COMPLEMENTOS de MATEMÁTICAS I

APUNTES DE TEORÍA
Y
ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS

INGENIERO DE TELECOMUNICACIÓN

Universidad de Valladolid

Luis A. Tristán, Félix López, Javier Sanz
Área de Análisis Matemático

Contenido

Prólogo

Estas notas tienen la modesta pretensión de constituir un guión que permita al alumno organizar el aprendizaje de la materia que se aborda. Esta materia podría parecer en principio de naturaleza dispersa, en cuanto que involucra temas de Cálculo infinitesimal, Variable Compleja y Análisis Funcional, pero tiene no obstante un nexo común, un hilo conductor, que es el de contener métodos habituales en diversos campos de la Ciencia y la Técnica y, específicamente, en Teoría de la Señal. No se persigue que se adquiera destreza en la aplicación práctica de estos recursos de cálculo a las diversas disciplinas científicas (lo que sería propio de otras asignaturas o manuales específicos), sino la exposición de los fundamentos teóricos que justifiquen su razón de ser y las condiciones en que pueden ser aplicados, por lo que puede ser útil para cualquier alumno de una Escuela Técnica que haya superado las asignaturas habituales de Matemáticas de carácter troncal; a pesar de esto, obviamente, alguna referencia somera a las aplicaciones es inevitable.

El manual se organiza en cinco capítulos en los que se presenta en primer lugar la teoría correspondiente, sin demostraciones pero con abundantes ejemplos y comentarios, finalizando con una lista de ejercicios propuestos de nivel variable.

El primero se dedica a presentar temas de Cálculo Integral avanzado que no son contemplados habitualmente en los temarios de las asignaturas impartidas en las Escuelas Técnicas, principalmente los relativos a integrales paramétricas. Aunque se hace una somera introducción a la teoría de la integral de Lebesgue, que justifica los teoremas sobre paso al límite en integrales, luego todos los resultados se enmarcan en el contexto de la integral (impropia) de Riemann, por lo que los conocimientos de Cálculo que se adquieren en un primer curso universitario son suficientes para abordar su estudio. Se incluye también un breve estudio de las funciones eulerianas (elemental, pues sólo se trata la variable real) y su aplicación al cálculo de integrales. Asimismo se pretende sentar las bases de la definición rigurosa de la función (generalizada) *delta*, que se presenta en el capítulo cuarto. Las referencias [4], [8] y [15] servirán para el seguimiento de estos aspectos.

El segundo capítulo está dedicado a la transformación de Laplace, en el ámbito más general de la variable compleja y su pretensión no es repetir un recetario de fórmulas usualmente aplicadas, sino fundamentar los aspectos teóricos que permitirán comprender mejor el porqué de los métodos de cálculo y adquirir la capacidad de desarrollo de otros argumentos de razonamiento teórico. Buenas referencias para esta parte son [1], [3], [7], [14], [17] y [18]. Además, quizá algún lector requiera refrescar o adquirir conocimientos de variable compleja, en este caso puede acudir a [2], [9], [12] o [16]. Se incluyen también unos someros comentarios sobre el tratamiento de señales continuas (ver también p.e., [1], [3], [10]).

En cuanto al tercero, la concepción es exactamente la misma que la del anterior, ahora relativo a la transformada Z. Como textos de referencia pueden servir [1], [3] o [19]. También se requiere para esta parte un conocimiento elemental de las técnicas de variable compleja, concretamente las relativas a series de Laurent, singularidades y residuos. Se incluyen también breves referencias a la aplicación del estudio de señales discretas; además de los textos citados, para profundizar en esto pueden verse [11] y [13]. Otra de las aplicaciones que se contempla es la relativa a ecuaciones en diferencias, ésta menos habitual en los diferentes textos universitarios. La colección de ejercicios relativos a esta parte, aunque breve, creemos que es lo suficientemente ilustrativa.

Los capítulos cuarto y quinto se dedican a la teoría de distribuciones (o funciones generalizadas). El contexto es el de las funciones de una variable real, pues entendemos que el caso multidimensional, aparte de ser de uso menos habitual, puede ser comprendido perfectamente si se ha asimilado correctamente ese otro más simple. Siguiendo la filosofía general del texto no se insiste en la aplicación práctica, sino en los fundamentos teóricos. Cualquier alumno de una Escuela Técnica sabrá sin duda manejar con soltura la delta de Dirac, derivarla, convolucionarla con funciones, aplicarle las transformadas integrales usuales, etc. (propiedades que se encuentran tabuladas en multitud de textos), pero si no se ha comprendido el fundamento de dichas operaciones difícilmente se podrán deducir fórmulas análogas para otras distribuciones.

En el capítulo 4 se presenta la teoría general de forma elemental, eludiendo cualquier referencia a los aspectos topológicos y reduciendo todo a la caracterización secuencial, de manera que los conocimientos previos necesarios son los contemplados en lo que comúnmente se conoce como Cálculo Avanzado. Entre otros objetivos, se pretende mostrar que el conjunto de las distribuciones o funciones generalizadas incluye al de las funciones usuales (que se identifican con las distribuciones regulares) y que de forma rigurosa se pueden definir en él operaciones, como por ejemplo la derivación, que son imposibles de abordar con las definiciones usuales (cocientes incrementales, etc.). Las referencias [5], [14], [15], [16] y [17] son adecuadas para este y el siguiente tema.

En el capítulo 5 se trata la transformación de Laplace de distribuciones. Como en el anterior, la exposición es rigurosa pero elemental. Además de justificar la fórmulas de uso habitual (transformada de la delta, etc.) se intenta establecer la noción de función de Green o solución fundamental de un operador diferencial.

Asimismo, se han incluido dos capítulos adicionales, sexto y séptimo, éstos sin ejercicios, cuyo contenido matemático es de nivel más elevado, para aquellos lectores que deseen profundizar en los aspectos matemáticos de la teoría de distribuciones y de la formulación débil de ecuaciones diferenciales.

Finalmente, queremos agradecer de antemano a los lectores cualquier sugerencia o comunicación de erratas que ayude a mejorar este texto.

Los autores

Valladolid, Junio de 2010

Capítulo 1

Complementos de cálculo integral

A pesar de que la integral de Riemann (en sentido propio o generalizado) permite resolver la mayoría de los problemas que plantea la Física Matemática, cuando se abordan situaciones teóricas más delicadas, las limitaciones que emanan de la propia construcción de esta integral constituyen un obstáculo. Estas deficiencias son solventadas por la teoría de la integral de Lebesgue, que permite establecer de una forma simple y elegante todos los resultados que son objeto de este capítulo, considerando una clase más amplia de funciones.

No se pretende aquí desarrollar con rigor la teoría de Lebesgue, lo que involucraría una excesiva carga teórica, sino los recursos que de ella emanan, traducidos al contexto de la integral de Riemann.

Comenzamos presentando de forma somera los rudimentos de la integración en el sentido de Lebesgue (únicamente para que el lector esté informado de su existencia). A continuación se trata la teoría de integrales dependientes de parámetros y algunas de sus aplicaciones, como el estudio de las funciones eulerianas. Finalmente se trata el problema de la convolución y algunas consecuencias interesantes.

1.1. Introducción. Ampliación del concepto de integral

A modo de motivación examinemos un par de ejemplos muy sencillos, pero que ilustrarán muy bien los problemas a que nos enfrentamos, relacionados con el paso al límite en la integración.

Ejemplos 1.1.

I) Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función f_n definida en el intervalo $[0,1]$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = {}^{k}\!/_{10^n}\,,\ k = 0, 1, \ldots, 10^n; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que cada f_n es nula salvo para una cantidad finita de puntos, estas funciones resultan ser integrables en el sentido de Riemann, con integral nula.

Es fácil comprobar también que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para cada $x \in [0,1]$ y cada $n \in \mathbb{N}$; nótese que $f_n(x) = 1$ si, y sólo si, el número x tiene una expresión decimal con n dígitos o menos en su parte fraccionaria. Puesto que la sucesión es creciente, para cada $x \in [0,1]$ existe $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$; esta función toma el valor 1 en los números decimales (los que tienen una expresión decimal finita) y 0 en el resto. La función límite f resulta no ser integrable (todas las sumas inferiores de Darboux son 0 y todas las superiores son 1).

II) Sea ahora para cada natural $n \geq 2$ la función continua $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida a trozos por

$$g_n(x) = \begin{cases} 4\,n^2\Big(x - \dfrac{1}{2n}\Big) & \text{si } x \in \Big[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\Big]\,; \\ 4\,n^2\Big(\dfrac{3}{2n} - x\Big) & \text{si } x \in \Big[\dfrac{1}{n}, \dfrac{3}{2n}\Big]\,; \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

La continuidad de estas funciones garantiza su integrabilidad, además todas ellas tienen integral igual a 1 (el área de un triángulo de base $\dfrac{1}{n}$ y altura $g_n({}^{1}\!/_{n}) = 2\,n$).

Obviamente $g_n(0) = 0$ para cada $n \geq 2$ y, puesto que para cada $x \in (0,1]$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que ${}^{3}\!/_{2m} < x$, se tiene que $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ para cada $x \in [0,1]$. En este caso la función límite es integrable, pero

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx\,.$$

El estudio de condiciones apropiadas para que, a diferencia de lo que ocurre con el ejemplo 1.1.II, se verifique la igualdad entre el límite de las integrales y la integral del límite, así como de sus aplicaciones, es el objetivo de la siguiente sección.

En cuanto a lo que sucede en el ejemplo 1.1.I, resulta que la clase de funciones integrables Riemann no es "completa" en cierto sentido que no especifícaremos con detalle, pero que quedará de manifiesto en lo que se expone a continuación.

Recordemos que una función acotada en un intervalo I (en general, de $\mathbb{R}^p$) se dice *escalonada* si existe una partición $\{I_k : 1 \leq k \leq m\}$ de I tal que f es constante en el interior de cada subintervalo I_k. Si uno piensa en cómo se definen las sumas de Darboux es fácil intuir el significado del siguiente teorema.

Teorema 1.2 (Caracterización de funciones integrables Riemann). Una función f, definida y acotada en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$, es integrable en el sentido de Riemann si, y sólo si, existe una sucesión de funciones escalonadas $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente hacia f en I. En este caso

$$\int_I f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Otra caracterización de la integrabilidad, aunque en este caso no proporciona una idea del valor de la integral, es la siguiente:

Teorema 1.3 (Criterio de Lebesgue de Riemann-integrabilidad). Sea f una función definida y acotada en un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^p$. Es condición necesaria y suficiente para que f sea integrable en el sentido de Riemann en I que el conjunto de puntos de discontinuidad de f sea de medida nula.

En añadidura a lo anterior, recordemos también que, a efectos de integración, podemos ignorar lo que sucede en subconjuntos compactos de medida nula (para compactos se dice también de *contenido de Jordan* nulo). Típicamente se manejan en la práctica funciones que son continuas salvo en curvas, superficies, etc. La idea de Lebesgue consiste en extender esta propiedad a conjuntos de medida nula arbitraria (no necesariamente cerrados). A continuación describimos someramente el método de integración de Lebesgue.

En primer lugar se tratan las funciones de manera general (acotadas o no) definidas en todo $\mathbb{R}^p$, extendiendo por 0 su valor a los puntos fuera de su dominio. Esto ya supone una ventaja al no tener que distinguir entre la integración propia o impropia. Para significar el desprecio de los conjuntos de medida nula se utiliza la locución "casi siempre".

Notación: Se dice que una propiedad, enunciada para los puntos de un subconjunto A de $\mathbb{R}^p$ se verifica *casi siempre* en A, abreviado "c.s.", si los puntos que no la verifican conforman un conjunto de medida nula.

Son locuciones sinónimas *casi seguro*, *casi por doquier*, *en casi todo punto*. La abreviatura "a.e." (de *almost everywhere*) es la traducción al inglés, mientras que "p.p.t." (de *presque par tout*) es el correspondiente en francés.

Definición 1.4. Sea f una función real definida en $\mathbb{R}^p$. Se dice que f es *medible* si existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones escalonadas en $\mathbb{R}^p$ (cada una de ellas nula fuera de un cierto compacto) que converge puntualmente hacia f en casi todo punto de $\mathbb{R}^p$.

Observación 1.5. Resulta que las funciones que se manejan habitualmente en la Ciencia y la Técnica: continuas, continuas a trozos, etc., son todas medibles. De hecho hay que recurrir a construcciones un tanto "extravagantes" para dar ejemplos de funciones no medibles.

Lema 1.6. Si f es una función medible y no negativa en $\mathbb{R}^p$, entonces existe una sucesión creciente $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones escalonadas no negativas que converge hacia f casi siempre. Esto es,

$$0 \leq s_1(\boldsymbol{x}) \leq s_2(\boldsymbol{x}) \leq \ldots \leq s_n(\boldsymbol{x}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\boldsymbol{x}) \quad \text{para casi todo } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p.$$

Observación 1.7. Para una función escalonada s, escrita según una partición $\{I_j : 1 \leq j \leq n\}$ como

$$s(\boldsymbol{x}) \underset{c.s.}{=} \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{I_j}(\boldsymbol{x})$$

(es decir, $s(\boldsymbol{x}) = a_j$ en el interior de I_j), la integral se define exactamente igual que en el sentido de Riemann:

$$\int s \; = \sum_{j=1}^{n} a_j \, m_p(I_j)\,,$$

donde m_p es la medida p-dimensional de los intervalos. Por supuesto, las propiedades de monotonía y linealidad (nótese que la suma de dos escalonadas es escalonada) se siguen verificando para estas integrales, lo que nos permite definir la integral de una función arbitraria.

Definición 1.8 (**Integral de Lebesgue: caso de funciones positivas**)**.** Sea f una función medible y no negativa, y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones escalonadas no negativas que crece hacia f en casi todo punto (que existe en virtud del lema 1.6). Se define la *integral* (en el sentido de Lebesgue) de f como el límite

$$\lim_{n\to\infty} \int s_n = \sup\Big\{ \int s_n : n \in \mathbb{N}\Big\},$$

que existe por ser la sucesión $\big\{ \int s_n \big\}_{n=1}^{\infty}$ creciente de números reales no negativos. Este límite puede ser finito o infinito (pero es independiente de la elección de la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$) y se denota por

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int s_n .$$

Si el límite es finito se dice que f es *integrable*.

Para integrar funciones de signo arbitrario basta recurrir a la descomposición

$$f = f^{+} - f^{-}; \qquad \text{donde} \quad f^{+} = \max\{f, 0\} \quad \text{y} \quad f^{-} = \max\{-f, 0\}\,.$$

Estas funciones no negativas f^{+} y f^{-} también permiten escribir $|f| = f^{+} + f^{-}$.

