x_i) que define P.

Corolario 2.9.- Toda función continua a trozos en $[a, b]$ es integrable.

Corolario 2.10.- Toda función acotada y monótona a trozos en $[a, b]$ es integrable.

Teorema de la Media 2.11.- Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea g una función integrable en $[a, b]$ tal que $g(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f\,g = f(c)\int_a^b g.$$

Observaciones 2.12.-

i) Si se toma g idénticamente igual a 1, se deduce que para una función continua f en $[a, b]$ existe $c \in (a, b)$ de modo que $\int_a^b f = f(c)\,(b - a)$.

ii) Si se suprime la hipótesis de que g sea positiva el resultado es, en general, falso.

§ 3 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL. CONSECUENCIAS.

Teorema Fundamental del Cálculo Integral 3.1.- Sea f una función integrable en $[a,b]$. Se define la función real F dada por $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a,b]$.

i) La función F es continua en $[a,b]$.

ii) Si f es continua en $c \in [a,b]$, F es derivable en c y además $F'(c) = f(c)$.

Observaciones 3.2.-

i) Si c es uno de los extremos del intervalo, la continuidad de f se entiende por la derecha (si $c = a$) o por la izquierda (si $c = b$), deduciéndose la existencia de la derivada lateral correspondiente de F en c.

ii) Si se supone f continua en $[a,b]$, F es de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a,b]$ y se tiene que $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a,b]$. Por lo tanto, F es una primitiva de f, y se concluye que toda función continua en $[a,b]$ admite primitiva.

Regla de Barrow 3.3.- Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea F una primitiva de f en dicho intervalo (i.e., $F'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$). Entonces, para cada $x \in [a,b]$ se verifica que

$$\int_a^x f = F(x) - F(a)\,.$$

Teorema 3.4.- Sea f una función integrable en $[a,b]$ que admite una primitiva, F, en dicho intervalo. Entonces, para cada $x \in [a,b]$ se verifica que $\int_a^x f = F(x) - F(a)$.

Notación: Si F es una función definida en el intervalo $[a,b]$ es usual escribir $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$.

Fórmula de Integración por Partes 3.5.- Sean f y g funciones integrables en $[a,b]$ con primitivas F y G, respectivamente. Se tiene que

$$\int_a^b F\,g = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b f\,G\,,$$

o lo que es lo mismo, $\int_a^b F\,G' = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b F'\,G$.

Teorema del Cambio de Variable 3.6.- Sea φ una función definida en $[c,d]$, derivable y con derivada continua, y de modo que $\varphi([c,d]) \subset [a,b]$. Sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces, se verifica que

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f = \int_c^d (f\circ\varphi)\,\varphi'\,.$$

Corolario 3.7.- Sea φ una función definida en $[c,d]$, derivable y cuya derivada es continua y de signo constante (estas hipótesis garantizan que φ es una biyección, necesariamente monótona, entre $[c,d]$ y un intervalo $[a,b]$). Si f es una función continua en $[a,b]$, se verifica que $\int_a^b f = \int_c^d (f\circ\varphi)\,|\varphi'|$.

Observación 3.8.- Los resultados relativos al teorema del Cambio de Variable se verifican igulamente con la sola hipótesis de la integrabilidad de f, deduciéndose en este caso la integrabilidad de $(f\circ\varphi)\,\varphi'$, y la igualdad de las integrales correspondientes.

§ 4 APLICACIÓN AL CÁLCULO DE ÁREAS, VOLÚMENES Y LONGITUDES.

4.1.- Áreas de recintos planos:

Consideremos el recinto R del plano limitado por las rectas verticales $x = a$, $x = b$ (con $a < b$) y las gráficas de dos funciones f y g, continuas en $[a,b]$, y tales que $f(x) \geq g(x)$, para cada $x \in [a,b]$.

El *área* de este recinto se define como

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Esto se generaliza al caso de funciones arbitrarias f y g, mediante la fórmula

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

4.2.- Longitudes de curvas paramétricas:

Se llama curva paramétrica plana de clase $\mathcal{C}^1$ a toda aplicación $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, es decir, un par de funciones $(x(t), y(t))$ definidas en $[a,b]$, tal que las funciones x e y son derivables con continuidad en el intervalo $[a,b]$.

La *longitud* de la curva γ es el número

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$

En particular, si la curva viene dada como la gráfica de una función $y = f(x)$, se obtiene

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

4.3.- Áreas y volúmenes de revolución:

Sea f una función continua y positiva en el intervalo $[a,b]$. Se considera el sólido V de $\mathbb{R}^3$ limitado por los planos $x = a$, $x = b$ y la superficie S obtenida al girar la gráfica de f alrededor del eje OX.

El *área* de la superficie S es

$$2\pi \int_a^b f(x)\, \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,,$$

y el *volumen* de V es

$$\pi \int_a^b f(x)^2\, dx\,.$$

4.4.- Cálculo de volúmenes por secciones:

Sea V un sólido de $\mathbb{R}^3$ comprendido entre los planos $z = a$ y $z = b$, con $a < b$. Se supone que para cada $t \in [a,b]$ el área, $A(t)$, de la superficie obtenida como intersección del sólido V con el plano $z = t$ está bien definida. Bajo ciertas condiciones, que se verifican para las figuras geométricas habituales (esferas, prismas, etc.), el volumen de V está bien definido y resulta ser

$$\int_a^b A(t)\, dt\,.$$

§ 5 Resultados Adicionales.

Proposición 5.1.- Sea f una función integrable en $[-\alpha, \alpha]$, con $\alpha > 0$.

i) Si f es par, $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\, dt = 2\int_0^{\alpha} f(t)\, dt\,.$

ii) Si f es impar, $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\, dt = 0\,.$

Proposición 5.2.- Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y periódica de periodo α. La función F, definida en $\mathbb{R}$ por $\displaystyle F(x) = \int_x^{x+\alpha} f(t)\, dt$, es constante.

En particular, si f es periódica, de periodo 2π, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \int_{\pi/2}^{5\pi/2} f(t)\, dt\ \ldots$$

Proposición 5.3.- Sea f una función real continua en $\mathbb{R}$, y sean u y v dos funciones reales derivables en $\mathbb{R}$. Se define la aplicación g en $\mathbb{R}$ mediante

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt\,.$$

Entonces g es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$g'(x) = f\big(v(x)\big)\, v'(x) - f\big(u(x)\big)\, u'(x)\,.$$

§1 DEFINICIONES Y PRIMERAS PROPIEDADES.

Definición 1.1.- Sea f una función real definida en un intervalo I de la recta real (de cualquier naturaleza, cerrado o no, acotado o no). Se dice que f es *localmente integrable* en I (*en el sentido de Riemann*) si es integrable (en el sentido de Riemann, se sobreentiende) en todo intervalo cerrado y acotado contenido en I.

Definición 1.2.- Sea f una función real definida en un intervalo de la forma $[a, b)$, donde a es un número real y b puede ser un número real o $+\infty$. Supongamos que f es localmente integrable en $[a, b)$, lo que equivale a que f sea integrable en $[a, x]$ para cada $x \in (a, b)$. Se dice que f es *integrable en el sentido impropio* en $[a, b)$ si existe y es finito el límite $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$. En este caso dicho límite se denomina *integral impropia* de f en $[a, b)$ y se denota por

$$\int_a^{\to b} f(x)\, dx \qquad \text{o} \qquad \int_a^{\to b} f\,.$$

Observación 1.3.- En la práctica, el hecho de que f sea integrable en el sentido impropio en $[a, b)$ se expresa también diciendo que la *integral impropia* $\int_a^{\to b} f(x)\, dx$ es *convergente*. Estudiar la *naturaleza* o *carácter* de la integral impropia consiste en determinar su convergencia o su no convergencia.

De forma análoga se definen las integrales impropias de la forma $\displaystyle\int_{\to a}^{b} f(x)\, dx$, con $a \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$.

Definición 1.7.- Sea f una función real definida en un intervalo (a, b). Se dice que f es *integrable en el sentido impropio* en (a, b) si existe $c \in (a, b)$ tal que f es integrable en el sentido impropio en $(a, c]$ y $[c, b)$, es decir, tal que las dos integrales impropias $\int_{\to a}^{c} f$ y $\int_c^{\to b} f$ son convergentes, y en este caso la *integral impropia* de f en (a, b) es el número

$$\int_{\to a}^{\to b} f \;=\; \int_{\to a}^{c} f + \int_c^{\to b} f\,.$$

Observaciones 1.8.-

i) Ni la integrabilidad de f en el sentido impropio, ni el valor de la integral, dependen del punto c que aparece en la definición. También se deduce que si para un $c \in (a, b)$ se tiene que al menos una de las integrales $\int_{\to a}^{c} f$ o $\int_c^{\to b} f$ no converge, entonces f no es integrable en (a, b).

ii) Como en las situaciones anteriores, decir que la *integral impropia* $\int_{\to a}^{\to b} f$ *converge* es otra forma de expresar que f es integrable en el sentido impropio en (a, b).

Proposición 1.9.- Si f es una función real, acotada e integrable en el sentido de Riemann en el intervalo compacto $[a, b]$, entonces la integral impropia de f en $[a, b)$ converge y además su valor coincide con la integral de Riemann de f en $[a, b]$, i.e. $\int_a^{\to b} f(x)\, dx \;=\; \int_a^b f(x)\, dx$.

Recíprocamente, si g es una función acotada y localmente integrable en el intervalo acotado $[a, b)$, entonces la integral impropia $\int_a^{\to b} g$ converge. Es más, fijado cualquier $\ell \in \mathbb{R}$, la función $\widetilde{g}(x) \;=\; \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [a, b), \\ \ell & \text{si } x = b, \end{cases}$ es integrable Riemann en $[a, b]$ y $\int_a^{\to b} g(x)\, dx \;=\; \int_a^b \widetilde{g}(x)\, dx$.

Observaciones 1.10.-

i) Según lo anterior es habitual expresar las integrales impropias con la notación $\int_a^b f$, siendo fácil determinar en cada caso concreto si se trata de una integral de Riemann o de una integral impropia.

ii) En la práctica suele suceder que la función g es continua en $[a, b)$ y existe y es finito el límite $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = \ell$. Si se elige este valor para definir la función $\widetilde{g}$, ésta resulta ser continua en $[a, b]$.

iii) La convergencia de la integral $\int_a^{\to b} f$ ($b \in \mathbb{R}$ o $b = \infty$) no implica la existencia del límite $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.

En el apartado anterior se contemplan únicamente intervalos acotados; la existencia del límite $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ no implica la convergencia de la integral impropia $\int_a^{\to \infty} f$.

Definición 1.11.- Sean (a,b) un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y f una función real definida en (a,b), excepto quizá en una cantidad finita de puntos a_1, a_2, …, a_{n-1}, con $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$. Se supone también que f es localmente integrable en todos los intervalos (a_{k-1}, a_k), $k = 1, 2, \ldots, n$. Se dice que f es *integrable en el sentido impropio* en (a,b) si lo es en cada intervalo (a_{k-1}, a_k), y en este caso la *integral impropia* de f en (a,b) es el número

$$\int_{\to a}^{\to a_1} f + \int_{\to a_1}^{\to a_2} f + \ldots + \int_{\to a_{n-1}}^{\to b} f \;=\; \sum_{k=1}^{n} \int_{\to a_{k-1}}^{\to a_k} f\,.$$

Observación 1.12.- Con la notación de la definición anterior, en la práctica se habla simplemente de la integral impropia de f en (a,b), denotada simplemente por $\int_a^b f(x)\,dx$ o $\int_a^b f$, tal como se sugiere en 1.10.i.

Proposición 1.13.- Sean f y g funciones reales definidas e integrables en el sentido impropio en el intervalo $[a,b)$. Si α, β son números reales la función $\alpha f + \beta g$ (localmente integrable en $[a,b)$ por serlo f y g) es integrable en el sentido impropio en $[a,b)$, y además $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g) \;=\; \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

Regla de Barrow 1.14.- Sea f una función localmente integrable en (a,b). Se supone que existe una primitiva G de f en (a,b). La integral impropia de f en (a,b) converge si, y sólo si, existen y son finitos los dos límites $\lim_{x\to a^+} G(x)$ y $\lim_{x\to b^-} G(x)$, en cuyo caso

$$\int_a^b f \;=\; \lim_{x\to b^-} G(x) - \lim_{x\to a^+} G(x) \;=\; G(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b}.$$

Cambio de variable 1.16.- Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ de extremos α y β, con $\alpha < \beta$ y pudiendo ser infinito uno de ellos o los dos. Sea φ una función real definida y de clase $\mathcal{C}^1$ en I, de modo que $\varphi'(t) \neq 0$ para cada $x \in I$. El conjunto imagen de φ es un intervalo J, que supondremos de extremos a y b, con $a < b$ y pudiendo ser alguno de ellos infinito. Si f es una función real definida y localmente integrable en J, entonces la función definida en I por $t \mapsto f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|$ es localmente integrable en I, las integrales impropias $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$ tienen el mismo carácter, y si convergen, se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt\,.$$

Observación 1.17.- Si $\varphi(\alpha^+) = \lim_{t\to\alpha^+} \varphi(t)$ y $\varphi(\beta^-) = \lim_{t\to\beta^-} \varphi(t)$ la última igualdad se representa también

$$\int_{\varphi(\alpha^+)}^{\varphi(\beta^-)} f(x)\,dx \;=\; \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Integración por partes 1.18.- Sean f y g funciones reales de clase $\mathcal{C}^1$ en un intervalo (a,b) de modo que existen y son finitos los límites $\lim_{x\to b^-} f(x)\,g(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)\,g(x)$. Entonces las integrales impropias $\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt$ y $\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$ tienen el mismo carácter. Además, si convergen,

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt \;=\; f(x)\,g(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b} - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt\,.$$

§ 2 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES POSITIVAS.

La mayoría de los resultados se enuncian, por brevedad, para integrales en intervalos de la forma $[a,b)$, pero pueden adaptarse a las otras situaciones.

Teorema 2.1.- (*Criterio de comparación*) Sean f y g funciones reales definidas y localmente integrables en un intervalo $[a,b)$, tales que existe $c \in (a,b)$ de modo que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in (c,b)$. Entonces:

i) Si $\int_a^b g$ converge, también converge $\int_a^b f$.

ii) Si $\int_a^b f$ no converge, tampoco converge $\int_a^b g$.

Corolario 2.3.- Sean f y g dos funciones reales definidas y localmente integrables en un intervalo $[a,b)$, tales que existe $c \in (a,b)$ de modo que $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ para cada $x \in (c,b)$. Supongamos que existe (finito o no) el límite $\lim_{x\to b^-} f(x)/g(x) = L$.

i) Si $L \in (0, \infty)$, entonces las integrales $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ tienen el mismo carácter.

ii) Si $L = +\infty$ y $\int_a^b g$ no converge, entonces $\int_a^b f$ no converge.

iii) Si $L = 0$ y $\int_a^b g$ converge, entonces $\int_a^b f$ converge.

Proposición 2.4.- Sea f una función definida, no negativa y localmente integrable en el intervalo $[a, b)$. Entonces la integral impropia $\int_a^b f$ converge si, y sólo si, existe una sucesión creciente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $[a, b)$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ tal que la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f$ converge. En este caso, para cada sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de $[a, b)$ que crece hacia b, se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^{y_1} f + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_n}^{y_{n+1}} f .$$

Corolario 2.5.- Sea f una función decreciente (esto asegura la integrabilidad local de f) y no negativa definida en $[a, \infty)$. Entonces la integral $\int_a^{\infty} f$ converge si, y sólo si, la serie numérica $\sum_{n\geq a} f(n)$ es convergente.

Corolario 2.6.- Sea $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ decreciente y no negativa, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se supone que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $(a, b]$ que decrece estrictamente hacia a y tal que la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_{n+1})\,(x_n - x_{n+1})$ es convergente. Entonces la integral impropia de f en $(a, b]$ es convergente; además,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq f(x_1)\,(b - x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} f(x_{n+1})\,(x_n - x_{n+1}) .$$

Definición 2.7.- Sea f una función definida y localmente integrable en $[a, b)$ (lo que implica que la función $|f|$ lo es). Se dice que f es *absolutamente integrable* (en el sentido *impropio*) en $[a, b)$, o que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge absolutamente*, si la integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ es convergente.

Proposición 2.8.- Si la integral impropia $\int_a^b f$ converge absolutamente, entonces converge y además

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx .$$

Observación 2.9.- En la teoría de la integral de Riemann, la integrabilidad de una función acotada f en un intervalo compacto $[a, b]$ implica la integrabilidad de $|f|$ en ese intervalo. Sin embargo, la convergencia de una integral impropia no implica su convergencia absoluta.

§3 FUNCIONES TEST.

Proposición 3.1.- Sean a, b números reales con $a < b$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Las integrales impropias

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\theta}} \qquad \text{y} \qquad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\theta}}$$

son convergentes si, y sólo si, $\theta < 1$. En este caso el valor de ambas integrales es $\dfrac{(b-a)^{1-\theta}}{1-\theta}$.

Proposición 3.2.- Sean a, θ números reales.

i) Si $a > 0$ la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\theta}}$ es convergente si, y sólo si, $\theta > 1$. En este caso su valor es $\dfrac{a^{1-\theta}}{\theta-1}$.

ii) Si $a < 0$ la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \frac{dx}{(-x)^{\theta}}$ converge si, y sólo si, $\theta > 1$. En este caso su valor es $\dfrac{(-a)^{1-\theta}}{\theta-1}$.

Proposición 3.3.- Sean β y γ números reales.

i) Si $0 < a < 1$ la integral impropia $\displaystyle\int_0^{a} \frac{dx}{x^{\gamma}\,|\log(x)|^{\beta}}$ converge únicamente si $\gamma < 1$ o si $\gamma = 1$ y $\beta > 1$.

ii) Si $a > 1$ la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\gamma}\,|\log(x)|^{\beta}}$ converge únicamente si $\gamma > 1$ o si $\gamma = 1$ y $\beta > 1$.

Proposición 3.4.- Sean β y γ números reales.

i) Si $a \in \mathbb{R}$ la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\infty} e^{-\beta x}\,dx$ converge si, y sólo si, $\beta > 0$, en cuyo caso su valor es $\dfrac{e^{-\beta a}}{\beta}$.

ii) Si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{x^{\gamma}}\,dx$ converge únicamente si $\beta > 0$ o si $\beta = 0$ y $\gamma > 1$.

Los resultados anteriores están contemplados en la siguiente tabla. En la columna de la derecha se dan los casos, en función de los valores de los parámetros, para los cuales la integral impropia de la función en el intervalo que se cita es convergente; para otros casos la integral no es convergente.

Función	**Intervalo de integración**	**Rango de validez de los parámetros**
$\dfrac{e^{\alpha\,(b-x)^{\varrho}}}{(b-x)^{\gamma}\,\lvert\log(b-x)\rvert^{\beta}}$	$[a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $b-a<1$	*i)* $\varrho < 0$, $\alpha < 0$ *ii)* $\{\alpha = 0$ ó $\varrho \geq 0\}$, $\gamma < 1$ *iii)* $\{\alpha = 0$ ó $\varrho \geq 0\}$, $\gamma = 1$, $\beta > 1$
$\dfrac{e^{\alpha\,(x-a)^{\varrho}}}{(x-a)^{\gamma}\,\lvert\log(x-a)\rvert^{\beta}}$	$(a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $b-a<1$	*i)* $\varrho < 0$, $\alpha < 0$ *ii)* $\{\alpha = 0$ ó $\varrho \geq 0\}$, $\gamma < 1$ *iii)* $\{\alpha = 0$ ó $\varrho \geq 0\}$, $\gamma = 1$, $\beta > 1$
$\dfrac{e^{\alpha\,x^{\varrho}}}{x^{\gamma}\,\log(x)^{\beta}}$	$[a,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $a>1$	*i)* $\varrho > 0$, $\alpha < 0$ *ii)* $\{\alpha = 0$ ó $\varrho \leq 0\}$, $\gamma > 1$ *iii)* $\{\alpha = 0$ ó $\varrho \leq 0\}$, $\gamma = 1$, $\beta > 1$
$\dfrac{e^{\alpha\,\lvert x\rvert^{\varrho}}}{\lvert x\rvert^{\gamma}\,\log(\lvert x\rvert)^{\beta}}$	$(-\infty,a]$, $a \in \mathbb{R}$, $a<-1$	*i)* $\varrho > 0$, $\alpha < 0$ *ii)* $\{\alpha = 0$ ó $\varrho \leq 0\}$, $\gamma > 1$ *iii)* $\{\alpha = 0$ ó $\varrho \leq 0\}$, $\gamma = 1$, $\beta > 1$

Observación 3.5.- La comparación con las funciones test anteriores suele realizarse de la siguiente forma: si g es una de tales funciones, y f es otra función definida y localmente integrable en el intervalo $[a,b)$, la existencia del límite (finito o no) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)/g(x) > 0$ garantiza que también f es positiva en un intervalo (c,b), por lo que es aplicable el corolario 2.3.