Definición 1.9 (**Integral de Lebesgue: caso de funciones reales**)**.** Se dice que una función f medible en $\mathbb{R}^p$ es integrable si lo son f^{+} y f^{-}. En este caso la *integral* (en el sentido de Lebesgue) de f es el número real

$$\int f = \int f^{+} - \int f^{-}.$$

Definición 1.10 (**Integral de Lebesgue: caso de funciones complejas**)**.** Se dice que una función f compleja y medible en $\mathbb{R}^p$ es integrable si lo son $\operatorname{Re}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$. En este caso la *integral* (en el sentido de Lebesgue) de f es el número complejo

$$\int f = \int \operatorname{Re}(f) + i \int \operatorname{Im}(f)\,.$$

Observaciones 1.11.

i) De las definiciones anteriores se deducen fácilmente las propiedades generales de la integral: linealidad, monotonía, aditividad respecto a subconjuntos, etc. Además resulta evidente que una función medible es integrable si, y sólo si, lo es su valor absoluto y sigue siendo válido el criterio de comparación.

ii) Si comparamos el teorema 1.2 y las definiciones 1.8, 1.9 y 1.10, queda de manifiesto que la integral de Lebesgue es realmente una generalización de la integral de Riemann (la condición de convergencia uniforme se relaja por la mera convergencia puntual c.s.). Esta generalización es estricta, es decir, existen funciones integrables en el sentido de Lebesgue que no lo son en el de Riemann. La función f del ejemplo 1.1.i ilustra esta situación: mientras que f no es integrable Riemann (no es continua en ningún punto), en cambio es igual c.s. a la función idénticamente nula, y resulta que funciones iguales c.s. tienen el mismo carácter respecto a la integrabilidad de Lebesgue.

iii) Los recursos de cálculo en la integral de Riemann, como la integración iterada, cambio de variables, etc., son igualmente válidos para la integral de Lebesgue; de hecho, los teoremas de Fubini y de Tonelli adquieren en este contexto una apariencia más simple pues basta que las condiciones se verifiquen c.s. y no es necesario tratar integrales superiores o inferiores.

iv) Por último, mencionemos que en la propia construcción de la integral de Lebesgue está el germen de los teoremas de convergencia bajo el signo integral, que son objeto de la siguiente sección, aunque como mencionábamos en la introducción, traducidos al contexto de la integral de Riemann.

1.2. Integrales paramétricas

Esta sección se dedica al establecimiento de los resultados fundamentales relativos a las denominadas *integrales dependientes de parámetros* o *integrales paramétricas*, que se definen como la integral de una cierta función de varias variables respecto de un grupo de ellas, jugando las otras variables el papel de parámetros. Como veremos, la regularidad de la función integrando, junto con ciertas condiciones de acotación, garantizan la regularidad de la función integral.

En lo que sigue se considerarán subconjuntos E de $\mathbb{R}^p$ compactos y medibles o abiertos, en los que tenga sentido la integral de las funciones correspondientes, bien en el sentido de Riemann, bien en el sentido impropio.

Teorema 1.12 (de la convergencia monótona). Sean E un subconjunto de $\mathbb{R}^p$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones no negativas e integrables en E. Se supone que:

I) Para cada $\boldsymbol{y} \in E$ la sucesión numérica $\big\{f_n(\boldsymbol{y})\big\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente, es decir,

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_n \le f_{n+1} \le \ldots$$

II) Para cada $\boldsymbol{y} \in E$ es finito el límite $f(\boldsymbol{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{y})$ (que existe por la monotonía de la sucesión), y tiene sentido la integral en E de la función límite f.

Entonces

$$\int_E f(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,.$$

Teorema 1.13 (de la convergencia dominada). Sean E un subconjunto de $\mathbb{R}^p$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables en E. Se supone que:

I) Para cada $\boldsymbol{y} \in E$ existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$, y tiene sentido la integral en E de la función límite f.

II) Existe una función g integrable en E tal que

$$\big|f_n(\boldsymbol{y})\big| \le g(\boldsymbol{y}) \qquad \text{para todo } \boldsymbol{y} \in E \text{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces f es integrable en E, se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E \big|f(\boldsymbol{y}) - f_n(\boldsymbol{y})\big|\,d\boldsymbol{y} = 0$, y en consecuencia,

$$\int_E f(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,.$$

Observación 1.14. Como siempre, lo que suceda en conjuntos de medida nula es irrelevante, y los dos teoremas anteriores se pueden reformular relajando las hipótesis, permitiendo que las condiciones impuestas a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no se verifiquen en un subconjunto de E de medida nula.

A partir de los teoremas precedentes se deducen los siguientes resultados sobre continuidad y derivabilidad de integrales paramétricas.

Teorema 1.15 (de continuidad bajo el signo integral). Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^m$, E un subconjunto de $\mathbb{R}^p$, y $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ una función real definida en $A \times E \subset \mathbb{R}^{m+p}$. Sea $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A, y supongamos que:

I) Para cada $\boldsymbol{x} \in A$ la función $F_{\boldsymbol{x}}$, definida por $F_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, es integrable en E.

II) Para cada $\boldsymbol{y} \in E$ la función $F_{\boldsymbol{y}}$, definida por $F_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, es continua en $\boldsymbol{x}_0$.

III) Existen un entorno V de $\boldsymbol{x}_0$ y una función integrable $g : E \to \mathbb{R}$ tales que

$$|F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le g(\boldsymbol{y}) \qquad \text{para todo } \boldsymbol{x} \in V \cap A \text{ y todo } \boldsymbol{y} \in E\,.$$

Entonces la función f, definida de A en $\mathbb{R}$ por

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_E F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y},$$

es continua en $\boldsymbol{x}_0$.

El teorema anterior, de carácter local, admite una versión global si la acotación expresada en la tercera de las hipótesis es válida para todo $\boldsymbol{x} \in A$. En concreto:

Corolario 1.16. Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^m$, E un subconjunto de $\mathbb{R}^p$, y $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ una función real definida en $A\times E\subset\mathbb{R}^{m+p}$. Supongamos que:

i) Para cada $\boldsymbol{x}\in A$ la función $F_{\boldsymbol{x}}$, definida por $F_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, es integrable en E.

ii) Para cada $\boldsymbol{y}\in E$ la función $F_{\boldsymbol{y}}$, definida por $F_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, es continua en A.

iii) Existe una función integrable $g:E\to\mathbb{R}$ tal que
$$|F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\le g(\boldsymbol{y})\qquad \text{para todo } \boldsymbol{x}\in A \text{ y todo } \boldsymbol{y}\in E.$$

Entonces la función f, definida de A en $\mathbb{R}$ por $f(\boldsymbol{x})=\int_E F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$, es continua en A.

Teorema 1.17 (de derivación bajo el signo integral). Sean A un abierto de $\mathbb{R}^m$, E un subconjunto de $\mathbb{R}^p$, y F una función real definida en $A\times E\subset\mathbb{R}^{m+p}$. Supongamos que:

i) Para cada $\boldsymbol{x}\in A$ la función $F_{\boldsymbol{x}}$, definida por $F_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, es integrable en E.

ii) Para cada $\boldsymbol{y}\in E$ la función $F_{\boldsymbol{y}}$, definida por $F_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, admite derivada parcial continua respecto de x_j en A.

iii) La función $\boldsymbol{y}\mapsto\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ es localmente integrable en E y existe una función g_j integrable en E tal que
$$\big|D_jF_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\big|=\Big|\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big|\le g_j(\boldsymbol{y})\qquad \text{para todo } \boldsymbol{x}\in A \text{ y todo } \boldsymbol{y}\in E\,.$$

Entonces la función f, definida en A por $f(\boldsymbol{x})=\int_E F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$, admite derivada parcial continua respecto de x_j en A, y se tiene que
$$D_jf(\boldsymbol{x})=\frac{\partial}{\partial x_j}\int_E F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}=\int_E\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y},\qquad \boldsymbol{x}\in A\,.$$

Corolario 1.18. Si en el teorema anterior las condiciones ii) y iii) se verifican para cada índice $j=1,2,\dots,m$, entonces f es de clase $\mathscr{C}^1$ en A y se tiene que
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})=\int_E\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y},\qquad j=1,2,\dots,m\,.$$

Observación 1.19. El teorema de derivación puede ser aplicado a las derivadas sucesivas cuando la función $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ es suficientemente regular y así, por ejemplo, si se verifican las condiciones pertinentes,
$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_m}f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}(\boldsymbol{x})=\int_E\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_m}F}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,.$$

1.2.1. Integrales eulerianas

Las denominadas *funciones eulerianas* Gamma (Γ) y Beta (B) están definidas por integrales paramétricas, y al igual que las trigonométricas, de Bessel, integrales elípticas, etc., son trascendentes (no algebraicas), pero están perfectamente tabuladas, y resultan de gran utilidad en el estudio de numerosos problemas.

Definición 1.20 (Función Gamma). Para cada $t\in(0,\infty)$ se define
$$\Gamma(t)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{t-1}\,dx.$$

Propiedades 1.21.

i) $\Gamma(t)$ está definida y es positiva para todo $t>0$.

ii) $\Gamma(t)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(0,\infty)$ y además, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\Gamma^{(n)}(t)=\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}(\log(x))^n\,dx$.

iii) $\Gamma(t)=(t-1)\,\Gamma(t-1)$ para todo $t>1$.

iv) $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(n)=(n-1)!$, $n\ge 2$ (ver figura 1.1).

v) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, y $\Gamma\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}$, $n\in\mathbb{N}$.

VI) $\lim_{t\to 0^+} \Gamma(t) = +\infty$ y $\lim_{t\to+\infty} \Gamma(t) = +\infty$; más aún,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{e^{-t}t^t\sqrt{2\pi t}} = 1\,. \qquad (\textit{Fórmula de Stirling})$$

De esta relación se deduce que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Gamma(m+\alpha)}{m^\alpha \Gamma(m)} = 1, \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{(m+p)!}{m!\,m^p} = 1, \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdots 2m}\sqrt{m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

VII) *Fórmula de Gauss*: $m^{mn}\,\Gamma(n)\,\Gamma\Big(n+\dfrac{1}{m}\Big)\cdots\Gamma\Big(n+\dfrac{m-1}{m}\Big) = (2\pi)^{(m-1)/2}\,\sqrt{m}\,\Gamma(m\,n)\,.$

Como caso particular, para $m=2$ se obtiene que $\Gamma(n)\,\Gamma\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\,\Gamma(2n)\,.$

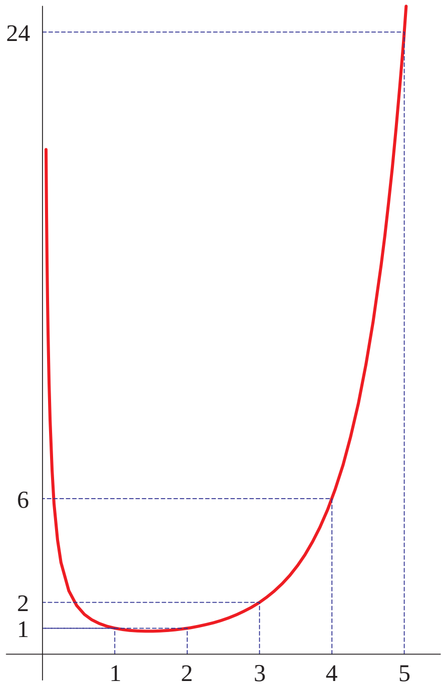


Figura 1.1: La función Γ interpola al factorial.

Definición 1.22 (Función Beta). Para cada $(u,v)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ se define

$$\mathrm{B}(u,v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx.$$

Propiedades 1.23.

I) $\mathrm{B}(u,v)$ está bien definida para todo $(u,v)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$.

II) La función B es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $(0,\infty)\times(0,\infty)$, y para todos $n,m\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{\partial^{n+m}\mathrm{B}}{\partial u^n \partial v^m}(u,v) = \int_0^1 \big(\log(x)\big)^n\big(\log(1-x)\big)^m\,x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx.$$

III) $\mathrm{B}(u,v) = \mathrm{B}(v,u)$ para todo $(u,v)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$.

IV) Para cada $(u,v)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ se tiene que $\mathrm{B}(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.

V) *Fórmula de los complementos*: Para cada $\theta\in(0,1)$ se verifica que $\mathrm{B}(\theta,1-\theta) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\theta\pi)}$, es decir, $\Gamma(\theta)\,\Gamma(1-\theta) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\theta\pi)}\,.$

VI) *Fórmula de duplicación*: $\mathrm{B}(m,m) = \dfrac{1}{2^{2m-1}}\,\mathrm{B}(m,1/2)\,.$

La tabla 1.1 muestra los valores aproximados de la función Gamma en el intervalo $(0,1]$, comenzando en el punto 0,005 y con incrementos sucesivos de 5 milésimas. La entrada de cada fila y columna representa $\Gamma(x)$, siendo x el número que resulta de sumar los valores de las respectivas etiquetas.

Para valores de x mayores que 1 basta recordar que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Por ejemplo, aplicando esta fórmula el número de veces necesario y utilizando finalmente la tabla 1.1, se tiene que

$$\begin{aligned}\Gamma(3{,}495) &= 2{,}495 \cdot \Gamma(2{,}495) = 2{,}495 \cdot 1{,}495 \cdot \Gamma(1{,}495) = 2{,}495 \cdot 1{,}495 \cdot 0{,}495 \cdot \Gamma(0{,}495)\\ &= 1{,}846362375 \cdot \Gamma(0{,}475 + 0{,}020) = 1{,}846362375 \cdot 1{,}790051752 = 3{,}305084204\end{aligned}$$

	+ 0,005	+ 0,010	+ 0,015	+ 0,020	+ 0,025
0	199,4277071	99,43258512	66,10408592	49,44221016	39,44695853
0,025	32,78499835	28,02775887	24,46095502	21,68776204	19,47008531
0,05	17,65641030	16,14572749	14,86810742	13,77360061	12,82557759
0,075	11,99656638	11,26555914	10,61621654	10,03563919	9,513507705
0,1	9,041468360	8,612686400	8,221515782	7,863251547	7,533941601
0,125	7,230241921	6,949303967	6,688686183	6,446283836	6,220272874
0,15	6,009064656	5,811269166	5,625664921	5,451174180	5,286842414
0,175	5,131821191	4,985353834	4,846763353	4,715442226	4,590843712
0,2	4,472474442	4,359888062	4,252679767	4,150481580	4,052958254
0,225	3,959803723	3,870737989	3,785504410	3,703867315	3,625609909
0,25	3,550532417	3,478450453	3,409193565	3,342603942	3,278535271
0,275	3,216851702	3,157426936	3,100143401	3,044891507	2,991568989
0,3	2,940080293	2,890336054	2,842252586	2,795751447	2,750759036
0,325	2,707206223	2,665028015	2,624163256	2,584554344	2,546146977
0,35	2,508889925	2,472734812	2,437635922	2,403550020	2,370436185
0,375	2,338255656	2,306971699	2,276549466	2,246955885	2,218159544
0,4	2,190130588	2,162840628	2,136262649	2,110370928	2,085140960
0,425	2,060549386	2,036573928	2,013193326	1,990387280	1,968136401
0,45	1,946422154	1,925226818	1,904533440	1,884325791	1,864588332
0,475	1,845306176	1,826465056	1,808051289	1,790051752	1,772453851
0,5	1,755245494	1,738415068	1,721951417	1,705843814	1,690081949
0,525	1,674655902	1,659556128	1,644773442	1,630298996	1,616124269
0,55	1,602241050	1,588641427	1,575317767	1,562262713	1,549469163
0,575	1,536930265	1,524639404	1,512590193	1,500776462	1,489192249
0,6	1,477831792	1,466689522	1,455760053	1,445038175	1,434518848
0,625	1,424197195	1,414068493	1,404128172	1,394371805	1,384795102
0,65	1,375393909	1,366164199	1,357102068	1,348203731	1,339465518
0,675	1,330883868	1,322455328	1,314176545	1,306044266	1,298055333
0,7	1,290206678	1,282495323	1,274918376	1,267473025	1,260156538
0,725	1,252966262	1,245899615	1,238954088	1,232127242	1,225416702
0,75	1,218820162	1,212335374	1,205960154	1,199692374	1,193529963
0,775	1,187470905	1,181513239	1,175655051	1,169894481	1,164229714
0,8	1,158658983	1,153180566	1,147792785	1,142494004	1,137282628
0,825	1,132157103	1,127115911	1,122157575	1,117280653	1,112483737
0,85	1,107765455	1,103124467	1,098559467	1,094069179	1,089652357
0,875	1,085307787	1,081034282	1,076830683	1,072695858	1,068628702
0,9	1,064628136	1,060693106	1,056822580	1,053015553	1,049271042
0,925	1,045588084	1,041965740	1,038403093	1,034899245	1,031453317
0,95	1,028064453	1,024731813	1,021454577	1,018231942	1,015063124
0,975	1,011947356	1,008883886	1,005871980	1,002910919	1

Tabla 1.1: Valores de la función Γ en el intervalo $(0,1]$.

Las propiedades de las dos funciones eulerianas permiten expresar una amplia gama de integrales en función de ellas realizando simples cambios de variable. En la tabla 1.2 se relacionan una serie de integrales que mediante cambios de variable se expresan en términos de las funciones eulerianas. Se indica la integral, su solución y el cambio de variable realizado, así como los valores de los parámetros para los que la correspondiente integral impropia tiene sentido y es convergente.

	Integral {Parámetros admisibles}	**Cambio de variable**
I	$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^p} x^q\,dx = \frac{1}{p\,a^{(q+1)/p}}\,\Gamma\Big(\frac{q+1}{p}\Big)$ $\{p, a > 0, q > -1\}$	$a\,x^p = y$
II	$\displaystyle\int_0^a x^p\,(a^r - x^r)^q\,dx = \frac{a^{p+qr+1}}{r}\,\mathrm{B}\Big(\frac{p+1}{r}, q+1\Big)$ $\{p, q > -1, a, r > 0\}$	$x^r = a^r\,y$
III	$\displaystyle\int_a^b (x-a)^p\,(b-x)^q\,dx = (b-a)^{p+q+1}\,\mathrm{B}(p+1, q+1)$ $\{p, q > -1\}$	$x = a + (b-a)\,y$
IV	$\displaystyle\int_a^b \frac{(x-a)^p\,(b-x)^q}{\lvert x-c\rvert^{p+q+2}}\,dx = \frac{(b-a)^{p+q+1}\,\mathrm{B}(p+1, q+1)}{\lvert a-c\rvert^{q+1}\lvert b-c\rvert^{p+1}}$ $\{p, q > -1, c \notin [a, b]\}$	$\displaystyle x = \frac{a(b-c) + c(a-b)y}{(b-c) + (a-b)y}$
V	$\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(a\,x^p + b)^q}\,dx = \frac{b^{(\frac{\alpha+1}{p} - q)}}{p\,a^{\frac{\alpha+1}{p}}}\,\mathrm{B}\Big(\frac{\alpha+1}{p}, q - \frac{\alpha+1}{p}\Big)$ $\{a, b, p > 0, \alpha > -1, q > (\alpha+1)/p\}$	$\displaystyle\frac{b}{a\,x^p + b} = y$
VI	$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^p(\theta)\cos^q(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\Big(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\Big)$ $\{p, q > -1\}$	$\operatorname{sen}^2(\theta) = y$
VII	$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^p(\theta)\operatorname{sen}^q(\theta)\,d\theta}{\big(a\cos^2(\theta) + b\operatorname{sen}^2(\theta)\big)^{\frac{p+q}{2}+1}} = \frac{\mathrm{B}\Big(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\Big)}{2\,a^{\frac{p+1}{2}}\,b^{\frac{q+1}{2}}}$ $\{p, q > -1, a, b > 0\}$	$\displaystyle\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{a\,y}{(a-b)\,y + b}$

Tabla 1.2: Integrales reducibles a las eulerianas.

1.3. Transformadas integrales

En el estudio de numerosos problemas de las Ciencias y la Técnica, aparecen transformaciones del siguiente tipo: a cada función f de un cierto espacio se le asigna una nueva función Tf mediante la expresión

$$Tf(\boldsymbol{x}) = \int_A K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,f(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y},$$

donde K es una función, denominada *núcleo integral*, y las variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ recorren ciertos subconjuntos en los espacios euclídeos apropiados. Estas aplicaciones $f \to Tf$ reciben el nombre de *transformadas integrales*, y ejemplos de ellas son las transformaciones de Fourier, Laplace, Mellin, Hilbert, etc. Recordaremos la definición y propiedades fundamentales de la primera, poniendo de relieve el papel que juegan los teoremas relativos a integrales paramétricas para deducir algunas de dichas propiedades.

1.3.1. Transformación de Fourier

Definición 1.24. Para cada función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrable se define su *transformada de Fourier*, denotada por $\widehat{f}$ o $\mathfrak{F}(f)$, como la función $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) &= \widehat{f}(\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}}\, f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_n x_n)}\, f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n\,.\end{aligned}$$

Propiedades 1.25. Sean f y g funciones complejas e integrables en $\mathbb{R}^n$. El teorema del cambio de variables para integrales múltiples junto con las demás propiedades elementales de la integral, permiten demostrar las siguientes propiedades:

I) La transformada de Fourier de f es una función acotada; concretamente,

$$\big|\widehat{f}(\boldsymbol{\omega})\big| \le \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(\boldsymbol{x})\big|\, d\boldsymbol{x} \qquad \text{para cada } \ \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n\,.$$

II) La transformación de Fourier es lineal, es decir, si $a, b \in \mathbb{C}$ entonces

$$\mathfrak{F}(a\, f + b\, g) = a\, \mathfrak{F}(f) + b\, \mathfrak{F}(g)\,.$$

III) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, y $g(\boldsymbol{x}) = f\big(\boldsymbol{x}/\lambda\big)$ para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\widehat{g}(\boldsymbol{\omega}) = \lambda^n\, \widehat{f}(\lambda\, \boldsymbol{\omega})$.

IV) Si $g(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\widehat{g}(\boldsymbol{\omega}) = \widehat{f}(-\boldsymbol{\omega})$.

V) Si $g(\boldsymbol{x}) = \overline{f(\boldsymbol{x})}$ para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\widehat{g}(\boldsymbol{\omega}) = \overline{\widehat{f}(-\boldsymbol{\omega})}$.

VI) Si $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\widehat{g}(\boldsymbol{\omega}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\omega})\, e^{-i\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}_0}$.

VII) Si $\boldsymbol{\omega}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\, e^{i\,\boldsymbol{\omega}_0\cdot\boldsymbol{x}}$ para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\widehat{g}(\boldsymbol{\omega}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)$.

VIII) La función $\widehat{f}$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

IX) Se supone que f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y que $D_j f$ es una función integrable y se anula en el infinito $\big(\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} D_j f(\boldsymbol{x}) = 0\big)$. Entonces $\widehat{D_j f}(\boldsymbol{\omega}) = i\, \omega_j\, \widehat{f}(\boldsymbol{\omega})$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}}\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = i\, \omega_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}}\, f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

(Obsérvese que, en las condiciones del enunciado, $\lim\limits_{x_j\to\infty} D_j f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ para cualesquiera $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ prefijados.)

Como consecuencia del teorema 1.17 se deduce el siguiente.

Teorema 1.26. Si f y la función $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \|\boldsymbol{x}\|\, f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}$ son integrables en $\mathbb{R}^n$, entonces $\widehat{f}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y para cada $j = 1, 2, \dots, n$ se tiene que $D_j \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \mathfrak{F}(-i\, x_j f(\boldsymbol{x}))$, es decir,

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \omega_j}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^n} -i\, x_j\, e^{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_n x_n)}\, f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Puesto que el siguiente capítulo se dedica en exclusiva a la transformación de Laplace, nos limitamos ahora a presentar la definición y una consecuencia inmediata del teorema 1.17.

Definición 1.27. Se dice que f admite *transformada de Laplace* en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \sigma\}$ si para cada z con $\mathrm{Re}(z) > \sigma$ es absolutamente convergente la integral

$$\mathfrak{L}f(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt\,.$$

La función $\mathfrak{L}f$ así definida es la denominada *transformada de Laplace* de f.

Teorema 1.28. En las condiciones de la definición anterior, la función $\mathfrak{L}f$ es holomorfa en su dominio, y para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada z se tiene que

$$\big(\mathfrak{L}f\big)^{(n)}(z) = \int_0^\infty (-t)^n\, f(t)\, e^{-zt}\, dt.$$

1.4. Convolución de funciones. Aproximaciones de la identidad

1.4.1. Producto de convolución

Aunque consideremos las funciones a tratar definidas en todo el espacio (prolongándolas por 0 fuera de su dominio original), convendrá a menudo establecer qué puntos aportan realmente algo a la integral; esto sugiere el concepto de soporte de una función.

Definición 1.29. Si g es una función compleja definida en $\mathbb{R}^n$, se dice que un abierto V de $\mathbb{R}^n$ es *de anulación casi siempre de* g si el conjunto $\{\boldsymbol{x} \in V : g(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ es de medida nula.

Si Θ_g es la unión de todos los abiertos de anulación c.s. de g, se llamará *soporte* de g y se denotará por $\operatorname{sop}(g)$, al complementario en $\mathbb{R}^n$ de Θ_g.

Observaciones 1.30.

I) Si g es continua en todo $\mathbb{R}^n$, este soporte que acabamos de definir coincide con el soporte clásico, es decir, $\operatorname{sop}(g) = \overline{\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : g(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}$. En general, si g es continua en el punto $\boldsymbol{x}_0$ y $g(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, entonces $\boldsymbol{x}_0 \in \operatorname{sop}(g)$; pero si g no es continua en $\boldsymbol{x}_0$, puede suceder que $\boldsymbol{x}_0 \notin \operatorname{sop}(g)$ aunque $g(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$.

II) Con vistas a la integración, la razón de definir este concepto es clara si uno piensa en funciones como $\chi_{\mathbb{Q}}$ (la que vale 1 en los racionales y 0 en los irracionales); para esta función $\overline{\{x \in \mathbb{R} : \chi_{\mathbb{Q}}(x) \neq 0\}} = \mathbb{R}$, pero $\chi_{\mathbb{Q}}$ es igual c.s. a la función idénticamente nula, luego su soporte es el conjunto vacío y por tanto su integral (en el sentido de Lebesgue) en cualquier subconjunto es 0.

Definición 1.31. Sean $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funciones medibles y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Se define el *producto de convolución*, o simplemente la *convolución*, de f y g en el punto $\boldsymbol{x}$, denotado por $(f * g)(\boldsymbol{x})$, como

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})\, g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

supuesta la existencia de dicha integral.

Proposición 1.32. Sean f, g, h funciones complejas y medibles en $\mathbb{R}^n$.

I) La convolución es conmutativa, esto es, si existe $(f * g)(\boldsymbol{x})$, también existe $(g * f)(\boldsymbol{x})$; además

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = (g * f)(\boldsymbol{x}).$$

II) La convolución es distributiva respecto de la suma, es decir, si existen $(f*g)(\boldsymbol{x})$ y $(f*h)(\boldsymbol{x})$, también existe $\big(f * (g + h)\big)(\boldsymbol{x})$; además

$$\big(f * (g + h)\big)(\boldsymbol{x}) = (f * g)(\boldsymbol{x}) + (f * h)(\boldsymbol{x}).$$

Notación: Si A, B son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, y $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se denotan

$$-A = \{-\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in A\}; \qquad \boldsymbol{x}_0 - A = \{\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in A\}; \qquad A + B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B\}.$$

Proposición 1.33. Sean f, g funciones medibles en $\mathbb{R}^n$.

I) Si existe $(f * g)(\boldsymbol{x})$ y $A = \big(\boldsymbol{x} - \operatorname{sop}(f)\big) \cap \operatorname{sop}(g)$, entonces

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = \int_A f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, g(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}.$$

II) Si $f * g$ está definida en todo $\mathbb{R}^n$

$$\operatorname{sop}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{sop}(f) + \operatorname{sop}(g)}.$$

Hasta ahora no hemos dado condiciones para la existencia de la convolución de dos funciones. Lo que sigue va orientado en este sentido.

Teorema 1.34. Si f es integrable en $\mathbb{R}^n$ y g es medible y acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces $f * g$ está definida en todo $\mathbb{R}^n$ y es uniformemente continua y acotada; concretamente

$$|(f * g)(\boldsymbol{x})| \leq \sup\big\{|g(\boldsymbol{y})| : \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\big\} \int_{\mathbb{R}^n} |f|, \qquad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Notación: Por $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ se denota al conjunto de funciones f continuas en $\mathbb{R}^n$ y que se anulan en el infinito, es decir, tales que $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} f(\boldsymbol{x}) = 0$. Estas funciones son uniformemente continuas y acotadas en todo $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.35. Si f es integrable en $\mathbb{R}^n$ y $g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.36. Sean f, g funciones integrables en $\mathbb{R}^n$. Entonces:

I) $f * g$ está definida para casi todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

II) $f * g$ (definida como se quiera en los puntos donde eventualmente no exista) es integrable en $\mathbb{R}^n$.

III) Se verifica la igualdad $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} g$.

IV) Se verifica $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| \int_{\mathbb{R}^n} |g|$.

Corolario 1.37. Si f, g, h son integrables en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad \text{casi siempre en } \mathbb{R}^n.$$

Proposición 1.38. Sean f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ y g una función continua en $\mathbb{R}^n$. Se supone que al menos una de ellas tiene soporte compacto. Entonces $f * g$ está definida en todo $\mathbb{R}^n$.