Lo mismo en las otras situaciones: $(a,b]$, etc.

Observación 3.6.- Sean f y g dos funciones definidas en un mismo intervalo (a,b) de la recta real y tales que convergen las dos integrales impropias $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$.

i) La integral impropia $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ no tiene por qué ser convergente.

ii) Pero si las dos integrales impropias de f y g en (a,b) son absolutamente convergentes y una de las dos funciones es acotada, entonces converge absolutamente la integral impropia $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$.

TEMA 9 — FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES. LÍMITES Y CONTINUIDAD

§ 1 EL ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.- Para $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas las n-uplas ordenadas $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales. A x_k lo llamaremos *coordenada k-ésima de $\boldsymbol{x}$*.

Se definen la *suma* de elementos de $\mathbb{R}^n$ y el *producto de un escalar por un elemento de* $\mathbb{R}^n$ como sigue: para $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \qquad \alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ con estas operaciones es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Definición 1.3.- En $\mathbb{R}^n$ se define el *producto interno* o *escalar* como la forma bilineal dada por:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Es también usual denotar el producto interno de los vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ por $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

Proposición 1.4.- El producto interno verifica las siguientes propiedades:

P1: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$, para cada $\boldsymbol{x} \in X$, y $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ si, y sólo si, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$.

P2: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$, para todos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

P3: $\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle$, para todos $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

P4: $\langle \lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, y para todos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

P5: Para cada par de elementos $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$, $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2 \leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle$ (*Desigualdad de Schwarz*).

Definición 1.5.- Para cada elemento $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ se define su *norma euclídea* $\|\boldsymbol{x}\|$ por

$$\|\boldsymbol{x}\| = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}.$$

Proposición 1.6.- La aplicación $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \|\boldsymbol{x}\| \in \mathbb{R}$ verifica las siguientes propiedades:

N1: $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

N2: $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ si, y sólo si, $\boldsymbol{x} = 0$.

N3: $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\, \|\boldsymbol{x}\|$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

N4: $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ (*Desigualdad triangular*).

Observaciones 1.7.-

i) Se llama *norma* a cualquier aplicación en un espacio vectorial real que verifica las cuatro propiedades de la proposición anterior. Otras normas notables sobre $\mathbb{R}^n$ son las siguientes:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

ii) Dados dos elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ se define su *distancia* como $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. El concepto de distancia permite abordar rigurosamente la idea de "proximidad" a la que nos referíamos anteriormente.

§ 2 TOPOLOGÍA DE LOS ESPACIOS EUCLÍDEOS.

Definición 2.1.- Sean $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Se define la *bola abierta* (resp. *cerrada*) de *centro* $\boldsymbol{x}$ y *radio* r como el conjunto $B(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < r\}$ (resp. $\overline{B}(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq r\}$).

Definición 2.2.- Sea E un conjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que un punto $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$ es *interior a* E si existe una bola abierta de centro $\boldsymbol{x}$ contenida en E. El conjunto de todos los puntos interiores de E se denomina *interior* de E y se representa por $\overset{\circ}{E}$ ($\overset{\circ}{E} \subset E$). Se dice que E es *abierto* si $E \subset \overset{\circ}{E}$.

Ejemplos 2.3.- Toda bola abierta es un conjunto abierto. Las bolas cerradas no son conjuntos abiertos. Los productos cartesianos de intervalos abiertos $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.4.- El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total $\mathbb{R}^n$ son abiertos. Además:

i) Si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos abiertos, entonces la unión $\bigcup_{i\in I} G_i$ es un conjunto abierto.

ii) Si $\{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ es una familia finita de conjuntos abiertos, entonces $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_k$ es abierto.

Definición 2.5.- Se dice que un conjunto E de $\mathbb{R}^n$ es *cerrado* si su complementario es un conjunto abierto.

Ejemplos 2.6.- Toda bola cerrada es un conjunto cerrado. Las bolas abiertas no son conjuntos cerrados. Los productos cartesianos de intervalos cerrados $[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\cdots\times[a_n, b_n]$ son conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.7.- El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total $\mathbb{R}^n$ son cerrados. Además:

i) Si $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos cerrados, entonces la intersección $\bigcap_{i\in I} F_i$ es un conjunto cerrado.

ii) Si $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ es una familia finita de conjuntos cerrados, entonces $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ es cerrado.

Definición 2.8.- Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que un punto $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$ es *de acumulación* de E si para cada bola abierta $B(\boldsymbol{x}, r)$ centrada en $\boldsymbol{x}$, la intersección $B(\boldsymbol{x}, r) \cap E$ contiene al menos un punto de E distinto de $\boldsymbol{x}$. El conjunto de todos los puntos de acumulación se denomina *derivado* de E y se representa por E'.

Se denomina *adherencia* de E, y se representa por $\overline{E}$, el conjunto $\overline{E} = E \cup E'$.

Se define la *frontera* de E, y se representa por $\mathrm{Fr}(E)$, como el conjunto $\mathrm{Fr}(E) = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus E}$.

Proposición 2.9.- Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

i) E es cerrado si, y sólo si $E = \overline{E}$, si, y sólo si, $E' \subset E$.

ii) Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ es de acumulación de E, cualquier bola abierta $B(\boldsymbol{x}, r)$ contiene infinitos puntos de E.

iii) $\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Fr}(\mathbb{R}^n \setminus E)$.

Definición 2.10.- Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que E es un conjunto *acotado* si existe una constante $M > 0$ tal que $\|\boldsymbol{x}\| \leq M$ para cada $\boldsymbol{x} \in E$.

Definición 2.11.- Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es *compacto* si es simultáneamente cerrado y acotado.

§ 3 SUCESIONES EN $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.1.- Una sucesión $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^n$ se dice *convergente* si existe un punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural k_0 para el cual $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon$ para cada $k \geq k_0$.

En este caso, diremos que $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *converge hacia* $\boldsymbol{x}$ o que $\boldsymbol{x}$ *es el límite de la sucesión* $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Proposición 3.2.- Si la sucesión $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente su límite es único. En este caso, si la sucesión converge hacia $\boldsymbol{x}$, se escribe $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$.

Observación 3.3.- Una sucesión $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia $\boldsymbol{x}$ si, y sólo si, $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| = 0$.

Definición 3.4.- Se dice que la sucesión está *acotada* si lo está su rango, es decir, si existe una constante $M \geq 0$ tal que $\|\boldsymbol{x}_k\| \leq M$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.5.- Toda sucesión convergente es acotada.

Proposición 3.6.- Sea $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{R}^n$. Pongamos $\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k})$, $k \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{x_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergen hacia x_j, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Corolario 3.7.- Sean $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}, \{\boldsymbol{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$ dos sucesiones de elementos de $\mathbb{R}^n$ y $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Supongamos que $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\{\boldsymbol{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

i) $\lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ **ii)** $\lim_{k\to\infty} \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \alpha \boldsymbol{x}$ **iii)** $\lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{y}_k) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$. **iv)** $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}_k\| = \|\boldsymbol{x}\|$.

§ 4 LÍMITES.

Definición 4.1.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Se dice que $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^m$ es el *límite* de la aplicación $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{a}$ si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{l}\| < \varepsilon$ para cada $\boldsymbol{x} \in A$, con $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$.

Observación 4.2.- En la definición anterior intervienen dos normas, una definida en $\mathbb{R}^n$ y otra en $\mathbb{R}^m$. La distinción entre ambas viene dada por el contexto.

Proposición 4.3.- Si la aplicación $\boldsymbol{f}$ tiene límite en el punto $\boldsymbol{a}$, éste es único.
Si la aplicación $\boldsymbol{f}$ tiene límite $\boldsymbol{l}$ en el punto $\boldsymbol{a}$ se escribe $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l}$ o $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{l}$, cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$.

Definición 4.4.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y $\boldsymbol{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$. Si $B \subset A$ y $\boldsymbol{a}$ es también punto de acumulación de B, el límite $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}_{|_B}(\boldsymbol{x})$, si existe, se denomina *límite de la aplicación $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{a}$ siguiendo (o a través de) el subespacio B* y se denota por $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in B}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Teorema 4.5.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y $\boldsymbol{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$. Son equivalentes:

i) $\boldsymbol{f}$ tiene límite $\boldsymbol{l}$ en el punto $\boldsymbol{a}$.

ii) Para cada subconjunto $B \subset A$ tal que $\boldsymbol{a} \in B'$, $\boldsymbol{f}$ tiene límite en $\boldsymbol{a}$ a través de B, y éste es precisamente $\boldsymbol{l}$.

Corolario 4.6.- (**Criterio secuencial**) Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Son equivalentes:

i) $\boldsymbol{f}$ tiene límite en $\boldsymbol{a}$.

ii) Para cada sucesión $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de puntos de A con $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}$, $k = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$, la sucesión $\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente.

Además, si $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l}$, se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{l}$ para cada sucesión $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de puntos de A, distintos de $\boldsymbol{a}$, y convergente hacia $\boldsymbol{a}$.

Definición 4.7.- Para cada $j = 1, 2, \ldots, m$ la aplicación $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto \pi_j(\boldsymbol{x}) = x_j$ se denomina *proyección j-ésima* en $\mathbb{R}^m$.

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación, la función real $f_j = \pi_j \circ \boldsymbol{f}$ se denomina *componente j-ésima* de $\boldsymbol{f}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. En esta situación es usual denotar $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Proposición 4.8.- Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A, y $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\colon A \to \mathbb{R}^m$. Entonces $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$ si, y sólo si, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_j(\boldsymbol{x}) = \ell_j \in \mathbb{R}$ para cada $j = 1, 2, \ldots, m$.