1.4.2. Aproximaciones de la identidad. Regularización de funciones

El estudio que abordamos ahora tiene especial interés en el problema de aproximación de funciones medibles por funciones regulares, además las técnicas de cálculo que aquí se presentan juegan un papel fundamental en la teoría de distribuciones que veremos más adelante.

Definición 1.39. Se llama *aproximación de la identidad* en $\mathbb{R}^n$ a toda sucesión $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funciones medibles en $\mathbb{R}^n$ verificando:

I) $\theta_k(\boldsymbol{x}) \geq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

II) Para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $\operatorname{sop}(\theta_k)$ está contenido en una bola B_k centrada en $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y cuyo radio tiende a 0 cuando k tiende a ∞; en particular, $\lim\limits_{k\to\infty} m\big(\operatorname{sop}(\theta_k)\big) = 0$.

III) Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \theta_k = \int_{\operatorname{sop}(\theta_k)} \theta_k = 1$.

Es fácil construir aproximaciones de la identidad (basta elegir funciones escalonadas construidas adecuadamente); pero lo que es más interesante es la posibilidad de elegir estas funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$. A ello van dedicados los dos resultados siguientes.

Lema 1.40. Se considera la función ψ definida en $\mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Esta función es no negativa y de clase $\mathscr{C}^\infty$ y, puesto que se anula fuera de $[-1, 1]$, es integrable en $\mathbb{R}$; sea $a = \int_{\mathbb{R}} \psi > 0$. Se define $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi = \psi/a$ y para $n \in \mathbb{N}$ se define $\theta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n).$$

Entonces la función θ es no negativa, de clase $\mathscr{C}^\infty$ e integrable en $\mathbb{R}^n$ con integral igual a 1.

Corolario 1.41. Se considera la función θ definida en el lema anterior. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se define

$$\theta_k(\boldsymbol{x}) = k^n\,\theta(k\,\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces la sucesión $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una aproximación de la identidad en $\mathbb{R}^n$ compuesta por funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$.

Observaciones 1.42. Veamos algunos comentarios relacionados con la prueba de las afirmaciones que se hacen en los dos resultados precedentes, así como de otros aspectos interesantes.

I) La comprobación de la regularidad de $\psi(x)$ se reduce, en última instancia, a comprobar que todas las derivadas laterales de ψ en los puntos -1 y 1 existen y son iguales a 0. Por ejemplo, $\psi'(1^+)$ es obviamente nula, igual que $\psi'(x)$ para $x > 1$, mientras que $\psi'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1}\, e^{1/(x^2-1)} = 0$, y por otra parte para $-1 < x < 1$ se tiene que $\lim\limits_{x\to 1^-} \psi'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-2\,x}{(x^2-1)^2}\, e^{1/(x^2-1)} = 0$, por lo que ψ' es continua en $x_0 = 1$. El hecho de que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{e^{-1/h}}{h^\alpha} = 0$ permite demostrar, recurrentemente, la existencia de todas las derivadas sucesivas en 1 y -1 de la función ψ.

II) Puesto que ψ es continua en $\mathbb{R}$, nula fuera de $[-1,1]$ y positiva en $(-1,1)$, es obvio que $a = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \psi(x)\,dx > 0$. La función $\varphi = \psi/a$, producto de una constante positiva por ψ, será igualmente de clase $\mathscr{C}^\infty$, no negativa, se anulará fuera de $[-1,1]$, y su integral valdrá 1.

III) Que θ es no negativa es evidente y la comprobación de su regularidad es una mera cuestión de cálculo. Respecto a la integrabilidad, está garantizada por ser θ continua en $\mathbb{R}^n$ y nula fuera del compacto $C = [-1,1] \times [-1,1] \times \cdots \times [-1,1]$. Además, del teorema de Fubini se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_C \theta(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{-1}^{1} \varphi(x_1)\,dx_1 \int_{-1}^{1} \varphi(x_2)\,dx_2 \cdots \int_{-1}^{1} \varphi(x_n)\,dx_n = 1.$$

IV) En cuanto a las funciones θ_k, notemos primero que

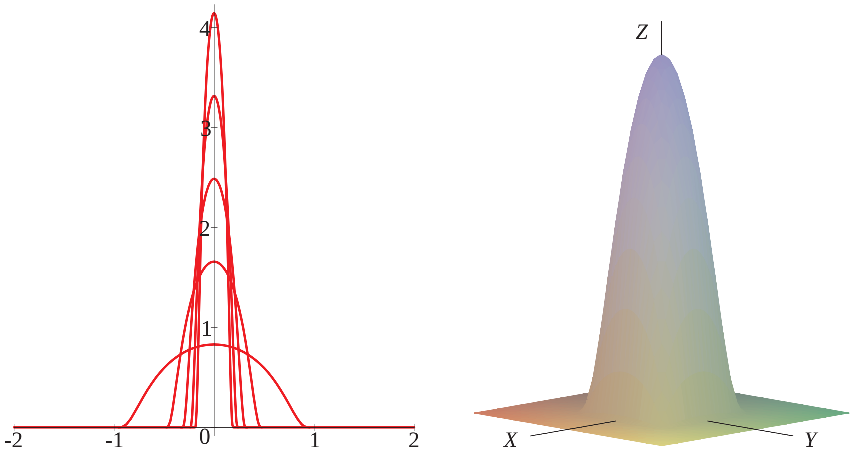
$$\theta_k(\mathbf{0}) = k^n\,\theta(\mathbf{0}) = k^n\,\varphi(0)\,\varphi(0)\cdots\varphi(0) = k^n\,\varphi(0)^n \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,.$$

Luego, observemos que si alguna de las coordenadas x_j del punto $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verifica que $k\,|x_j| > 1$ entonces $\varphi(k\,x_j) = 0$ y, en consecuencia $\theta_k(\boldsymbol{x}) = k^n\,\varphi(k\,x_1)\,\varphi(k\,x_2)\cdots\varphi(k\,x_n) = 0$. En otras palabras, θ_k se anula fuera del compacto

$$C_k = \left[-1/k, 1/k\right] \times \left[-1/k, 1/k\right] \times \cdots \times \left[-1/k, 1/k\right].$$

Entonces, si $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\boldsymbol{x}\|_\infty > 1/k$ para todo $k \geq k_0$, por lo que $\theta_k(\boldsymbol{x}) = 0$ si $k \geq k_0$ y, en consecuencia, $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_k(\boldsymbol{x}) = 0$ (ver figura 1.2). Resumiendo:

$$\lim_{k\to\infty} \theta_k(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \\ \infty & \text{si } \boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{1.1}$$



$\theta_k,\ 1 \leq k \leq 5$ θ_2

Figura 1.2: Algunas funciones θ_k en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.

Finalmente, notemos que del teorema del cambio de variables, aplicado al isomorfismo lineal

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \boldsymbol{\varphi}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{k}\,(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{k}\,\boldsymbol{y}\,,$$

cuyo jacobiano es en todo punto $1/k^n$ y que transforma C en C_k, se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta_k(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{C_k} \theta_k(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{C_k} k^n\,\theta(k\,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_C \theta(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = 1\,. \tag{1.2}$$

Teorema 1.43. Sea $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una aproximación de la identidad en $\mathbb{R}^n$. Si f es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ y continua en $\mathbf{0}$ entonces

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\theta_k(\boldsymbol{x})\,f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=f(\mathbf{0})\,.$$

Observación 1.44. En las condiciones del teorema anterior, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\theta_k(\boldsymbol{x})\,f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}-f(\mathbf{0})=\int_{\operatorname{sop}(\theta_k)}\theta_k(\boldsymbol{x})\,\big(f(\boldsymbol{x})-f(\mathbf{0})\big)\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Si f es continua en $\mathbf{0}$, puesto que $\operatorname{sop}(\theta_k)$ está contenido en un entorno de este punto de diámetro tan pequeño como se quiera, tomando k suficientemente grande, podemos hacer $\big|f(\boldsymbol{x})-f(\mathbf{0})\big|<\varepsilon$ siendo $\varepsilon>0$ cualquier cantidad previamente fijada; la conclusión del teorema es inmediata de la desigualdad

$$\Big|\int_{\operatorname{sop}(\theta_k)}\theta_k(\boldsymbol{x})\,\big(f(\boldsymbol{x})-f(\mathbf{0})\big)\,d\boldsymbol{x}\Big|\le\int_{\operatorname{sop}(\theta_k)}\theta_k(\boldsymbol{x})\,\big|f(\boldsymbol{x})-f(\mathbf{0})\big|\,d\boldsymbol{x}\le\int_{\operatorname{sop}(\theta_k)}\varepsilon\,\theta_k(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=\varepsilon\,.$$

***Nota**: La* delta de Dirac *en* $\mathbf{0}$*, que es el operador lineal definido por* $f\longmapsto\delta_{\mathbf{0}}(f)=f(\mathbf{0})$*, se define en muchos textos de Física, para representar la idea de* impulso instantáneo *y relajando el rigor matemático a partir de las relaciones (1.1) y (1.2), como la "función"* $\delta_{\mathbf{0}}$ *que tiene integral* 1*, que vale* 0 *en todos los puntos menos en* $\mathbf{0}$*, donde toma el valor* ∞*; esto es absurdo pues, con la misma relajación del rigor, podríamos establecer que*

$$1=\int_{\mathbb{R}^n}\delta_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}2\,\delta_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=2\int_{\mathbb{R}^n}\delta_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=2\,.$$

Lo que se ha obtenido muestra que la delta de Dirac, que es una de las llamadas distribuciones *o* funciones generalizadas*, aunque no puede ser asociada a ninguna función, puede ser "aproximada" por funciones en el sentido ordinario. El establecimiento riguroso de esta aproximación se establecerá más tarde, pero sirva de adelanto que a toda función localmente integrable* g *se le asocia una distribución* T_g *que actúa sobre cierta clase de funciones* f *de la forma* $T_g(f)=\int_{\mathbb{R}^n}g(\boldsymbol{x})\,f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$.

Teorema 1.45. Sea $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una aproximación de la identidad en $\mathbb{R}^n$ por funciones de clase $\mathscr{C}^{\infty}$.

i) Si f es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces para $k\in\mathbb{N}$ está bien definida la función

$$f_k(\boldsymbol{x})=(f*\theta_k)(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{y})\,\theta_k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$$

y es de clase $\mathscr{C}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^n$.

ii) Si además f es continua en $\mathbb{R}^n$ la sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia f. De hecho, si K es un compacto de $\mathbb{R}^n$, la sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f en K.

Observaciones 1.46.

i) Que f_k está bien definida es consecuencia de la proposición 1.38. La regularidad de f_k se decuce del teorema 1.17 que garantiza que f_k es derivable con continuidad y que

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{y})\,\frac{\partial\theta_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,,\qquad j=1,2,\dots,n\,.$$

Para las derivadas de orden dos se razona igual a partir de las expresiones anteriores, teniendo en cuenta que las parciales segundas de θ_k son acotadas y, en general, se prueba por recurrencia la existencia y continuidad de las derivadas parciales de f_k de cualquier orden.

ii) En cuanto a la aproximación de f por las f_k, en primer lugar se tiene que

$$f_k(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{y})\,\theta_k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\,\theta_k(\boldsymbol{z})\,d\boldsymbol{z}\,.$$

Luego, fijado $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, la función g definida en $\mathbb{R}^n$ por $g(\boldsymbol{z})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})$ es continua. Entonces, aplicando el resultado 1.43 a la función g se deduce que

$$\lim_{k\to\infty}f_k(\boldsymbol{x})=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\,\theta_k(\boldsymbol{z})\,d\boldsymbol{z}=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\theta_k(\boldsymbol{z})\,g(\boldsymbol{z})\,d\boldsymbol{z}=g(\mathbf{0})=f(\boldsymbol{x})\,,$$

es decir, la sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente hacia f en $\mathbb{R}^n$.

III) Como vemos, el producto de convolución, aparte de ser de uso habitual en diversas disciplinas tales como la Teoría de la Señal, proporciona una herramienta teórica muy importante en el estudio de las ecuaciones funcionales. En el último teorema se ha establecido que toda función continua es límite uniforme en los compactos de funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$; pero todavía se puede mejorar el teorema 1.45 en el sentido de que también es posible aproximar la derivadas.

Lema 1.47. Sean f, g funciones de clase $\mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $\operatorname{sop}(f)$ o $\operatorname{sop}(g)$ es acotado (i.e. compacto). Entonces $f * g$ es de clase $\mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R}^n$ y para cada índice $i = 1, 2, \dots, n$ se tiene que

$$\frac{\partial (f*g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}\,.$$

Teorema 1.48. Sean f una función de clase $\mathscr{C}^m$ en $\mathbb{R}^n$ y $\{\theta_k\}_{k=1}^\infty$ una aproximación de la identidad en $\mathbb{R}^n$ por funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$. Entonces $f*\theta_k$ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^n$ para todo $k \ge 1$; además, para cada familia de enteros no negativos $j_1, j_2, \dots, j_n$ con $j_1 + j_2 + \dots + j_n = \alpha \le m$ la sucesión de funciones $\left\{\dfrac{\partial^\alpha (f*\theta_k)}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\cdots\partial x_n^{j_n}}\right\}_{k=1}^\infty$ converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{R}^n$ hacia $\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\cdots\partial x_n^{j_n}}$.

Observación 1.49. A la vista de los resultados anteriores es fácil comprender porqué se llama también *sucesión regularizante* a cualquier aproximación de la identidad por funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$.

Ejercicios

1.1 Calcular los siguientes límites:

I) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\,x}{1+n^2x^2}\,dx$ II) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\,x\log(x)}{1+n^2x^2}\,dx$ III) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n e^{x/2}\,dx$

IV) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n e^{-2x}\,dx$ V) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{n^2x\,e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx\,.$

1.2 Sean E un compacto medible o un abierto de $\mathbb{R}^p$ y $f\colon E\to\mathbb{R}$ una función no negativa e integrable en E. Si $\alpha \ge 1$ calcular

$$\lim_{n\to\infty}\int_E n\,\log\Big(1+\big(f(\boldsymbol{x})/n\big)^\alpha\Big)\,d\boldsymbol{x}\,.$$

1.3 Demostrar que si $|x|\le 1$ y $t>0$ para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\left|\sum_{k=0}^n x^k\,e^{-(k+1)t}\right| \le \frac{2}{e^t - x},$$

y deducir que si $|x|\le 1$ entonces

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(t)}{e^t - x}\,dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{1+n^2}.$$

1.4 Probar que

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}\log(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{9}{(3\,n+4)^2}\,.$$

1.5 Para cada $t\in\mathbb{R}$ se considera

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2\,t\,x)\,dx\,.$$

I) Probar que f está bien definida y es derivable en $\mathbb{R}$, con derivada $f'(t) = -2\,t\,f(t)$.