Propiedades 4.10.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A. Si $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ son funciones de A en $\mathbb{R}^m$ y h es una función de A en $\mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l}$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$ y $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = \lambda$, entonces:

i) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{k}$. **ii)** $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (h\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \lambda\, \boldsymbol{l}$. **iii)** $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{k}$.

iv) Si $\lambda \neq 0$, y $h(\boldsymbol{x}) \neq 0$ para cada $\boldsymbol{x} \in A$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} 1/h(\boldsymbol{x}) = 1/\lambda$.

Definición 4.11.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Se dice que $\boldsymbol{f}$ es *acotada* si existe una constante $M \geq 0$ tal que $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\| \leq M$ para cada $\boldsymbol{x} \in A$.

Proposición 4.12.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Si $\boldsymbol{f}$ tiene límite en $\boldsymbol{a}$, existe un número real $\delta > 0$ tal que $\boldsymbol{f}$ está acotada en $A \cap \big(B(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}\big)$.

Proposición 4.13.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A. Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{g}\colon A \to \mathbb{R}^m$ son aplicaciones tales que $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0$ y $\boldsymbol{g}$ está acotada en $A \cap \big(B(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}\big)$ para algún número real $\delta > 0$, entonces $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0$.

Proposición 4.14.- Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si existe $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(x) = \ell \neq 0$, entonces f tiene el mismo signo que ℓ en los puntos de un entorno de $\boldsymbol{a}$ distintos de él, es decir:

i) Si $\ell > 0$, dados números reales α y β con $0 < \alpha < \ell < \beta$, existe un número real $\delta > 0$ tal que para cada $\boldsymbol{x} \in A \cap B(\boldsymbol{a}, \delta)$ con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$, se verifica que $\alpha < f(\boldsymbol{x}) < \beta$.

ii) Si $\ell < 0$, dados números reales α y β con $\alpha < \ell < \beta < 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que para cada $\boldsymbol{x} \in A \cap B(\boldsymbol{a}, \delta)$ con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$, se verifica que $\alpha < f(\boldsymbol{x}) < \beta$.

Proposición 4.16.- Sea f una función real definida en una bola $B(\boldsymbol{x}_0, r) \subset \mathbb{R}^2$. f tiene límite ℓ en el punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$ si, y sólo si, la función $g\colon (0, r) \to [0, \infty)$ definida por

$$g(\varrho) = \sup\Big\{\big|f\big(x_0 + \varrho\cos(\theta), y_0 + \varrho\operatorname{sen}(\theta)\big) - \ell\big| \;:\; \theta \in [0, 2\pi]\Big\}$$

verifica que $\lim\limits_{\varrho\to 0} g(\varrho) = 0$.

§ 5 CONTINUIDAD.

Definición 5.1.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Se dice que $\boldsymbol{f}$ es *continua en* $\boldsymbol{a}$ si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\| < \varepsilon$ para cada $\boldsymbol{x} \in A$, con $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$. Si $\boldsymbol{f}$ es continua en todos los puntos de A, se dice que $\boldsymbol{f}$ es *continua en* A.

Ejemplos 5.2.- La norma euclídea y las proyecciones $\pi_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 5.3.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $\boldsymbol{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$. Si $\boldsymbol{a}$ es un punto de acumulación de A, entonces $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{a}$ si, y sólo si, tiene límite en $\boldsymbol{a}$ y verifica $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

Teorema 5.4.- Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Entonces $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{a}$ si, y sólo si, cada una de las funciones componentes $f_1, f_2, \ldots, f_m$ es continua en $\boldsymbol{a}$.

Proposición 5.5.- Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a}$ un punto de A. Sean $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}\colon \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ y $h\colon A \to \mathbb{R}$. Supongamos que $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ y h son continuas en $\boldsymbol{a}$. Entonces también son continuas en $\boldsymbol{a}$ las siguientes aplicaciones

$$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}\,, \qquad h\,\boldsymbol{f}\,, \qquad \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g} \qquad \text{y} \qquad 1/h \quad (\text{si } h(\boldsymbol{a}) \neq 0)$$

Teorema 5.6.- Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$. Sean $\boldsymbol{f}\colon A \to B$ y $\boldsymbol{g}\colon B \to \mathbb{R}^p$ aplicaciones tales que $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{g}$ es continua en $f(\boldsymbol{a}) \in B$. Entonces la aplicación compuesta $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{a}$.

Observación 5.8.- Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}\big((-\infty, \alpha)\big) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) < \alpha\}$ es abierto, mientras que el conjunto $f^{-1}\big((-\infty, \alpha]\big) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) \leq \alpha\}$ es cerrado.

Teorema de Weierstrass 5.9.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}$ una función continua de A en $\mathbb{R}^m$. Si K es un subconjunto compacto de A, entonces $\boldsymbol{f}(K)$ es compacto.

Corolario 5.10.- Sean K un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f\colon K \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f es acotada y alcanza sus extremos, es decir, existen dos puntos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ de K tales que $f(\boldsymbol{a}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{b})$ para cada $\boldsymbol{x} \in K$.

5.11.- Aplicaciones Lineales.

Definición 5.11.1.- Una aplicación $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice *lineal* si $L(\lambda\,\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \lambda\,L(\boldsymbol{x}) + \mu\,L(\boldsymbol{y})$ para todos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.11.3.- Si $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal entonces L es continua en todo $\mathbb{R}^n$. Más aún, existe una constante $M \geq 0$ tal que $\|L(\boldsymbol{x})\| \leq M\ \|\boldsymbol{x}\|$ para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

§ 6 CONJUNTOS CONEXOS.

Definición 6.1.- Se dice que un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ es *no conexo* si existen dos conjuntos abiertos U y V tales que $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ y $A \cap U \cap V = \emptyset$. En caso contrario, se dice que A es *conexo*.

Proposición 6.2.- Un subconjunto de la recta real es conexo si, y sólo si, es un intervalo.

Proposición 6.3.- Sean A un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}$ una aplicación continua de A en $\mathbb{R}^m$. Si B es un subconjunto conexo de A, entonces $\boldsymbol{f}(B)$ es conexo.

Definición 6.4.- Se dice que un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ es *arco-conexo* si para cada par de puntos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de A, existe una aplicación continua $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to A$ tal que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{\gamma}(1) = \boldsymbol{y}$. La aplicación $\boldsymbol{\gamma}$ recibe el nombre de *arco* o *camino* que une $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

Ejemplos 6.5.-

6.5.1.- Se dice que un conjunto A es *convexo* si para cada par de puntos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de A el segmento que los une está contenido en A, es decir, si se tiene que $(1-t)\,\boldsymbol{x} + t\,\boldsymbol{y} \in A$ para cada $t \in [0,1]$. Los conjuntos convexos son arco-conexos. En particular, $\mathbb{R}^n$, las bolas abiertas y las bolas cerradas son conjuntos arco-conexos.

6.5.2.- Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a} \in A$. Se dice que A es *estrellado respecto de* $\boldsymbol{a}$ si para cada $\boldsymbol{x} \in A$ el segmento que une $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{x}$ está contenido en A, es decir, si $(1-t)\,\boldsymbol{a} + t\,\boldsymbol{x} \in A$ para cada $t \in [0,1]$. Los conjuntos convexos son estrellados respecto de todos sus puntos.

Proposición 6.6.- Todo subconjunto arco-conexo A de $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Proposición 6.7.- Si A es un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$ entonces A es arco-conexo.

TEMA 10 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES. CÁLCULO DIFERENCIAL

§ 1 DERIVABILIDAD Y DIFERENCIABILIDAD.

Definición 1.1.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Dado un elemento $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, se dice que $\boldsymbol{f}$ admite *derivada direccional en el punto $\boldsymbol{x}_0$ según la dirección de $\boldsymbol{v}$* si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{h} \in \mathbb{R}^m,$$

y se denota por $d_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ o $D_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$.

Cuando se considera el vector $\boldsymbol{v}_i = (0, 0, \dots, \overset{i)}{1}, \dots, 0)$, el límite anterior recibe el nombre de *derivada parcial de $\boldsymbol{f}$ respecto de x_i en el punto $\boldsymbol{x}_0$*, y se denota por $D_i\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ o $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)$.

Si la aplicación $\boldsymbol{f}$ admite derivadas parciales respecto de todas las variables en el punto $\boldsymbol{x}_0$ se dice que es *derivable* en dicho punto. Cuando $\boldsymbol{f}$ es derivable en cada punto de A se dice que es *derivable en A*.

Observaciones 1.2.-

ii) La segunda notación para las derivadas parciales es, sin duda, la de uso más extendido. Tal expresión no denota el cociente de dos números; es simplemente una notación.

iii) Las derivadas direccionales, como derivadas de funciones de una variable que son, gozan de las propiedades aritméticas de éstas; por ejemplo, si dos aplicaciones definidas en un mismo abierto de $\mathbb{R}^n$ admiten derivada parcial respecto de x_j en un punto del abierto, entonces la aplicación suma admite derivada parcial respecto de x_j en dicho punto y es la suma de las derivadas parciales de las dos aplicaciones.

Definición 1.3.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Se dice que $\boldsymbol{f}$ es *diferenciable en el punto $\boldsymbol{x}_0$* si existen una aplicación lineal L de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y una función ε de A en $\mathbb{R}^m$, con $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \|\varepsilon(\boldsymbol{x})\| = 0$, de manera que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \varepsilon(\boldsymbol{x})\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in A.$$

La aplicación lineal L, si existe, es única y recibe el nombre de *diferencial de $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{x}_0$* y se denota por $(d\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{x}_0}$, $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ o $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$.

Si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en todo punto de A se dice que es *diferenciable en A*.

Teorema 1.4.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ entonces es continua en dicho punto.

Teorema 1.5.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$. Si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ entonces existen las derivadas direccionales según cualquier dirección en dicho punto, en particular, $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{x}_0$. Además se tiene que, para cada vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$D_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = (d\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}).$$

Teorema 1.6.- Es condición necesaria y suficiente para que una aplicación $\boldsymbol{f}$ de un abierto A de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ admita derivada direccional en un punto $\boldsymbol{x}_0$ según el vector $\boldsymbol{v}$ (resp. sea diferenciable en el punto $\boldsymbol{x}_0$) que así se verifique para cada una de sus funciones componentes f_i, $i = 1, 2, \dots, m$.

Teorema 1.7.- Sea $\boldsymbol{f}$ una aplicación de un abierto A de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Si en todos los puntos de un entorno de $\boldsymbol{x}_0 \in A$ existen todas las derivadas parciales de $\boldsymbol{f}$ y, excepto quizá una de ellas, son continuas en $\boldsymbol{x}_0$, entonces $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en dicho punto.

Proposición 1.8.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ aplicaciones de A en $\mathbb{R}^m$ y h una función de A en $\mathbb{R}$, todas ellas diferenciables en $\boldsymbol{x}_0$. Entonces

i) $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ y $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)$.

ii) $h\,\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ y $(h\,\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0) = h(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,h'(\boldsymbol{x}_0)$, es decir,

$$(h\,\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) = h(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) + h'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \quad \text{para cada } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n.$$

iii) $p = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ y $p'(\boldsymbol{x}_0) = \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0) \rangle + \langle \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) \rangle$, es decir,

$$p'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) \rangle + \langle \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) \rangle \quad \text{para cada } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n .$$

iv) Si $h(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, $1/h$ es diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ y $\left(\dfrac{1}{h}\right)'(\boldsymbol{x}_0) = \dfrac{-1}{h(\boldsymbol{x}_0)^2}\, h'(\boldsymbol{x}_0)$.

Regla de la Cadena 1.9.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, B abierto de $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^m$ con $\boldsymbol{f}(A) \subset B$ y $\boldsymbol{g}$ una aplicación de B en $\mathbb{R}^p$. Si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{x}_0 \in A$ y $\boldsymbol{g}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \in B$ entonces la aplicación $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ es diferenciable en el punto $\boldsymbol{x}_0$; además

$$\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0) \circ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{g}'\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\big) \circ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) .$$

Observación 1.10.- La diferencial de una aplicación $\boldsymbol{f}$ en un punto $\boldsymbol{x}_0$ se expresa en las bases estándar de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ mediante la matriz denominada *matriz jacobiana* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}_0$, que viene dada por

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} ; \qquad \text{si } m = 1 \text{ también se escribe } \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\right) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0) .$$

Entonces, con las hipótesis y notación de 1.9 la Regla de la Cadena se escribe

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\big) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) , \qquad i = 1, 2, \dots, p ;\ j = 1, 2, \dots, n .$$

Teorema 1.12.- Toda aplicación lineal $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en cada punto de $\mathbb{R}^n$, y además la diferencial de L en cada punto coincide con L, es decir, $L'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

Teorema del Valor Medio 1.13.- Sean A un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f: A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en A. Dados $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$, existe un punto $\boldsymbol{c}$ situado en el segmento que une $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tal que

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{c})(b_1 - a_1) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{c})(b_n - a_n) .$$

Teorema 1.14.- Sean A un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}: A \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable en A. Dados $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$, se tiene que

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\| \le K \sup \left\{ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\big(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}\big) \right| : t \in [0,1],\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \right\} \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| ,$$

donde K es una constante independiente de $\boldsymbol{f}$ y del segmento $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Corolario 1.15.- Toda aplicación diferenciable en un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$, con diferencial nula en todo punto, es constante. El resultado es igualmente válido en abiertos estrellados y, en general, en abiertos conexos.

§ 2 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

Definición 2.1.- Sea f una función real definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$, que admite derivadas parciales en todos los puntos de A. Dichas parciales definen, a su vez, funciones de A en $\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}: A \to \mathbb{R}$, para las cuales pueden existir también derivadas parciales en los puntos de A. Estas últimas reciben el nombre de *derivadas parciales segundas de la función* f y se denotan por

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = D_{ij} f(\boldsymbol{x}) .$$

Se definen, de forma análoga, las derivadas parciales de f de orden m superior al segundo: $D_{i_1 i_2 \dots i_m} f(\boldsymbol{x})$.

Cuando la función f admite derivadas parciales hasta el orden $k \ge 1$ en cada punto de A, y éstas son continuas en A se dice que la función es *de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* A y se representa $f \in \mathcal{C}^k(A)$.
Si f es de clase $\mathcal{C}^k$ en A para cada $k \in \mathbb{N}$ se dice que es *de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *en* A y se representa $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$.
Al decir que f es *de clase* $\mathcal{C}^0$ *en* A (denotado por $f \in \mathcal{C}^0(A)$), se quiere significar que f es continua en A.

Teorema de Schwarz 2.4.- Sea f una función definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existen en un entorno del punto $\boldsymbol{x}_0$, siendo además la última continua en dicho punto, entonces también existe la derivada parcial $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)$ y coincide con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$.

Teorema de Young 2.5.- Sean f una función definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{x}_0 \in A$. Si las derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ existen en A y ambas son diferenciables en $\boldsymbol{x}_0$, entonces se tiene que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)$.

Observación 2.6.- Al representar las derivadas parciales de orden superior (o *sucesivas*), en la notación de Leibnitz, se sigue el siguiente criterio de simplificación: al derivar sucesivamente respecto de la misma variable esto se indica mediante un exponente que representa la multiplicidad de esa derivada; así, la expresión

$$\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_n} f}{\partial {x_1}^{m_1}\,\partial {x_2}^{m_2}\ldots\partial {x_n}^{m_n}}(\boldsymbol{x})$$

representa la derivada de orden $m_1 + \ldots + m_n$ de f derivando m_i veces respecto de cada variable x_i. Para funciones suficientemente regulares, en virtud de los teoremas anteriores, el orden de derivación es irrelevante.

Lema 2.7.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, B abierto de $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f}\colon A \to B$ y $\boldsymbol{g}\colon B \to \mathbb{R}^p$, ambas aplicaciones de clase $\mathcal{C}^k$ en A y B, respectivamente. Entonces, la aplicación compuesta $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ es de clase $\mathcal{C}^k$ en A.

Fórmula de Taylor 2.8.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ en A y $\boldsymbol{x}_0 \in A$. Si $B(\boldsymbol{x}_0, r) \subset A$ $(r > 0)$, para cada $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, r)$, se tiene

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) &+ \frac{1}{1!}\sum_{j_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}(\boldsymbol{x}_0)\, h_{j_1} + \frac{1}{2!}\sum_{j_1,j_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}}(\boldsymbol{x}_0)\, h_{j_1}\, h_{j_2} + \ldots \\ &+ \frac{1}{k!}\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\ldots\partial x_{j_k}}(\boldsymbol{x}_0)\, h_{j_1}\, h_{j_2}\cdots h_{j_k} \\ &+ \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j_1,\ldots,j_{k+1}=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\ldots\partial x_{j_{k+1}}}(\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h})\, h_{j_1}\, h_{j_2}\cdots h_{j_{k+1}}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, y $\theta \in (0,1)$ un número que depende de $\boldsymbol{h}$.

Observaciones 2.9.-

ii) Haciendo uso del teorema de Schwarz, la fórmula de Taylor se expresa

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) &+ \sum_{m=1}^{k}\ \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=m} \frac{1}{j_1!\, j_2!\cdots j_n!}\ \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\cdots\partial x_n^{j_n}}(\boldsymbol{x}_0)\ h_1^{j_1} h_2^{j_2}\cdots h_n^{j_n} \\ &+ \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=k+1} \frac{1}{j_1!\, j_2!\cdots j_n!}\ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\cdots\partial x_n^{j_n}}(\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h})\ h_1^{j_1} h_2^{j_2}\cdots h_n^{j_n}\,, \end{aligned}$$

donde $j_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ para todo i (la derivación respecto de x_i no se efectúa si $j_i = 0$).

iii) Con la notación de (1), la diferencia

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j_1,\ldots,j_{k+1}=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\ldots\partial x_{j_{k+1}}}(\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h})\, h_{j_1}\, h_{j_2}\cdots h_{j_{k+1}}$$

es un polinomio de grado k en las n variables $h_1, h_2, \ldots, h_n$, denominado *polinomio de Taylor de orden* k de la función f en el punto $\boldsymbol{x}_0$.

Observación 2.11.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ en A y $\boldsymbol{x}_0 \in A$. Si $T_{k+1}(f, \boldsymbol{x}_0)$ es el polinomio de Taylor de grado $k+1$ de f en el punto $\boldsymbol{x}_0$, entonces

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = T_{k+1}(f, \boldsymbol{x}_0) + \varepsilon(\boldsymbol{h})\ \|\boldsymbol{h}\|^{k+1}\,,$$

siendo ε una función tal que $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \varepsilon(\boldsymbol{h}) = 0$.

Ejemplos 2.12.-

2.12.1.- Sea f una función de clase $\mathcal{C}^4$ en el disco abierto $B(\boldsymbol{a}, r) \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$ con $\|\boldsymbol{h}\| < r$ existe un número $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})\, h_2\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a})\, {h_1}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{a})\, h_1 h_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{a})\, {h_2}^2\right) \\ &+ \left(\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\boldsymbol{a})\, {h_1}^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\boldsymbol{a})\, {h_1}^2 h_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(\boldsymbol{a})\, h_1 {h_2}^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\boldsymbol{a})\, {h_2}^3\right) + \frac{1}{4!} f^{4)}(\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h})\,. \end{aligned}$$

2.12.2.- Sea f una función de clase $\mathcal{C}^4$ en la bola abierta $B(\boldsymbol{a}, r) \subset \mathbb{R}^3$. Para cada $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^3$ con $\|\boldsymbol{h}\| < r$ existe un número $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \ & f(\boldsymbol{a}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})\, h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{a})\, h_3\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a})\, {h_1}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{a})\, {h_2}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\boldsymbol{a})\, {h_3}^2 \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a})\, h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\boldsymbol{a})\, h_1 h_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\boldsymbol{a})\, h_2 h_3 \right) \\ & + \left(\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\boldsymbol{a})\, {h_1}^3 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\boldsymbol{a})\, {h_2}^3 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(\boldsymbol{a})\, {h_3}^3 \right. \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\boldsymbol{a})\, {h_1}^2 h_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(\boldsymbol{a})\, {h_1}^2 h_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\boldsymbol{a})\, h_1 {h_2}^2 \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(\boldsymbol{a})\, h_1 {h_3}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(\boldsymbol{a})\, {h_2}^2 h_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(\boldsymbol{a})\, h_2 {h_3}^2 \\ & \left. + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(\boldsymbol{a})\, h_1 h_2 h_3 \right) \quad + \frac{1}{4!} f^{4)}(\boldsymbol{x}_0 + \theta \boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}) . \end{aligned}$$

Si en ambos casos se supone únicamente que la función f es de clase $\mathcal{C}^3$, el último sumando se ha de escribir (como en 2.11) $\varepsilon(\boldsymbol{h})\ \|\boldsymbol{h}\|^3$, o según la notación de Landau en el punto $\boldsymbol{h}_0 = \boldsymbol{0}$, $o\big(\, \|\boldsymbol{h}\|^3\,\big)$.