II) Demostrar que la siguiente integral impropia es convergente y calcular su valor:

$$\iint_{(0,\infty)\times(0,\infty)} \frac{x}{x^2+y^2}\,e^{-(x^2+y^2)}\cos\big(2\,t\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\,dx\,dy\,.$$

1.6 Demostrar que la función definida por

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\, dy\,, \quad x > 0,$$

es derivable en $(0, \infty)$, calcular su derivada y obtener una expresión explícita de f.

1.7 Calcular el valor de la integral

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x\,y)}{y\,(1+y^2)}\, dy.$$

1.8 Calcular, para $x \in \mathbb{R}$, el valor de

$$h(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(x\,y)}{y^2}\, e^{-y}\, dy\,.$$

1.9 Estudiando la derivabilidad de la función

$$f(x) = \int_0^x \frac{\log(1+x\,t)}{1+t^2}\, dt, \quad x \geq 0,$$

deducir el valor de

$$\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t^2}\, dt.$$

1.10 Sea $c > 0$. A partir de la función

$$f(y) = \int_0^\infty \frac{x^y}{x^2+c^2}\, dx$$

obtener que

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2+c^2}\, dx = \frac{\pi\log(c)}{2\,c} \qquad \text{y} \qquad \int_0^\infty \frac{\log(x)\sqrt{x}}{x^2+c^2}\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2\,c}}\big(2\log(c)+\pi\big).$$

1.11 Se considera el intervalo $I = (0,\pi)\times(0,\pi)\times(0,\pi)$. Probar que la integral impropia

$$\iiint_I \frac{dx\,dy\,dz}{1-\cos(x)\cos(y)\cos(z)}$$

es convergente y calcular su valor.

Indicación: Realizar primero, en cada variable, el cambio típico para las fracciones racionales trigonométricas $t = \operatorname{tg}\big(x/2\big)$.

1.12 Sean p, q, r, m números reales positivos, y B la bola abierta de $\mathbb{R}^3$ centrada en $\mathbf{0}$ y de radio 1. Estudiar para qué valores de esos parámetros la siguiente integral impropia es convergente y calcular su valor cuando proceda:

$$\iiint_B \frac{|x|^p\,|y|^q\,|z|^r}{\big(x^2+y^2+z^2\big)^m}\, dx\,dy\,dz\,.$$

1.13 Demostrar el teorema 1.26.

1.14 Sean f, g funciones integrables en $\mathbb{R}$, probar que

$$\mathfrak{F}(f*g) = \mathfrak{F}(f)\,\mathfrak{F}(g)\,.$$

1.15 Sean $I = [a,b]$ y $J = [c,d]$ dos intervalos compactos de la recta y $f = \chi_I$, $g = \chi_J$ sus respectivas funciones características. Calcular $f*g$.

1.16 Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y F una primitiva suya. Si $g = \chi_I$ es la función característica de un intervalo $I = [a,b]$, calcular $f*g$ en función de F.

1.17 Considérese la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{si } 0 < |x| < 1; \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Comprobar que f es integrable en $\mathbb{R}$ pero $f * f$ no está definida en todo punto.

1.18 Para cada $\lambda > 0$ sea f_λ la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}\,\chi_{[0,\infty)}(x), \qquad \text{es decir: } f_\lambda(x) = 0 \text{ si } x < 0\,; \quad f_\lambda(x) = e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0.$$

Calcular $f_\lambda * f_\mu$.

1.19 (Funciones gaussianas) Una función de la forma $f(x) = C\,e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ se denomina *gaussiana*. La integral de f en $\mathbb{R}$ es igual a 1 si, y sólo si, $C = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$; en este caso, si f representa la *función de densidad* de una *variable aleatoria*, μ y σ^2 son la *media* y la *varianza*, respectivamente, de dicha variable.

I) Sea $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$. Probar que la transformada de Fourier de φ satisface la ecuación diferencial $\widehat{\varphi}\,'(\omega) + \omega\,\widehat{\varphi}(\omega) = 0$. Deducir que $\widehat{\varphi}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\varphi(\omega) = \sqrt{2\pi}\,e^{-w^2/2}$.

II) Probar que la convolución de dos gaussianas es una gaussiana. Concretamente, si

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1{}^2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\mu_2)^2/2\sigma_2{}^2}$$

entonces

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad \text{donde} \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad \text{y} \quad \mu = \mu_1 + \mu_2\,.$$

1.20 (Funciones meseta)

I) *Construcción mediante convoluciones*:
Sean $a < b$ números reales. Mediante la convolución de los elementos de una sucesión regularizante con la función característica del intervalo $[a-\delta, b+\delta]$, $\delta > 0$, comprobar que paro todo $r > 0$ existe una función f de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ tal que

1. $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 1$ si $x \in [a, b]$.
3. $f(x) = 0$ si $x \notin [a-r, b+r]$.

A tales funciones f se les denomina *funciones meseta*.

II) *Construcción explícita*:
La función $g(x) = e^{-1/x}\chi_{(0,\infty)}(x)$, esto es,

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. Sean $c < a < b < d$ números reales (esto es, $[a, b] \subset (c, d)$).

1. La función $h_r(x) = \dfrac{g(d-x)}{g(x-b) + g(d-x)}$ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, toma valores entre 0 y 1, se anula para $x \geq d$ y vale 1 para $x \leq b$.
2. La función $h_l(x) = \dfrac{g(x-c)}{g(x-c) + g(a-x)}$ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, toma valores entre 0 y 1, se anula para $x \leq c$ y vale 1 para $x \geq a$.
3. La función $f(x) = h_l(x)h_r(x)$ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si $x \notin [c, d]$ y $f(x) = 1$ si $x \in [a, b]$.

III) *Aproximación de funciones integrables por funciones $\mathscr{C}^\infty$*:
Sea $s \underset{c.s.}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \chi_{I_j}$ una función escalonada en $\mathbb{R}$. Aproximando las funciones características χ_{I_j} por funciones meseta, probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe g de clase $\mathscr{C}^\infty$ y soporte compacto con

$$\int_{\mathbb{R}} |s(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Deducir lo mismo para una función integrable en $\mathbb{R}$.

Capítulo 2

Transformación de Laplace

Como ya se ha comentado anteriormente, una de las aplicaciones más relevantes de la teoría de integrales dependientes de parámetros es el estudio de transformadas integrales, como las de Fourier y Laplace. En este capítulo nos centraremos en la segunda de ellas.

Su consideración se origina en los intentos realizados por matemáticos del siglo XIX de algebrizar el problema analítico de la resolución de ecuaciones diferenciales. En concreto, O. Heaviside diseñó un método simbólico para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes que, aunque exento de fundamentación rigurosa, proporcionaba en muchos casos resultados correctos. La transformación de Laplace permite dar una interpretación matemáticamente válida de este método, y se ha mostrado además eficaz en el estudio de ciertas ecuaciones en derivadas parciales o ecuaciones integrales.

Además de su utilización en diversas ramas de las Matemáticas, como la teoría asintótica o la teoría analítica de números, sus aplicaciones son numerosas en otros muchos contextos de la Ciencia y la Técnica, como, por ejemplo, la teoría de circuitos, la de control lineal, o en el tratamiento de señales continuas.

2.1. Transformadas de Laplace

En el estudio de la transformación de Laplace consideraremos exclusivamente funciones $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ tales que para todo $b > 0$, f es integrable en $(0, b)$, es decir, la integral

$$\int_0^b |f(t)|\, dt$$

es convergente. Se dirá que una función sujeta a esta condición es *localmente integrable* en $[0,\infty)$, y el espacio vectorial complejo formado por tales funciones se denotará por $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Conviene observar que esta condición es algo más restrictiva que la de la integrabilidad local de f en $(0,\infty)$, pero es necesaria para garantizar el buen comportamiento en 0 de la integral que vamos a definir posteriormente. Ahora bien, en la práctica totalidad de las aplicaciones sucede que las funciones a tratar no son sólo localmente integrables en $[0,\infty)$, sino que gozan de cierta regularidad 'a trozos', noción que precisamos seguidamente.

Definición 2.1. Se dice que $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ es *continua a trozos* si existe una sucesión $\{t_n\}_{n=0}^\infty$, con $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$, de modo que f es continua en cada intervalo (t_k, t_{k+1}), $k = 0, 1, \dots$

En general, para un natural $n \geq 1$, diremos que una función f es de clase $\mathscr{C}^n$ a trozos en $[0,\infty)$ si existe una sucesión $\{t_n\}_{n=0}^\infty$, con $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$, de modo que f admite n derivadas continuas en cada intervalo (t_k, t_{k+1}), $k = 0, 1, \dots$

Observaciones 2.2.

i) En algunos textos la definición de continuidad a trozos pide también que f admita límites laterales finitos en cada t_k, con $k = 0, 1, 2, \dots$ (lo que garantiza la integrabilidad de f en cada (t_k, t_{k+1})). Preferimos no incluir esta exigencia en nuestra definición, de modo que, por ejemplo, la función $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $t > 0$ (el valor $f(0)$ se puede definir arbitrariamente) sea considerada continua a trozos en $[0,\infty)$; dicha función, aunque no es acotada, es integrable en cada intervalo $(0, b)$.

ii) Hacemos notar que, en lo concerniente al estudio de la transformada de Laplace, cuando se proporcione $f(x)$ mediante una fórmula explícita, se entenderá tácitamente que dicha expresión está sólo definida para $x \geq 0$ (salvo, posiblemente, en un conjunto de valores de x de medida nula), mientras que para $x < 0$ bien no estará definida, bien se admitirá que es idénticamente nula.

Definición 2.3. Se dice que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ admite *transformada de Laplace* si existe un número complejo z tal que la integral

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt \tag{2.1}$$

converge absolutamente. En ese caso, el conjunto

$$A = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^\infty f(t)\, e^{-\sigma t}\, dt \text{ converge absolutamente} \right\}$$

es no vacío, y se tienen dos posibilidades:

1. A no está acotado inferiormente. Se define $\sigma_a(f) = -\infty$.
2. A está acotado inferiormente. Se define $\sigma_a(f) = \operatorname{ínf} A \in \mathbb{R}$.

El valor $\sigma_a(f)$ se denomina *abscisa de convergencia absoluta* de la transformada de Laplace de f.

No es difícil proporcionar ejemplos de funciones que no admiten transformada de Laplace (como pide el ejercicio 2.1).

La siguiente proposición informa acerca del conjunto del plano complejo donde la integral de Laplace (2.1) de una función dada converge absolutamente.

Proposición 2.4. Si la función f admite transformada de Laplace y $\sigma_a(f)$ es su abscisa de convergencia absoluta, se tiene que:

i) La integral (2.1) converge absolutamente para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) > \sigma_a(f)$.

ii) La integral (2.1) no converge absolutamente para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) < \sigma_a(f)$.

iii) Nada puede asegurarse a priori acerca de la convergencia absoluta de (2.1) si $\mathrm{Re}(z) = \sigma_a(f)$.

Este resultado justifica la siguiente definición.

Definición 2.5. Sea f una función que admite transformada de Laplace, y $\sigma_a(f)$ su abscisa de convergencia absoluta. Se llama *dominio de convergencia absoluta* de la transformada de Laplace de f al conjunto

$$D_a(f) = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \sigma_a(f) \}$$

(si $\sigma_a(f) = -\infty$, se entiende que $D_a(f) = \mathbb{C}$).

Se define la función *transformada de Laplace* de f, denotada por $\mathfrak{L}f$, como

$$\mathfrak{L}f(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt, \qquad z \in D_a(f).$$

Observación 2.6. Aunque es posible hablar de la convergencia ordinaria (es decir, no necesariamente absoluta) de la transformada de Laplace, los resultados son mucho más complicados de obtener en ese caso. Por otra parte, en la mayoría de las situaciones prácticas el semiplano de convergencia coincide con el de convergencia absoluta, de modo que nos limitaremos a exponer la teoría en el caso más sencillo.

A continuación introducimos una clase de funciones con transformada de Laplace y que engloba a la inmensa mayoría de las funciones que aparecen en las aplicaciones.

Definición 2.7. Se dice que una función $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ es *de orden exponencial* si existen constantes $M > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ tales que

$$|f(t)| \le M e^{\alpha t} \qquad \text{para todo } t \ge b. \tag{2.2}$$

Proposición 2.8. Si $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ es de orden exponencial, entonces f admite transformada de Laplace. En concreto, si se verifica (2.2) se tiene que $\sigma_a(f) \le \alpha$.

La prueba de las siguientes afirmaciones se basa en las propiedades elementales de la integral y en el teorema del cambio de variable. Cabe insistir en que, en la mayoría de las aplicaciones, la existencia de la transformada de Laplace en el semiplano $\mathrm{Re}(z) > \alpha$ para una función viene garantizada por el orden exponencial de la misma, dado por cotas del tipo (2.2).

Propiedades 2.9. Sean f y g funciones que admiten transformada de Laplace. Se tiene que:

I) **Linealidad**: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (si alguno o los dos son nulos, las afirmaciones que siguen se modifican trivialmente). Entonces $\alpha f + \beta g$ admite transformada de Laplace, $\sigma_a(\alpha f + \beta g) \leq \sup\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\}$ (y se da la igualdad si $\sigma_a(f) \neq \sigma_a(g)$), y
$$\mathfrak{L}(\alpha f + \beta g)(z) = \alpha\, \mathfrak{L}f(z) + \beta\, \mathfrak{L}g(z) \qquad \text{si } \operatorname{Re}(z) > \sup\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\}.$$

II) **Escalado**: Si $b > 0$ y $h(t) = f(b\,t)$ para cada $t > 0$, entonces h admite transformada de Laplace, $\sigma_a(h) = b\,\sigma_a(f)$ y
$$\mathfrak{L}h(z) = \frac{1}{b}\, \mathfrak{L}f\Big(\frac{z}{b}\Big) \qquad \text{si } \operatorname{Re}(z) > b\,\sigma_a(f).$$

III) **Traslación**: Si $t_0 > 0$ y se define
$$h(t) = \begin{cases} f(t - t_0) & \text{si } t \geq t_0, \\ 0 & \text{si } 0 < t < t_0, \end{cases}$$
entonces h admite transformada de Laplace, $\sigma_a(h) = \sigma_a(f)$ y
$$\mathfrak{L}h(z) = e^{-z\,t_0}\mathfrak{L}f(z) \qquad \text{si } \operatorname{Re}(z) > \sigma_a(f).$$

IV) **Modulación**: Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y se define $h(t) = e^{z_0\,t} f(t)$ para cada $t > 0$, entonces h admite transformada de Laplace, $\sigma_a(h) = \sigma_a(f) + \operatorname{Re}(z_0)$ y
$$\mathfrak{L}h(z) = \mathfrak{L}f(z - z_0) \qquad \text{si } \operatorname{Re}(z) > \sigma_a(f) + \operatorname{Re}(z_0).$$

El siguiente resultado relaciona el comportamiento asintótico de una función y el de su transformada.