§ 3 EXTREMOS RELATIVOS.

Definición 3.1.- Sean f una función real definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$, y $\boldsymbol{a}$ un punto de A. Se dice que f presenta un *máximo* (resp. *mínimo*) *local* o *relativo* en ese punto si existe un entorno V de $\boldsymbol{a}$, contenido en A (una bola centrada en $\boldsymbol{a}$, si se prefiere), tal que $f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{a})$ (resp. $f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{a})$) para todo $\boldsymbol{x} \in V$.

En cualquiera de los casos anteriores se dice que f presenta un *extremo local o relativo* en $\boldsymbol{a}$. Si las desigualdades anteriores son estrictas para cada $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ el extremo se dice *estricto*.

Teorema 3.2.- (condición necesaria para la existencia de extremos) Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y f una función de A en $\mathbb{R}$ que es diferenciable en $\boldsymbol{a}$. Es condición necesaria para que f presente un extremo relativo en $\boldsymbol{a}$ que su diferencial en dicho punto sea nula: $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, o equivalentemente, que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = 0 \quad \text{para cada } j = 1, 2, \ldots, n .$$

Definición 3.3.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y f una función de A en $\mathbb{R}$ que es diferenciable en $\boldsymbol{a}$. Se dice que f *presenta en* $\boldsymbol{a}$ *un punto crítico* o que $\boldsymbol{a}$ es un *punto crítico* de f si la diferencial de f en $\boldsymbol{a}$ es nula, $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. Un punto crítico donde la función no presenta un extremo relativo se llama *punto de silla*.

3.4.- Formas Cuadráticas.

Definición 3.4.1.- Una *forma cuadrática* en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por un polinomio homogéneo de grado 2, es decir, de la forma

$$Q(\boldsymbol{x}) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij}\, x_i\, x_j\,, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Se dice que la forma cuadrática Q en $\mathbb{R}^n$ es *definida positiva* (resp. *negativa*) si $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ (resp. $Q(\boldsymbol{x}) < 0$) para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

Se dice que la forma cuadrática Q en $\mathbb{R}^n$ es *semidefinida positiva* (resp. *negativa*) si $Q(\boldsymbol{x}) \ge 0$ (resp. $Q(\boldsymbol{x}) \le 0$) para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Se dice que la forma cuadrática Q en $\mathbb{R}^n$ es *indefinida* si no es semidefinida, es decir, si toma valores estrictamente positivos y negativos en distintos puntos de $\mathbb{R}^n$.

Observación 3.4.2.- Una aplicación bilineal simétrica B (o si se prefiere una matriz simétrica A) define una forma cuadrática mediante la expresión

$$Q(\boldsymbol{x}) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\ (= \boldsymbol{x}\, A\, \boldsymbol{x}^t)\,. \tag{3}$$

Recíprocamente, si una forma cuadrática Q viene dada según (2), se representa (respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^n$) según (3) mediante la matriz simétrica $A = \big(a_{ij}\big)_{1 \le i,j \le n}$ con $a_{ij} = a_{ji} = c_{ij}/2$, si $1 \le i < j \le n$, y $a_{ii} = c_{ii}$, $1 \le i \le n$.

Teorema 3.4.3.- Si A es una matriz simétrica con coeficientes reales todos sus autovalores son reales.

Proposición 3.4.4.- Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ representada por la matriz simétrica A según (3).

i) Q es semidefinida positiva si, y sólo si, todos los autovalores de A son positivos. Es definida positiva si, y sólo si, todos los autovalores de A son estrictamente positivos.

ii) Q es semidefinida negativa si, y sólo si, todos los autovalores de A son negativos. Es definida negativa si, y sólo si, todos los autovalores de A son estrictamente negativos.

iii) Q es indefinida si, y sólo si, A tiene un autovalor estrictamente positivo y otro estrictamente negativo.

Dada una matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ se define $\Delta_k = \det\left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq k}$.

Proposición 3.4.5.- Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ representada por la matriz simétrica A:

i) Q es definida positiva si, y sólo si, $\Delta_k > 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

ii) Q es definida negativa si, y sólo si, $(-1)^k\,\Delta_k > 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

Definición 3.5.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de clase $\mathcal{C}^2$ en A. Si $\boldsymbol{a} \in A$ la matriz simétrica $Hf(\boldsymbol{a}) = \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})\Big)_{1\leq i,j\leq n}$ se denomina *matriz hessiana* de f en el punto $\boldsymbol{a}$.

Teorema 3.7.- (condiciones necesarias para la existencia de extremo) Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en A con $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. Si f tiene un mínimo (resp. máximo) relativo en $\boldsymbol{a}$, la forma cuadrática $\boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{h}\,Hf(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{h}^t$ es semidefinida positiva (resp. negativa).

En consecuencia, si esta forma cuadrática es indefinida f no puede presentar extremos en el punto $\boldsymbol{a}$.

Teorema 3.8.- (condiciones suficientes para la existencia de extremo) Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en A y tal que $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. Entonces:

i) Si la forma cuadrática $\boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{h}\,Hf(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{h}^t$ es definida positiva (resp. negativa), f presenta un mínimo (resp. máximo) relativo estricto en $\boldsymbol{a}$.

ii) Si las formas cuadráticas $\boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{h}\,Hf(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{h}^t$ son semidefinidas positivas (resp. negativas) para todos los puntos $\boldsymbol{x}$ de un entorno de $\boldsymbol{a}$, f presenta un mínimo (resp. máximo) relativo en $\boldsymbol{a}$.

§ 4 FUNCIONES INVERSAS E IMPLÍCITAS.

Definición 4.1.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^n$ que es diferenciable en $\boldsymbol{a}$. El determinante

$$\partial\!\!\!\!\!\;\mathcal{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \det\left(D_j f_i(\boldsymbol{a})\right)_{1\leq i,j\leq n} = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

se denomina *determinante jacobiano* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$.

Teorema de la Función Inversa 4.2.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{f}\colon A \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ en A. Si $\boldsymbol{a} \in A$ es tal que la aplicación lineal $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ es regular, o equivalentemente, tal que $\mathcal{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \neq 0$, entonces existen un abierto V que contiene al punto $\boldsymbol{a}$, y un abierto W que contiene al punto $f(\boldsymbol{a})$, tales que $\boldsymbol{f}$ aplica, biyectivamente, V en W. Además, la aplicación inversa $\boldsymbol{f}^{-1}\colon W \to V$ es también de clase $\mathcal{C}^k$ en W y

$$\left(\boldsymbol{f}^{-1}\right)'\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right) = \left(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\right)^{-1}, \quad \boldsymbol{x} \in V.$$

Observación 4.3.- La última fórmula es una igualdad de aplicaciones lineales, en particular, la matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}^{-1}$ en el punto $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es la inversa de la matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$, y en consecuencia

$$\mathcal{J}\boldsymbol{f}^{-1}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right) = \frac{1}{\mathcal{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x} \in V.$$

Definición 4.4.- Sean A y B dos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Se dice que una aplicación $\boldsymbol{\varphi}\colon A \to B$ es un *difeomorfismo* o *cambio de variables* de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$, si es biyectiva, de clase $\mathcal{C}^k$ en A, y la aplicación inversa $\boldsymbol{\varphi}^{-1}\colon B \to A$ es también de clase $\mathcal{C}^k$ en B.

El objeto del teorema de la función implícita es precisar condiciones tales que, dada una ecuación

$$\boldsymbol{f}\big((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_m)\big) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^m, \tag{4}$$

se pueda asociar a cada $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de un cierto conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, un único punto $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ de otro conjunto $Y \subset \mathbb{R}^m$, tal que el par $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ verifique la ecuación. De esta forma, queda definida una aplicación $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$, con los pares de valores que son solución de la ecuación anterior. En estas condiciones la aplicación $\boldsymbol{\varphi}$ se dice que está *definida implícitamente* por la ecuación (4).

Teorema de la Función Implícita 4.6.- Sean A un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$, $\boldsymbol{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ en A, y $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ un punto de A tal que $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$. Se supone, además, que

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \right)_{1 \leq i,j \leq m} \neq 0 . \tag{5}$$

Existen, entonces, un abierto U de $\mathbb{R}^n$, con $\boldsymbol{a} \in U$, y otro abierto V de $\mathbb{R}^m$, con $\boldsymbol{b} \in V$, tales que, para cada $\boldsymbol{x} \in U$ existe un único $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \in V$ con $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$; además, $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to V$ es una función de clase $\mathcal{C}^k$ en U.

Observaciones 4.7.-

ii) El teorema anterior admite una formulación más general en el sentido siguiente:

"Si la matriz jacobiana de la aplicación $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n+m}$ tiene rango máximo (m), esto es, existen $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq m+n$ tales que el menor correspondiente a las derivadas parciales respecto de las variables $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ tiene determinante no nulo, entonces estas m variables quedan determinadas implícitamente en función de las n restantes en un entorno de dicho punto".

iii) Aun sin conocer explícitamente la aplicación $\boldsymbol{\varphi}$, es posible calcular sus derivadas parciales sucesivas en el punto $\boldsymbol{a}$, lo cual se reduce a resolver una serie de sistemas lineales cuya compatibilidad viene garantizada por el hecho de que el determinante jacobiano respecto de las últimas variables no sea nulo.

En efecto, en las mismas condiciones y con la misma notación que en el teorema 4.6, denotemos por $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ a la aplicación definida en U por

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) .$$

Puesto que esta aplicación es la idénticamente nula, todas sus derivadas parciales han de ser nulas en U. Así, fijado $1 \leq k \leq n$, se tiene para cada $i = 1, 2, \ldots, m$

$$0 = \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) .$$

En virtud de (5) también se tiene que, para todos los puntos $\boldsymbol{x}$ en un entorno de $\boldsymbol{a}$,

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \right)_{1 \leq i,j \leq m} \neq 0 ,$$

de manera que el sistema lineal dado por las m ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) , \qquad i = 1, 2, \ldots, m ,$$

en las m incógnitas $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})$, $j = 1, 2, \ldots, m$, es compatible determinado, lo que permite obtener las derivadas parciales de las funciones implícitas φ_j.