Proposición 2.10 (Valor final de la transformada de Laplace). Sea f una función que admite transformada de Laplace definida en $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(z) > \alpha\}$. Entonces:

I) Se verifica que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{R}}} \mathfrak{L}f(x) = 0$.

II) Si además existe y es finito $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t)$, que denotamos por $f(0^+)$, entonces se verifica que
$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{R}}} x\,\mathfrak{L}f(x) = f(0^+).$$

Es sencillo adaptar el teorema de derivación de integrales paramétricas estudiado en el primer capítulo al contexto de las funciones holomorfas en abiertos del plano complejo. Dicho resultado se aplica en el estudio de la holomorfía de la transformada de Laplace en su dominio de convergencia absoluta, como recoge el siguiente resultado.

Proposición 2.11 (Derivadas de la transformada de Laplace). Sea f una función que admite transformada de Laplace. Entonces, la función $\mathfrak{L}f$ es holomorfa en $D_a(f)$. Además, si para cada n natural se define $g_n(t) = (-t)^n f(t)$, $t > 0$, entonces $\sigma_a(g_n) = \sigma_a(f)$, y para cada $z \in D_a(f)$ se tiene que
$$\big(\mathfrak{L}f\big)^{(n)}(z) = \int_0^\infty (-t)^n\, f(t)\, e^{-zt}\, dt = \mathfrak{L}(g_n)(z).$$

Mientras el resultado anterior expresa la derivada de una transformada como una nueva transformada, el que se expone a continuación da una fórmula para la transformada de una derivada.

Proposición 2.12 (Transformada de Laplace de las derivadas). Supongamos que f es de clase $\mathscr{C}^n$ en $[0, \infty)$, y que para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ la función $f^{(j)}$ admite transformada de Laplace. Pongamos $\alpha = \max\big\{\sigma_a\big(f^{(j)}\big), 0 \leq j \leq n\big\}$. Entonces, para cada z tal que $\operatorname{Re}(z) > \alpha$ se tiene que
$$\mathfrak{L}\big(f^{(n)}\big)(z) = z^n\,\mathfrak{L}f(z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - \ldots - zf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{2.3}$$

Observación 2.13. Las hipótesis de este resultado se pueden relajar: en lugar de pedir que f sea de clase $\mathscr{C}^n$ en $[0, \infty)$, basta exigir que sea de clase $\mathscr{C}^n$ a trozos en $[0, \infty)$, que admita junto con sus derivadas hasta orden n transformada de Laplace, y que existan además los límites
$$\lim_{t\to 0^+} f^{(k)}(t) \in \mathbb{C}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$
que denotamos por $f^{(k)}(0^+)$. Entonces, la fórmula (2.3) se escribe
$$\mathfrak{L}\big(f^{(n)}\big)(z) = z^n\,\mathfrak{L}f(z) - z^{n-1}f(0^+) - z^{n-2}f'(0^+) - \ldots - zf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+).$$

Proseguimos con las reglas operacionales, añadiendo los resultados relativos a la integración y a la convolución de funciones. De acuerdo con el convenio introducido inicialmente de que las funciones consideradas, si están definidas en todo $\mathbb{R}$, se entenderán como idénticamente nulas en $(-\infty, 0)$, resulta que para dos de estas funciones f y g se tendrán las siguientes igualdades (ver definición 1.31):

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{0}^{t} f(x)\,dx, \qquad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\,g(x)\,dx = \int_{0}^{t} f(t-x)\,g(x)\,dx, \qquad t \geq 0.$$

Esto hace coherentes los siguientes resultados con los que se presentarán, en el mismo sentido, en la Sección 2.3.

Proposición 2.14 (Transformada de Laplace del integrador). Sea $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ y que admite transformada de Laplace. Entonces, la función $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,dx, \qquad t \geq 0,$$

admite transformada de Laplace, $\sigma_a(g) \leq \sup\{0, \sigma_a(f)\}$ y

$$\mathfrak{L}g(z) = \frac{1}{z}\,\mathfrak{L}f(z), \qquad \text{para cada } z \in D_a(g)\,.$$

Observación 2.15. Es fácil probar que si la función $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ admite transformada de Laplace, aunque f no sea de orden exponencial, el integrador $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ siempre es de orden exponencial.

Proposición 2.16 (Transformada de Laplace de la convolución). Sean f y g funciones que admiten transformada de Laplace. Se supone que al menos una de ellas es localmente acotada (i.e., acotada en cada intervalo compacto $[0,b]$). Entonces $f * g$ está definida para todo $t \geq 0$ y se verifica:

I) La función $f * g$ es continua en $[0,\infty)$.

II) La función $f * g$ admite transformada de Laplace y $\sigma_a(f * g) \leq \sup\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\}$.

III) Para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) > \sigma_a(f * g)$ se tiene que

$$\mathfrak{L}(f * g)(z) = \mathfrak{L}f(z) \cdot \mathfrak{L}g(z).$$

Terminamos esta sección indicando como se corresponden la transformada de Laplace y la de Fourier.

Proposición 2.17 (Relación entre las transformadas de Laplace y de Fourier). Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función tal que $f(t) = 0$ para cada $t < 0$, y de modo que $\tilde{f} = f|_{[0,\infty)}$ admite transformada de Laplace, con $\sigma_a(\tilde{f}) < 0$. Entonces, la función f admite transformada de Fourier, y para cada número real w se tiene que

$$\mathfrak{F}(f)(w) = \widehat{f}(w) = \mathfrak{L}\tilde{f}(i\,w).$$

2.2. Fórmulas de inversión de la transformada de Laplace

Dedicamos este apartado a suministrar resultados, denominados de inversión, que permitan llegar a la determinación de una función f a partir del conocimiento de su transformada de Laplace F. Conviene mencionar que, dada una función F, la solución a este problema, si existe, nunca será única. Los resultados 2.10 y 2.11 muestran que no toda función F puede ser una transformada de Laplace. Por otro lado, se puede alterar el valor de f en, por ejemplo, un conjunto finito de puntos sin que esto afecte al valor de su transformada; la unicidad debe entenderse en el sentido que muestra el siguiente lema.

Lema 2.18. Sean $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Si $\mathfrak{L}f(z) = \mathfrak{L}g(z)$ para cada $z \in D_a(f) \cap D_a(g)$, entonces f y g son iguales casi siempre.

Definición 2.19. Se dice que una función compleja F, holomorfa en un semiplano $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) > \alpha\}$, admite *transformada inversa de Laplace* si existe una función $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ que admite transformada Laplace, con $\sigma_a(f) \leq \alpha$ y $\mathfrak{L}f(z) = F(z)$ para todo z con $\mathrm{Re}(z) > \alpha$.

En esta situación, se escribe $f = \mathfrak{L}^{-1}F$.

El problema de no unicidad mencionado anteriormente se suprime pidiendo la continuidad en $[0, \infty)$ de la antitransformada, como muestra el siguiente teorema (basado en el hecho de que dos funciones iguales c.s. y continuas, necesariamente son iguales).

Teorema 2.20 (de Lerch). Sean f y g funciones continuas en $[0, \infty)$ que admiten transformada de Laplace. Si existe un número real $\alpha \geq \sup\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\}$ de modo que para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(z) > \alpha$ se tiene que $\mathfrak{L}f(z) = \mathfrak{L}g(z)$, entonces $f(t) = g(t)$ para todo $t \geq 0$.

A continuación presentamos varios resultados que permiten dar expresiones para las transformadas inversas de Laplace de funciones sujetas a determinadas condiciones.

Teorema 2.21 (Fórmula de inversión compleja). Sea F una función holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en un conjunto finito P constituido por singularidades, todas ellas polos de F. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que F es holomorfa en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) > \alpha\}$, y supongamos que existen $M > 0$, $R > 0$ y $p > 0$ tales que para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq R$ se tiene que

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}.$$

Entonces, la función $f \colon [0, \infty) \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(t) = \sum_{a \in P} \operatorname{Res}\big(e^{tz} F(z), a\big)$$

verifica las siguientes propiedades:

I) f es continua en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, con lo que admite transformada de Laplace. Además, $\sigma_a(f) \leq \alpha$.

II) Para cada número real $\sigma > \alpha$ y cada $t \geq 0$ se tiene que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{tz} F(z)\, dz. \tag{2.4}$$

III) Para cada número complejo z con $\operatorname{Re}(z) > \alpha$ se tiene que $F(z) = \mathfrak{L}f(z)$.

IV) Si F tiene un polo en la recta vertical de ecuación $\operatorname{Re}(z) = \alpha$, entonces $\sigma_a(f) = \alpha$.

Observaciones 2.22.

I) La integral que aparece en (2.4) se extiende a la recta vertical de ecuación $\operatorname{Re}(z) = \sigma$. Si se parametriza dicha recta en la forma $\gamma(\tau) = \sigma + i\tau$, con $\tau \in \mathbb{R}$, la expresión de la integral sería

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{tz} F(z)\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma + i\tau)} F(\sigma + i\tau)\, d\tau.$$

II) El teorema anterior se puede aplicar a cualquier cociente de polinomios $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ con tal de que el grado de Q sea mayor que el de P, siendo los polos de F los ceros de Q. En el caso de que éstos sean todos simples, el teorema anterior toma la siguiente forma.

Proposición 2.23 (Fórmula de Heaviside). Sean P y Q polinomios tales que el grado de Q es mayor que el de P, y de modo que Q tiene todos sus ceros simples. Entonces, la función f dada por

$$f(t) = \sum_{\{a \in \mathbb{C} : Q(a) = 0\}} e^{at} \frac{P(a)}{Q'(a)}, \qquad t \geq 0,$$

es la tranformada inversa de Laplace de $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ que es continua en $[0, \infty)$. Además,

$$\sigma_a(f) = \sup\big\{ \operatorname{Re}(a) : \ a \text{ es cero de } Q \big\}.$$

Observación 2.24. En la práctica, la fórmula (2.4) no es efectiva para el cálculo de la transformada inversa de Laplace. Sin embargo, como se adivina a la vista de la fórmula de Heaviside, el cálculo directo es posible para las fracciones racionales del tipo $F(z) = {P(z)}/{Q(z)}$, con grado de Q mayor que el de P, aún cuando los ceros de Q no sean simples. Recordemos que todo polinomio $Q(z)$ con coeficientes complejos se puede descomponer de forma única como un producto

$$Q(x) = C\,(z - r_1)^{m_1} (z - r_2)^{m_2} \dots (z - r_k)^{m_k}\,,$$

donde C es una constante (el coeficiente del monomio de mayor grado), $r_1, \dots, r_k$ son las raíces de Q, y $m_1, \dots, m_k$ son sus multiplicidades respectivas.

Es posible entonces descomponer la fracción en *fracciones simples* de la forma

$$\begin{aligned} F(z) \quad &= \quad \frac{b_{1,1}}{(z-r_1)} + \frac{b_{1,2}}{(z-r_1)^2} + \dots + \frac{b_{1,m_1}}{(z-r_1)^{m_1}} + \\ &\quad\ \vdots \\ &\quad + \frac{b_{k,1}}{(z-r_k)} + \frac{b_{k,2}}{(z-r_k)^2} + \dots + \frac{b_{k,m_k}}{(z-r_k)^{m_k}}\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde los $b_{i,j}$ son números complejos.

En virtud de la linealidad es suficiente determinar la transformada inversa de las fracciones simples, para lo que se tendrá en cuenta que para $m \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(z-a)^m}\Big) = \frac{1}{(m-1)!}\,t^{m-1}e^{at}$$

(véase el ejercicio 2.4).

Cuando los polinomios P y Q tengan coeficientes reales, lo que ocurre con frecuencia en las aplicaciones, se pueden simplificar algo estos cálculos procediendo a una descomposición de Q en factores del tipo $(z-a)^n$, con $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, o del tipo $(z^2+pz+q)^m$, con $p, q \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ y donde z^2+pz+q no tiene raíces reales. La descomposición de F es entonces suma de expresiones como

$$\frac{b_1}{(z-a)} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{b_\ell}{(z-a)^\ell},$$

junto con otras del tipo

$$\frac{c_1z+d_1}{z^2+pz+q} + \frac{c_2z+d_2}{(z^2+pz+q)^2} + \dots + \frac{c_mz+d_m}{(z^2+pz+q)^m},$$

donde las constantes b_j, c_j, d_j han de ser calculadas por el método de los coeficientes indeterminados. Una vez hecha la descomposición, queda pendiente el cálculo de la transformada inversa de las fracciones del segundo tipo. Para esto, se hace uso de las fórmulas

$$\mathfrak{L}^{-1}\Big(\frac{c}{(z+b)^2+c^2}\Big) = e^{-bt}\operatorname{sen}(ct), \qquad \mathfrak{L}^{-1}\Big(\frac{z+b}{(z+b)^2+c^2}\Big) = e^{-bt}\cos(ct), \quad b, c \in \mathbb{C} \tag{2.6}$$

(que también se obtendrán en el ejercicio 2.4) y las que se deducen de ellas aplicando la Proposición 2.11.

Ejemplos 2.25. Resolveremos por este procedimiento dos casos concretos.

I) Sea $F(z) = \dfrac{1}{z^3+4z^2+3z}$. Puesto que el denominador se anula para los valores $0, -1$ y -3, es sencillo obtener la descomposición

$$F(z) = \frac{1}{3z} + \frac{1}{6(z+3)} - \frac{1}{2(z+1)},$$

con lo que su transformada inversa es

$$f(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t}, \qquad t \geq 0.$$

II) Sea $F(z) = \dfrac{z}{\left(z^2+\alpha^2\right)^2}$, con $\alpha > 0$. Los ceros del denominador son ahora $\pm i\alpha$ con multiplicidad 2. Aunque se puede proceder como en el ejemplo previo, es más rápido observar que, de acuerdo con la primera fórmula en (2.6),

$$\mathfrak{L}^{-1}\Big(\frac{1}{z^2+\alpha^2}\Big) = \frac{1}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha t);$$

entonces, según la Proposición 2.11,

$$\frac{z}{(z^2+\alpha^2)^2} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z^2+\alpha^2}\Big)' = -\frac{1}{2}\mathfrak{L}\Big((-t)\frac{1}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha t)\Big)(z),$$

y la transformada inversa pedida es

$$f(t) = \frac{t}{2\alpha}\operatorname{sen}(\alpha t), \qquad t \geq 0.$$

2.3. Transformada bilateral de Laplace

La transformada de Laplace que acabamos de exponer es adecuada para el estudio de ciertos fenómenos de evolución, en los que se trata de conocer el devenir de un sistema partiendo del conocimiento de su estado en un momento inicial, y del conocimiento de una ecuación que describe su comportamiento futuro. De ahí la consideración de funciones definidas en $(0,\infty)$, es decir, desde un momento en adelante (en teoría de la señal se habla de 'señales causales'). Sin embargo, en ocasiones interesa considerar sistemas que no empiezan a evolucionar partiendo de un instante inicial, sino que poseen un pasado ilimitado que es relevante en el problema a describir. Por lo tanto, será útil diseñar una transformada bilateral de Laplace que actúe sobre funciones definidas en todo $\mathbb{R}$.