El sistema anterior se puede resolver mediante el método de Cramer; esta fórmula, que expresa las soluciones en función de los coeficientes del sistema, sirve para mostrar que las funciones implícitas son de la misma clase, $\mathcal{C}^k$, que la aplicación $\boldsymbol{f}$.

Si $\boldsymbol{f}$ es además de clase $\mathcal{C}^2$, dados $1 \leq l, k \leq n$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_l \partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) &= \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{n+j} \partial x_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}) \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) + \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{n+h} \partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \, \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}) \, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \, \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_l \partial x_k}(\boldsymbol{x}) , \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, lo que da lugar a un sistema lineal en las m incógnitas $\dfrac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_l \partial x_k}(\boldsymbol{x})$, $j = 1, 2, \ldots, m$, cuya matriz de coeficientes es la misma que antes.

Nótese que el término independiente viene dado por las derivadas de $\boldsymbol{f}$ y las parciales primeras de $\boldsymbol{\varphi}$, que en el punto $\boldsymbol{a}$ ya han sido determinadas previamente.

Repitiendo este argumento se obtienen recursivamente las derivadas sucesivas de las funciones implícitas en el punto $\boldsymbol{a}$ como soluciones de sistemas lineales, todos ellos con la misma matriz de coeficientes.

§ 1 CURVAS EN $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.- Una *curva paramétrica* en $\mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 0)$ es un par $(I, \boldsymbol{\varphi})$, donde I es un intervalo de la recta real y $\boldsymbol{\varphi}$ es una aplicación definida en I, con valores en $\mathbb{R}^n$, y de clase $\mathcal{C}^k$ en I. También se utilizan los nombres de *arco* o *camino* como sinónimos de curva.

Si I es un intervalo compacto, $I = [a, b]$, los puntos $\boldsymbol{\varphi}(a)$ y $\boldsymbol{\varphi}(b)$ se denominan respectivamente el *origen* y el *extremo* de la curva; si dichos puntos coinciden, se dice que la curva es *cerrada*.

Se llama *soporte* de la curva al conjunto $\boldsymbol{\varphi}(I)$, imagen de I por $\boldsymbol{\varphi}$, denotado usualmente por $\boldsymbol{\varphi}^*$, y se dice entonces que $\boldsymbol{\varphi}$ es una *parametrización* de $\boldsymbol{\varphi}^*$.

Se dice que la curva $(I, \boldsymbol{\varphi})$ es *simple* si la aplicación $\boldsymbol{\varphi}$ es inyectiva (si la curva es cerrada, se pide la inyectividad en $[a, b)$).

Por último, si la curva es de clase $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$, se puede considerar para cada $t \in I$ el vector $\boldsymbol{\varphi}'(t)$, denominado *vector tangente* a la curva en el punto $\boldsymbol{\varphi}(t)$. Se dice que dicho punto es *regular* si $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}$. Cuando todos los puntos de una curva son regulares, la curva se dice *regular*.

Definición 1.4.- Se dice que dos curvas paramétricas en $\mathbb{R}^n$, $(I_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ e $(I_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$, son *equivalentes* si existe un difeomorfismo θ de I_1 en I_2 de manera que $\boldsymbol{\varphi}_2 \circ \theta = \boldsymbol{\varphi}_1$. En esta situación, θ recibe el nombre de *cambio de parámetro*.

Teorema 1.7.- Sean $(I_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ e $(I_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ dos curvas paramétricas en $\mathbb{R}^n$, simples y regulares. Si ambas curvas tiene el mismo soporte y, en caso de ser cerradas el mismo origen, entonces son equivalentes.

Observación 1.8.- Si $(I_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ e $(I_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ son dos curvas paramétricas equivalentes y $\theta\colon I_1 \to I_2$ es el cambio de parámetro que permite escribir $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_2 \circ \theta$, entonces $\boldsymbol{\varphi}_1'(t) = \theta'(t)\, \boldsymbol{\varphi}_2'(\theta(t))$, $t \in I_1$. Dado que $\theta'(t) \neq 0$ para todo $t \in I_1$ un punto P en el soporte de cualquiera de las curvas es regular o no independientemente de la parametrización escogida y, en caso de serlo, los vectores tangentes en P respecto a cada parametrización son proporcionales y determinan, por tanto, una misma dirección.

Definición 1.10.- Se dice que dos curvas paramétricas equivalentes $(I_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ e $(I_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ tienen la *misma orientación* si el cambio de parámetros que pasa de una a otra tiene derivada positiva; se dice que tienen *orientaciones opuestas* si la derivada es negativa.

Proposición 1.13.- (curvas parametrizadas en polares) Es posible a veces expresar una curva plana mediante una expresión del tipo $\rho = f(\theta)$, que corresponde a la aplicación $\theta \mapsto \big(f(\theta)\cos(\theta)\,,\ f(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\big)$, definida en el intervalo o unión de ellos en los que se verifique que $f(\theta) \geq 0$. El estudio de estas parametrizaciones requiere un análisis del comportamiento de la función f:

1.13.1.- *Periodicidad*: cuando existe $p > 0$ tal que $f(\theta + p) = f(\theta)$ para todo θ, la gráfica de la función se repite tras un giro de amplitud p.

1.13.2.- *Simetrías*: se presenta simetría respecto a la semirrecta de argumento α si $f(\alpha - \theta) = f(\alpha + \theta)$ para todo θ; y hay simetría respecto del punto $(0, 0)$ si π es un periodo de f.

1.13.3.- *Variación de ρ*: la monotonía de f informa de la variación de la distancia al origen de los puntos de la curva.

1.13.4.- *Asíntotas*: si para un $\theta_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = +\infty$ y $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta)\operatorname{sen}(\theta - \theta_0) = m$, la curva presenta una rama infinita en la semirrecta de ecuación $\rho\operatorname{sen}(\theta - \theta_0) = m$, paralela a la de ecuación $\theta = \theta_0$, y que dista del origen m.

1.13.5.- *Puntos regulares*: supongamos que f es de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces:

1.13.5.1.- Un punto P del soporte, correspondiente a $\theta = \theta_0$, no es regular si y sólo si $f(\theta_0) = f'(\theta_0) = 0$ (en particular, si el soporte de la curva no contiene al origen, la curva es regular).

1.13.5.2.- La recta tangente a la curva en el punto P, correspondiente a $\theta = \theta_0$ y regular, forma con la semirrecta definida por θ_0 un ángulo ω, dado por

$$\omega = \begin{cases} \operatorname{arctg}\big(f(\theta_0)/f'(\theta_0)\big) \in (0, \pi) & \text{si } f'(\theta_0) \neq 0\,; \\ \pi/2 & \text{si } f'(\theta_0) = 0\,. \end{cases}$$

§ 2 SUPERFICIES EN $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.1.- Una *superficie paramétrica* de clase $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 0$) en $\mathbb{R}^3$ es un par $(D, \boldsymbol{\varphi})$, donde D es un abierto conexo de $\mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{\varphi}$ es una aplicación definida en D, con valores en $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\varphi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, de clase $\mathcal{C}^k$ en D, y localmente inyectiva.

Se llama *soporte* de la superficie al conjunto $\boldsymbol{\varphi}(D)$, imagen de D por $\boldsymbol{\varphi}$, denotado usualmente por $\boldsymbol{\varphi}^*$, y se dice entonces que $\boldsymbol{\varphi}$ es una *parametrización* de $\boldsymbol{\varphi}^*$.

Se dice que la superficie $(D, \boldsymbol{\varphi})$ es *simple* si la aplicación $\boldsymbol{\varphi}$ es inyectiva (globalmente).

Por último, si la superficie es de clase $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$, se pueden considerar para cada $(u,v) \in D$ los vectores

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\Big) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\Big),$$

denominados *vectores tangentes* a la superficie en el punto $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$ de su soporte. Se dice que dicho punto es *regular* si los vectores tangentes a la superficie en él son linealmente independientes (es decir, la matriz jacobiana de $\boldsymbol{\varphi}$ en el punto (u,v) tiene rango 2), o equivalentemente, si es no nulo su producto vectorial $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v)$, en cuyo caso dicho vector se denomina *vector normal* a la superficie en el punto $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$.

Cuando todos los puntos de una superficie son regulares, decimos que la superficie es *regular*.

Observación 2.2.- Si $\boldsymbol{\varphi}(u_0, v_0)$ es un punto regular de la superficie paramétrica $(D, \boldsymbol{\varphi})$, el vector normal en este punto es ortogonal a los dos vectores tangentes, es decir, es un vector ortogonal al plano que pasa por $\boldsymbol{\varphi}(u_0, v_0)$ y generado por los dos vectores tangentes a la superficie en dicho punto. Este plano recibe el nombre de *plano tangente a la superficie* en el punto $\boldsymbol{\varphi}(u_0, v_0)$.

Ejemplo 2.3.- Si D es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f\colon D \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^k$, la gráfica de f es el soporte de la parametrización $\mathcal{C}^k$, $\boldsymbol{\varphi}(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big)$, $(u,v) \in D$. El vector normal en cada punto $\boldsymbol{\varphi}(x,y)$ es

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(x,y) = \Big(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\, -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,,\, 1\Big).$$

Definición 2.4.- Se dice que dos superficies paramétricas, $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$, son *equivalentes* si existe un difeomorfismo (o *cambio de parámetros*) $\boldsymbol{\theta}$ de D_1 en D_2 de manera que $\boldsymbol{\varphi}_2 \circ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varphi}_1$.

Observación 2.5.- Dados dos abiertos de $\mathbb{R}^2$, D_1 y D_2, una aplicación $\boldsymbol{\theta}\colon D_1 \to D_2$ es un difeomorfismo entre ambos si es biyectiva, de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ y tal que $\mathcal{J}\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u}) \neq 0$ en todo punto $\boldsymbol{u} \in D_1$. Aplicando el teorema de la función inversa, se deduce que si $\boldsymbol{\theta}$ es un difeomorfismo, $\boldsymbol{\theta}^{-1}\colon D_2 \to D_1$ también lo es.

Teorema 2.7.- Sean $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ dos superficies paramétricas de clase $\mathcal{C}^1$ simples y regulares. Si ambas tienen el mismo soporte, entonces son equivalentes.

Observación 2.8.- Sean $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ dos parametrizaciones equivalentes. De la regla de la cadena se deduce que un punto P en el soporte de cualquiera de ellas es regular o no independientemente de la parametrización escogida, y que, en caso de serlo, los vectores tangentes en P respecto a cada parametrización generan un mismo plano y dan lugar a vectores normales proporcionales.

Definición 2.9.- Sea $(D, \boldsymbol{\varphi})$ una superficie paramétrica, y $P = \boldsymbol{\varphi}(u_0, v_0)$ un punto regular de su soporte.

Se llama *plano tangente* a $\boldsymbol{\varphi}^*$ en el punto P al plano afín que pasa por P y tiene a $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u_0, v_0)$ como vectores generadores.

Se llama *recta normal* a $\boldsymbol{\varphi}^*$ en P a la recta afín que pasa por P y tiene al vector normal a $\boldsymbol{\varphi}^*$ en P como vector director.

Definición 2.11.- Se dice que dos superficies paramétricas equivalentes $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ tienen la *misma orientación* si el cambio de parámetros que pasa de una a la otra tiene determinante jacobiano positivo; se dice que tienen *orientaciones opuestas* si el jacobiano es negativo.

Observación 2.12.- Sean $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ superficies paramétricas equivalentes, y $\boldsymbol{\theta}\colon D_1 \to D_2$ el difeomorfismo tal que $\boldsymbol{\varphi}_1(u,v) = \boldsymbol{\varphi}_2(\boldsymbol{\theta}(u,v)) = \boldsymbol{\varphi}_2(s(u,v), t(u,v))$, $(u,v) \in D_1$. Entonces, si $\boldsymbol{\varphi}_1(u,v)$ es un punto regular de cualquiera de ellas,

$$\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial v}\Big)(u,v) = \mathcal{J}\boldsymbol{\theta}(u,v)\,\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial t}\Big)(\boldsymbol{\theta}(u,v)),$$

de donde se deduce que los vectores normales correspondientes a parametrizaciones de la misma orientación tienen el mismo sentido, mientras que si las parametrizaciones tienen orientación distinta, los vectores normales tienen sentidos opuestos.

§ 3 CURVAS Y SUPERFICIES DEFINIDAS IMPLÍCITAMENTE.

Teorema 3.1.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ó 3, y $\boldsymbol{g}: U \to \mathbb{R}^{n-1}$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^k$ tal que el rango de la matriz jacobiana en cada punto de U es máximo. Se supone que el conjunto $C = \{\boldsymbol{x} \in U \,:\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ es no vacío. Entonces cada componente conexa de C es una curva de clase $\mathcal{C}^k$.

Precisando más: si $\boldsymbol{p} \in C$ existe un entorno V de $\boldsymbol{p}$ en $\mathbb{R}^n$ y una parametrización $\boldsymbol{\varphi}$ de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ cuyo soporte es $V \cap C$.

Proposición 3.3.- Sea C una curva de clase $\mathcal{C}^k$ en $\mathbb{R}^n$ dada implícitamente en un entorno del punto $\boldsymbol{p} \in C$ por las ecuaciones $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $1 \le i \le n-1$, donde las funciones g_i son de clase $\mathcal{C}^k$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ que contiene a dicho punto y tales que el rango de la matriz jacobiana

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le n-1\\ 1\le j\le n}}$$

es máximo en cada punto de U. Entonces, los vectores directores $\boldsymbol{v}$ de la recta tangente a la curva en un punto $\boldsymbol{x} \in C \cap U$ son los que satisfacen

$$g_i{}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) = 0\,, \quad 1 \le i \le n-1\,.$$

Concretamente:

i) Para curvas planas ($n = 2$), si la ecuación $g(x, y) = 0$ define implícitamente a la curva C en un entorno de (x_0, y_0), entonces $\Big(\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\Big)$ es ortogonal a la recta tangente a C en (x_0, y_0).

ii) Para curvas en $\mathbb{R}^3$, si las ecuación $g_1(x, y, z) = 0$, $g_2(x, y, z) = 0$ definen implícitamente a la curva C en un entorno de $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, entonces

$$\Big(\frac{\partial g_1}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial g_1}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial g_1}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\Big) \times \Big(\frac{\partial g_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial g_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial g_2}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\Big)$$

es un vector director de la recta tangente a C en (x_0, y_0, z_0).

Teorema 3.4.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^3$, y $g: U \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^k$ tal que el rango de la matriz jacobiana en cada punto de U es máximo. Se supone que el conjunto $S = \{\boldsymbol{x} \in U \,:\, g(\boldsymbol{x}) = 0\}$ es no vacío. Entonces cada componente conexa de S es una superficie de clase $\mathcal{C}^k$.

Precisando más: si $\boldsymbol{p} \in S$ existe un entorno V de $\boldsymbol{p}$ en $\mathbb{R}^3$ y una parametrización $\boldsymbol{\varphi}$ de un abierto D de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ cuyo soporte es $V \cap S$.

Proposición 3.6.- Sea S una superficie de clase $\mathcal{C}^k$ en $\mathbb{R}^n$ dada implícitamente en un entorno del punto $\boldsymbol{p} \in S$ por la ecuación $g(\boldsymbol{x}) = 0$, donde g es una función de clase $\mathcal{C}^k$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ que contiene a dicho punto y tal que

$$\nabla g = \Big(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\Big) \ne (0, 0, 0)$$

en cada punto de U. Entonces, los vectores $\boldsymbol{v}$ tangentes a la superficie en un punto $\boldsymbol{x} \in S \cap U$ son los que satisfacen $g'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) = \nabla g(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$, es decir, la del plano tangente a S en el punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ es

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\,(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\,(z - z_0) = 0\,.$$

Teorema 3.8.- Si Γ es una curva diferenciable en $\mathbb{R}^n$, sobre Γ se pueden establecer dos orientaciones, que corresponden a fijar en cada punto $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ un vector tangente a Γ y de norma 1, $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$, de manera que sea continua la aplicación

$$\boldsymbol{x} \in \Gamma \mapsto \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Teorema 3.9.- Sea S una superficie conexa en $\mathbb{R}^3$ definida de forma implícita por

$$S = \{(x, y, z) \in U \,:\, g(x, y, z) = 0\}\,,$$

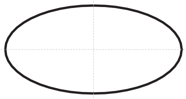
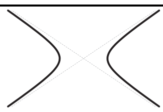
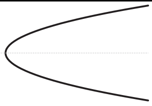
donde g es una función real definida y de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ y tal que $g'(\boldsymbol{x}) \ne \boldsymbol{0}$ para cada $\boldsymbol{x} \in U$. Entonces sobre S se pueden establecer dos orientaciones, que corresponden, respectivamente, a los vectores normales unitarios (de norma 1)

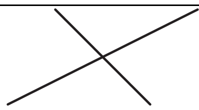
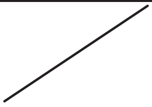
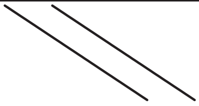
$$\boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{x}) = \frac{g'(\boldsymbol{x})}{\|g'(\boldsymbol{x})\|} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{x})\,, \qquad \boldsymbol{x} \in S\,.$$

§4 CÓNICAS Y CUÁDRICAS.

Definición 4.1.- Una *cónica* es el conjunto C de puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ que verifican $Q(x,y)=0$, siendo Q un polinomio de grado 2 con coeficientes reales: $Q(x,y)=a_{11}\,x^2+2\,a_{12}\,x\,y+a_{22}\,y^2+2\,b_1\,x+2\,b_2\,y+c$.

4.2.- (Clasificación de cónicas)

Curva	Ejemplos	
Elipse	$x^2+y^2=r^2$ $x^2+2\,y^2=4$	
Hipérbola	$x\,y=1$ $y^2-x^2=1$	
Parábola	$y=x^2$ $x=y^2$	

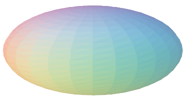
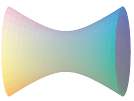
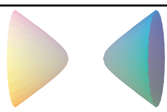
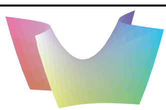
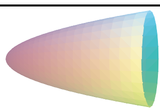
Curva	Ejemplos	
Rectas secantes	$x\,y=0$ $x^2=y^2$	
Rectas coincidentes	$x^2=0$ $(x-y)^2=0$	
Rectas paralelas	$x^2=1$ $(x-y)^2=1$	

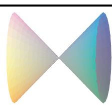
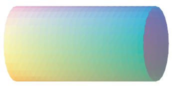
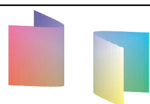
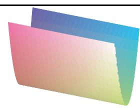
Notas: La únicas cónicas acotadas son las elipses; entre estas se encuentran las circunferencias, que son elipses con excentricidad 0, es decir, igual longitud de sus ejes. Cada una de las dos componentes conexas de una hipérbola se denomina *rama*.

Definición 4.3.- Una *cuádrica* es un conjunto C de puntos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, soluciones de una ecuación $Q(x,y,z)=0$, siendo Q un polinomio de grado 2 con coeficientes reales:

$$Q(x,y,z)=a_{11}\,x^2+a_{22}\,y^2+a_{33}\,z^2+2\,(a_{12}\,x\,y+a_{13}\,x\,z+a_{23}\,y\,z)+2\,(b_1\,x+b_2\,y+b_3\,z)+c\,.$$

4.4.- (Clasificación de cuádricas)

Superficie	Ejemplos	
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Hiperboloide de una hoja	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+1$	
Hiperboloide de dos hojas	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$	
Paraboloide hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$	
Paraboloide elíptico	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{a}$	

Superficie	Ejemplos	
Cono elíptico	$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$	
Cilindro elíptico	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Cilindro hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
Cilindro parabólico	$z=a\,y^2$	
Planos secantes	$x^2-y^2=0$	
Planos paralelos	$x^2=1$	
Planos coincidentes	$z^2=0$	

Notas: La únicas cuádricas acotadas son los elipsoides; entre estas se encuentran las esferas. Cada una de las componentes conexas de una cuádrica se denomina *hoja*.