Consideraremos ahora exclusivamente funciones localmente integrables en $\mathbb{R}$. Al espacio vectorial de estas funciones lo denotaremos por $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Definición 2.26. Se dice que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ admite *transformada bilateral de Laplace* si existen dos números complejos z y w, con $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(w)$, tales que las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-wt}\, dt \tag{2.7}$$

convergen absolutamente. En ese caso, el conjunto

$$A = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\sigma t}\, dt \text{ converge absolutamente} \right\}$$

es no vacío, su extremo inferior, denotado por $\sigma_a^-(f) \in [-\infty,\infty)$, se denomina *abscisa de convergencia absoluta inferior* de la transformada bilateral de Laplace de f, y su extremo superior, denotado por $\sigma_a^+(f) \in (-\infty,\infty]$, se denomina *abscisa de convergencia absoluta superior* de la transformada bilateral de Laplace de f.

En cuanto al conjunto del plano complejo donde la integral bilateral de Laplace (2.7) de una función converge absolutamente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.27. Si la función f admite transformada bilateral de Laplace y $\sigma_a^-(f)$ y $\sigma_a^+(f)$ son sus abscisas de convergencia absoluta, se tiene que:

I) La integral (2.7) converge absolutamente para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\sigma_a^-(f) < \mathrm{Re}(z) < \sigma_a^+(f)$.

II) La integral (2.7) no converge absolutamente para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) < \sigma_a^-(f)$ o $\mathrm{Re}(z) > \sigma_a^+(f)$.

III) Nada puede asegurarse a priori acerca de la convergencia absoluta de (2.1) si $\mathrm{Re}(z) = \sigma_a^-(f)$ o $\mathrm{Re}(z) = \sigma_a^+(f)$.

Este resultado justifica la siguiente definición.

Definición 2.28. Sea f una función que admite transformada bilateral de Laplace, y sean $\sigma_a^-(f)$ y $\sigma_a^+(f)$ sus abscisas de convergencia absoluta. Se llama *dominio de convergencia absoluta* de la transformada bilateral de Laplace de f al conjunto

$$D_a^b(f) = \{\, z \in \mathbb{C} : \sigma_a^-(f) < \mathrm{Re}(z) < \sigma_a^+(f)\,\}.$$

Se define la función *transformada bilateral de Laplace* de f, denotada por $\mathfrak{L}_b f$, como

$$\mathfrak{L}_b f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt, \qquad z \in D_a^b(f).$$

Como se puede adivinar, el cálculo de una transformada bilateral se puede realizar mediante el cálculo de dos transformadas de Laplace. En concreto, si f es una función compleja definida en $\mathbb{R}$, consideremos la función $\tilde{f}$ dada por

$$\tilde{f}(t) = f(-t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Es sencillo probar el siguiente resultado.

Proposición 2.29. La función f admite $\mathfrak{L}_b$ si, y sólo si, las funciones f y $\tilde{f}$ (o, para ser más precisos, sus restricciones al eje real positivo) admiten $\mathfrak{L}$ y además $\sigma_a(f) < -\sigma_a(\tilde{f})$. Si este es el caso, se verifica que $\sigma_a^-(f) = \sigma_a(f)$, $\sigma_a^+(f) = -\sigma_a(\tilde{f})$, y para cada $z \in D_a^b(f)$ se tiene que

$$\mathfrak{L}_b f(z) = \mathfrak{L} f(z) + \mathfrak{L}\tilde{f}(-z).$$

De acuerdo con este resultado, la clase de funciones con orden exponencial tanto en $-\infty$ como en ∞ admitirán $\mathfrak{L}_b$.

Proposición 2.30. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que existen constantes $M > 0$, $K > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $b < 0$ tales que

$$|f(t)| \le M e^{\alpha\, t} \qquad \text{para todo } t \ge a, \qquad |f(t)| \le K e^{\beta\, t} \qquad \text{para todo } t \le b.$$

Si $\alpha < \beta$, entonces f admite transformada bilateral de Laplace, y se verifica que $\sigma_a^-(f) \le \alpha < \beta \le \sigma_a^+(f)$.

Para no abundar en detalles, mencionaremos en este momento que, teniendo en cuenta la proposición 2.29, las propiedades de linealidad, traslación, modulación, escalado, y de holomorfía de la $\mathfrak{L}$ (junto con la expresión de sus derivadas) permiten obtener propiedades similares, con las modificaciones oportunas, en el contexto de la $\mathfrak{L}_b$. Incluiremos a continuación los resultados relativos a la $\mathfrak{L}_b$ de las derivadas, del integrador y de la convolución, en los que sí se observan diferencias con el caso anterior.

Proposición 2.31 ($\mathfrak{L}_b$ de las derivadas). Sea n un natural, y sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función de clase $\mathscr{C}^n$ a trozos en $\mathbb{R}$. Supongamos que para todo $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ la función $f^{(j)}$ admite transformada bilateral de Laplace y existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$ y tales que $\sigma_a^-\big(f^{(j)}\big) \le \alpha < \beta \le \sigma_a^+\big(f^{(j)}\big)$. Entonces, para cada z tal que $\alpha < \mathrm{Re}(z) < \beta$ se tiene que

$$\mathfrak{L}_b\big(f^{(n)}\big)(z) = z^n\, \mathfrak{L}_b f(z).$$

Proposición 2.32 ($\mathfrak{L}_b$ del integrador). Sea $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ y que admite transformada bilateral de Laplace, y supongamos que $\alpha \ge 0$ pertenece a $D_a^b(f)$. Entonces, la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds, \qquad t \in \mathbb{R},$$

admite $\mathfrak{L}_b$, $\sigma_a^-(g) \le \alpha$ y

$$\mathfrak{L}_b g(z) = \frac{1}{z}\, \mathfrak{L}_b f(z), \qquad \text{para cada } z \text{ con } \mathrm{Re}(z) > \alpha.$$

Proposición 2.33 ($\mathfrak{L}_b$ de la convolución). Sean f y g funciones definidas en $\mathbb{R}$ tales que f es acotada, g es integrable en $\mathbb{R}$, y ambas admiten $\mathfrak{L}_b$ definidas en sus respectivos dominios de convergencia absoluta, con $D_a^b(f) \cap D_a^b(g) \neq \emptyset$. Entonces, se verifica:

I) La función $f * g$ admite transformada bilateral de Laplace y

$$\sigma_a^-(f * g) \le \sup\{\sigma_a^-(f), \sigma_a^-(g)\}, \qquad \sigma_a^+(f * g) \ge \inf\{\sigma_a^+(f), \sigma_a^+(g)\}.$$

II) Para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\sigma_a^-(f * g) < \mathrm{Re}(z) < \sigma_a^+(f * g)$ se tiene que

$$\mathfrak{L}_b(f * g)(z) = \mathfrak{L}_b f(z) \cdot \mathfrak{L}_b g(z).$$

2.4. Aplicaciones de la transformación de Laplace

2.4.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de E.D.O.

La transformada de Laplace se aplica con éxito a la solución de problemas de valores iniciales (también llamados problemas de Cauchy) para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y con coeficientes constantes. Su uso, puramente algorítmico, permite transformar dichos problemas en otros de naturaleza algebraica, fácilmente resolubles, y la transformada inversa de Laplace proporciona la solución del problema original.

Sea n un natural, y supongamos dadas constantes complejas $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ y $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$. Dada una función compleja g continua a trozos en $[0, \infty)$, nuestro objetivo es determinar la solución f del problema de Cauchy

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = g(t), \qquad t > 0, \tag{2.8}$$

$$f^{(k)}(0) = b_k,\ \ k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{2.9}$$

Se entenderá por solución de este problema una función f de clase $\mathscr{C}^n$ a trozos en $[0, \infty)$ tal que la igualdad (2.8) se verifique en todos los puntos donde ambos miembros son continuos, y se satisfagan además las condiciones iniciales (2.9) en el sentido de que

$$\lim_{t \to 0^+} f^{(k)}(t) = b_k, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Los teoremas clásicos de existencia de soluciones para este tipo de problemas aseguran que existe una única solución f. Más aún, si g es de orden exponencial, la fórmula de variación de las constantes permite probar que f también lo es, de modo que tiene sentido tomar transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación (2.8). Pongamos $\mathfrak{L}f = F$, $\mathfrak{L}g = G$. De acuerdo con la observación 2.13 y con las condiciones (2.9), se verificará que

$$\begin{aligned} &z^n F(z) - b_0 z^{n-1} - b_1 z^{n-2} - \ldots - b_{n-2} z - b_{n-1} \\ &+ a_{n-1}\big(z^{n-1} F(z) - b_0 z^{n-2} - b_1 z^{n-3} - \ldots - b_{n-2}\big) + \\ &\qquad\vdots \\ &+ a_1\big(z F(z) - b_0\big) + a_0 F(z) \ = \ G(z), \end{aligned}$$

ecuación algebraica en la que es sencillo despejar el valor de F. Como ya se ha indicado, resta calcular f como la transformada inversa de Laplace de F, para lo que se dispone de los resultados de la sección 2.2.

Un procedimiento similar se puede aplicar a los problemas de valores iniciales para los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, no homogéneas y con coeficientes constantes. Su expresión general es de la forma

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t), \qquad t > 0, \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{x}(0^+) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.11}$$

donde $\boldsymbol{x}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)^{\mathrm{tr}}$ es la función vectorial incógnita, A es una matriz constante de dimensión $n \times n$, $\boldsymbol{b}(t) = \big(b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)\big)^{\mathrm{tr}}$ es el término no homogéneo y $\boldsymbol{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)^{\mathrm{tr}}$ es el vector de valores iniciales (la notación $(v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{tr}}$ indica que los vectores se consideran columna; la transposición es necesaria para que el producto matricial que aparece en (2.10) tenga sentido). Bajo las condiciones habituales, la aplicación de la transformada de Laplace a la ecuación (2.10) es válida, y si ponemos $\mathfrak{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\psi}$ y $\mathfrak{L}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\varphi}$ (componente a componente) y se utiliza (2.11), se deduce que

$$z\boldsymbol{\psi}(z) - \boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{\psi}(z) + \boldsymbol{\varphi}(z), \qquad \text{es decir,} \qquad (zI - A)\boldsymbol{\psi}(z) = \boldsymbol{\varphi}(z) + \boldsymbol{x}_0,$$

donde I es la matriz identidad de orden n. Puesto que la matriz $zI - A$ es invertible para $z \in \mathbb{C}$ con parte real suficientemente grande, en el semiplano $\mathrm{Re}(z) > \alpha$ adecuado se puede despejar

$$\boldsymbol{\psi}(z) = (zI - A)^{-1}\big(\boldsymbol{\varphi}(z) + \boldsymbol{x}_0\big),$$

y de nuevo resta realizar el cálculo de la transformada inversa de Laplace de esta expresión para obtener la solución del problema de valores iniciales propuesto.

Ejemplos 2.34.

I) Resolvamos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) = 2t, & t \geq 0, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Si ponemos $Y(z) = \mathfrak{L}y(z)$ y aplicamos la transformada de Laplace en la ecuación, la Proposición 2.12 conduce a

$$z^2 Y(z) - y(0)z - y'(0) - Y(z) = \frac{2}{z^2}, \qquad \text{es decir, } (z^2 - 1)Y(z) = \frac{2}{z^2} - 2,$$

de donde

$$Y(z) = -\frac{2}{z^2}, \qquad \text{con lo que } y(t) = -2t, \quad t \geq 0.$$

II) Consideremos el sistema lineal dado, para $t \geq 0$, por

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) = 2\cos(2t), \\ y'(t) + x(t) = \mathrm{sen}(2t), \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = -1$, $y(0) = 0$. Con la notación utilizada en la descripción general de estos sistemas, en este caso sería

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ponemos $\mathfrak{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\psi}$, $\mathfrak{L}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\varphi}$ (componente a componente) y aplicamos la transformada de Laplace, se deduce, como vimos anteriormente, que

$$\boldsymbol{\psi}(z) = (zI - A)^{-1}\big(\boldsymbol{\varphi}(z) + \boldsymbol{x}_0\big) = \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{2z}{z^2+4} - 1 \\ \dfrac{2}{z^2+4} \end{pmatrix},$$

donde se ha utilizado (ver (2.6)) que

$$\mathfrak{L}\big(\cos(ct)\big)(z) = \frac{z}{z^2+c^2}, \qquad \mathfrak{L}\big(\operatorname{sen}(ct)\big)(z) = \frac{c}{z^2+c^2}, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

Finalmente, se obtiene que

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{z^2+4} - \dfrac{z}{z^2-1} \\ \dfrac{1}{z^2-1} \end{pmatrix},$$

de donde, aplicando la antitransformada de Laplace (ver el ejercicio 2.4), se deduce que

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\Big(\frac{2}{z^2+4} - \frac{z}{z^2-1}\Big) = \operatorname{sen}(2t) - \operatorname{Ch}(t), \qquad y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\Big(\frac{1}{z^2-1}\Big) = \operatorname{Sh}(t).$$

2.4.2. Teoría de sistemas lineales

De modo general, en Teoría de la Señal se denomina *sistema* a toda transformación que recibe una señal (llamada de *entrada* o *input*) y devuelve otra (de *salida* o *output*). Si las señales de entrada y salida son *continuas* (más precisamente, en tiempo continuo; no confundir con el concepto matemático de continuidad), es decir, están definidas para todo valor real, el sistema se llama *en tiempo continuo* o, simplemente, *continuo*.

De entre las señales continuas destacamos las *causales*, que son aquellas nulas para valores negativos de la variable t.

Un sistema L se denomina *lineal* si para cada par de señales f, g y escalares α, β se tiene que

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)\,.$$

Un sistema L se denomina *invariante en el tiempo* si verifica que $L(f(t-t_0)) = L(f)(t-t_0)$ para cada señal continua f y cada $t_0 \in \mathbb{R}$, es decir, si verifica que a un desfase en la señal de entrada responde con el mismo desfase en la de salida.

Un sistema L se denomina *estable* si la respuesta a cada señal acotada es también acotada.

Un sistema L se denomina *causal* si para cada par de señales f y g tales que $f(t) = g(t)$ para $t < t_0$, se tiene que $L(f)(t) = L(g)(t)$ para $t < t_0$.

El siguiente teorema caracteriza en términos más sencillos los sistemas lineales e invariantes en el tiempo que son causales.

Teorema 2.35. Un sistema lineal e invariante en el tiempo es causal si, y sólo si, la respuesta a cada señal causal es también causal.

Es usual referirse a los sistemas continuos lineales e invariantes en el tiempo como sistemas LTC (del inglés "*linear time-invariant continuous*").

En numerosas situaciones, los sistemas vienen descritos mediante ecuaciones diferenciales, y nos restringimos aquí al caso en que dichas ecuaciones son lineales y con coeficientes constantes.

Definición 2.36. Se dice que un sistema L está definido por una ecuación diferencial si existen naturales m, n, con $n \geq m$, y constantes complejas $a_0, a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_m$ tales que para cada señal de entrada u, siendo $y(t) = L(u)(t)$, se verifica que para cada $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} &a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ &\qquad = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 u'(t) + b_0 u(t). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Observación 2.37. En general, para una señal de entrada fija u la ecuación (2.12) puede admitir múltiples soluciones. Pero si se fijan n valores (*iniciales*) de la señal de salida, entonces la solución es única. Aún así, el sistema puede no ser lineal a menos que se elijan adecuadamente las condiciones iniciales. En concreto, una condición suficiente para que el sistema definido por (2.12) sea lineal es la de *reposo inicial*, consistente en imponer que

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Supongamos que el sistema anterior es un sistema LTC y causal bajo la condición de reposo inicial, y que tiene sentido aplicar la transformada de Laplace a los dos miembros de la ecuación. De acuerdo con las propiedades de $\mathfrak{L}$ se deduce que las funciones Y, U, transformadas respectivas de y y u, satisfacen

$$\big(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\big) Y(z) = \big(b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0\big) U(z),$$

y resulta que

$$Y(z) = T(z)\, U(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}\, U(z). \tag{2.13}$$

La función T recibe el nombre de ***función de transferencia*** del sistema, y su transformada inversa de Laplace, que llamamos h, es la ***respuesta al impulso*** (término cuyo significado quedará claro cuando dispongamos de la teoría de distribuciones, ver 5.3.2). De acuerdo con la proposición 2.16, la función y se puede obtener entonces como $y = h * u$, de modo que el conocimiento de la respuesta al impulso (o, lo que es lo mismo, de la función de transferencia y su transformada inversa) permite resolver el sistema. Otras propiedades del sistema pueden ser estudiadas de forma sencilla si se conoce la función de transferencia, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.38. Sea L un sistema LTC causal definido por la ecuación (2.12) y en reposo inicial. Entonces, L es estable si, y sólo si, todos los polos de su función de transferencia T tienen parte real estrictamente negativa.

Ejemplo 2.39. Supongamos que un sistema en reposo inicial está descrito por la ecuación diferencial

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = u(t), \qquad t \geq 0.$$

Si se aplica la transformada de Laplace, como se ha descrito anteriormente, se obtiene que

$$(z^2 - 3z + 2)Y(z) = U(z), \qquad \text{es decir, } Y(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}\, U(z) = T(z)U(z),$$

donde T es la función de transferencia del sistema. Si, por ejemplo, tomamos $u(t) = t$ para cada ≥ 0, entonces es inmediato que $U(z) = {}^1\!/_{z^2}$, de modo que

$$Y(z) = \frac{1}{z^2(z^2 - 3z + 2)} = \frac{1}{4(z-2)} - \frac{1}{z-1} + \frac{3}{4z} + \frac{1}{2z^2},$$

donde se ha descompuesto en fracciones simples de la forma usual. Entonces, se obtiene que

$$y(t) = (\mathfrak{L}^{-1} Y)(t) = \frac{1}{4}\big(e^{2t} - 4e^t + 3 + 2t\big),$$

que es solución de la ecuación y cumple las condiciones iniciales. En cuanto a la respuesta al impulso, será

$$h(t) = (\mathfrak{L}^{-1} T)(t) = \mathfrak{L}^{-1}\Big(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\Big)(t) = e^{2t} - e^t, \qquad t \geq 0.$$

No es difícil comprobar que se tiene que

$$y(t) = \frac{1}{4}\big(e^{2t} - 4e^t + 3 + 2t\big) = \int_0^t \big(e^{2\tau} - e^{\tau}\big)(t - \tau)\, d\tau = (h * u)(t), \qquad t \geq 0.$$

Ejercicios

2.1 Dar un ejemplo de una función en $\mathscr{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ que no admita transformada de Laplace.

2.2

I) Dar ejemplos de funciones que admitan transformada de Laplace y para las que la abscisa de convergencia absoluta sea finita o $-\infty$.

II) Determinar el dominio de convergencia absoluta de la transformada de Laplace de una función $f \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ tal que existe $M > 0$ con $f(t) = 0$ para cada $t > M$.

2.3 Dar un ejemplo de función $f \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, sujeta a la acotación (2.2) para un $\alpha \in \mathbb{R}$ $(|f(t)| \leq M\, e^{\alpha\, t}$, $t > b)$ pero no para $\beta < \alpha$, y para la que $\sigma_a(f) < \alpha$.

2.4 Sea $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la función de Heaviside o *función escalón*, dada por

$$H(t) = \chi_{[0,\infty)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0; \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Para las siguientes funciones (definidas tácitamente sólo cuando $t \geq 0$), se pide determinar si admiten transformada de Laplace y, si procede, calcularla especificando su dominio de convergencia absoluta. En todos los casos a denota una constante positiva y α, β, c números complejos.

I) $f(t) = H(t)$ II) $f(t) = H(t-a)$ III) $f(t) = c\big(H(t) - H(t-a)\big)$
IV) $f(t) = e^{c\,t}$ V) $f(t) = \operatorname{Ch}(c\,t)$ VI) $f(t) = \operatorname{Sh}(c\,t)$
VII) $f(t) = \operatorname{sen}(c\,t)$ VIII) $f(t) = \cos(c\,t)$ IX) $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$
X) $f(t) = t^n\, e^{c\,t}$, $n \in \mathbb{N}$ XI) $f(t) = e^{-t} H(3-t)$ XII) $f(t) = H(t-a)\, e^{c\,t}$
XIII) $f(t) = e^{-\beta\,t} \cos(\alpha\, t)$ XIV) $f(t) = e^{-\beta\,t} \operatorname{sen}(a\, t)$ XV) $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen}^2(t)$
XVI) $f(t) = \displaystyle\int_0^t x \cos(2\,x)\, dx$ XVII) $f(t) = e^{t+3} H(t-2) \operatorname{sen}(t-2)$.

2.5 Dibujar la gráfica de la función

$$f(t) = \cos(t) - H(t - 2\pi)\cos(t - 2\pi), \qquad t \geq 0,$$

y calcular su transformada de Laplace.

2.6 Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ una función de $\mathscr{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ y periódica de periodo $p > 0$, es decir, tal que

$$f(t+p) = f(t), \qquad t \geq 0.$$

Probar que f admite transformada de Laplace, con $\sigma_a(f) \leq 0$. Demostrar que, si φ es la función

$$\varphi(t) = f(t)\chi_{[0,p]}(t) = f(t) - H(t-p)f(t-p), \qquad t \geq 0,$$

entonces $\mathfrak{L}f$ se expresa en función de $\mathfrak{L}\varphi$ mediante la fórmula

$$\mathfrak{L}f(z) = \frac{\mathfrak{L}\varphi(z)}{1 - e^{-pz}}.$$

2.7 Sea $a > 0$. Consideremos la función $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ de periodo $2a$ y tal que

$$f(t) = 1 \quad \text{si } 0 \leq t < a; \quad f(t) = -1 \quad \text{si } a \leq t < 2a.$$

I) Expresar la función $\varphi(t) = f(t) - H(t-2a)f(t-2a)$, $t \geq 0$, como una combinación lineal de trasladadas de la función de Heaviside.

II) Calcular las transformadas de Laplace de f y de φ.

2.8 La *función de error* se define por

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2}\, dx, \qquad t \geq 0,$$

y la *función complementaria de error* es $\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t)$, $t \geq 0$. Determinar las $\mathfrak{L}$ de las funciones

$$f(t) = \operatorname{erfc}\big(\sqrt{t}\big) \qquad \text{y} \qquad g(t) = e^t f(t) = e^t \operatorname{erfc}\big(\sqrt{t}\big).$$

Sugerencia: Aplíquese el teorema de Fubini para intercambiar el orden en las integrales que aparecen.

2.9 Sea $g \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ que admite transformada de Laplace y tal que la función $h(t) = {}^{g(t)}/_{t}$ también pertenece a $\mathscr{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

I) Probar que h admite transformada de Laplace con igual abscisa de convergencia que la de g.

II) Pongamos $\mathfrak{L}g(z) = G(z)$. Demostrar que $\mathfrak{L}h(z) = H(z)$ siendo H la única primitiva de $-G$,

$$H(z) = -\int G(z)\,dz + C_0, \qquad C_0 \in \mathbb{C}\,,$$

para la que $\lim\limits_{x\to\infty} H(x) = 0$.

III) Sean a y b números reales. Se considera la función

$$f(t) = \int_0^t \frac{e^{ax} - \cos(bx)}{x}\,dx, \qquad t \geq 0.$$

Si z es un número complejo con $\operatorname{Re}(z) > \max\{a, 0\}$, deducir de lo anterior $\mathfrak{L}f(z)$.

2.10 Sea n un número natural y sea f una función de clase $\mathscr{C}^2$ en $[0,\infty)$ tal que f, f' y f'' son de orden exponencial, y con $f(0) = 1$, $f'(0) = -n$. Hallar la transformada de Laplace de f supuesto que

$$t\,f''(t) + (1-t)\,f'(t) + n\,f(t) = 0, \qquad t \geq 0\,.$$

2.11 Sea f una función de clase $\mathscr{C}^1$ en $[0,\infty)$, tal que f y f' son de orden exponencial, y con $f(0) = 0$. Sabiendo que

$$5\int_0^t e^x \cos\bigl(2(t-x)\bigr)\,f(x)\,dx = e^t\bigl(f'(t) + f(t)\bigr) - 1, \qquad t \geq 0,$$

determinar la transformada de Laplace de f.

2.12 Calcular la transformada inversa de Laplace (continua a trozos en $[0,\infty)$) de las siguientes funciones:

I) $\dfrac{z}{z^2+4}$ II) $\dfrac{4}{z^2(z+2)^2}$ III) $\dfrac{2\,z^2+3z-4}{(z-2)(z^2+2\,z+2)}$ IV) $\dfrac{2}{z(z^2+4)}$ V) $\dfrac{2}{(z-1)^3}$

VI) $\dfrac{z^2}{(z^2-1)^2}$ VII) $\dfrac{z^3+2\,z^2+1}{z^2(z^2+1)}$ VIII) $\dfrac{z}{z^4+4\,a^4}$, $a > 0$ IX) $\dfrac{z\,e^{-z}}{4\,z^2+9}$

2.13 Resolver las ecuaciones integrales siguientes para una función $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$:

I) $f(t) = \operatorname{sen}(t) + 2\displaystyle\int_0^t \cos(t-x)\,f(x)\,dx$

II) $\displaystyle\int_0^t e^x \cos(t-x)\,f(x)\,dx = t$

III) $f''(t) + \displaystyle\int_0^t e^{2(t-x)} f'(x)\,dx = e^{2t}$, siendo $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

IV) $\displaystyle\int_0^t f(t-x)\,f(x)\,dx = 8\bigl(\operatorname{sen}(t) - t\cos(t)\bigr)$

2.14 Resolver los siguientes problemas de Cauchy:

I) $\begin{cases} x''(t) + x(t) = t \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1. \end{cases}$

II) $\begin{cases} x''(t) - 4\,x'(t) - 5\,x(t) = 3\,e^t \\ x(0) = 3,\ x'(0) = 1. \end{cases}$

III) $\begin{cases} x''(t) + x(t) = H(t) - 2\,H(t-1) + H(t-2) \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$

IV) $\begin{cases} x''(t) + x'(t) = 3\cos(t) \\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1. \end{cases}$

v) $\begin{cases} x^{(4)}(t) + 3\,x''(t) + 2\,x(t) = e^{-t}H(t-2) \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x'''(0) = -1. \end{cases}$

2.15 Resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden siguientes:

i) $\begin{cases} 7\,x'(t) + y'(t) + 2\,x(t) = 0 \\ x'(t) + 3\,y'(t) + y(t) = 0 \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 5\,x'(t) + 2\,y'(t) - 2\,x(t) + y(t) = 2e^{-t} \\ -2\,x'(t) - y'(t) + x(t) = \operatorname{sen}(t) \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x'(t) + y'(t) = 2\,z(t) \\ y'(t) + z'(t) = 2\,x(t) \\ x'(t) + z'(t) = 2\,y(t) \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1,\ z(0) = 0 \end{cases}$

2.16 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Dar ejemplos de funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bajo cada una de las siguientes condiciones:

i) f no admite $\mathfrak{L}_b$.

ii) f admite $\mathfrak{L}_b$ con $D_a^b(f) = \mathbb{C}$.

iii) f admite $\mathfrak{L}_b$ con $D_a^b(f) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \alpha\}$.

iv) f admite $\mathfrak{L}_b$ con $D_a^b(f) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < \alpha\}$.

v) f admite $\mathfrak{L}_b$ con $D_a^b(f) = \{z \in \mathbb{C} : -\beta < \operatorname{Re}(z) < \beta\}$.

2.17 Sean f y g las funciones definidas en $\mathbb{R}$ por

$$f(t) = e^{-b|t|}, \quad b > 0; \qquad g(t) = H(t)\operatorname{sen}(t).$$

Calcular $\sigma_a^-(f*g)$, $\sigma_a^+(f*g)$ y $\mathfrak{L}_b(f*g)$.

2.18 Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le -2, \\ -1 & \text{si } -2 < t \le 0, \\ e^t & \text{si } 0 < t \le 2, \\ 0 & \text{si } t > 2. \end{cases}$$

Determinar la $\mathfrak{L}_b$ del integrador

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx,$$

indicando su dominio de convergencia absoluta.

Capítulo 3

Transformación Z

Es indudable que las transformaciones funcionales juegan un papel esencial en el estudio de los modelos matemáticos que rigen los modelos de las Ciencias. La que presentamos en este tema tiene la virtud de permitir el análisis de procesos discretos mediante el estudio de funciones analíticas. Entran en juego ahora las nociones de *polo*, *serie de Laurent*, etc., que se introducen en un curso básico de Variable Compleja.

Entre las aplicaciones de la transformada Z se encuentra el estudio de sistemas (de señales) discretos, y aunque el propósito de estas notas es la presentación rigurosa del aparato matemático, sin entrar en detalles que serían propios de un curso específico de Teoría de la Señal, usaremos también la terminología y notación propias de ese campo del conocimiento.

3.1. Definiciones y propiedades generales

A partir de ahora consideraremos series de Laurent centradas en $z_0 = 0$, que se identifican con una familia numerable indexada en $\mathbb{Z}$, esto es, $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ que denominaremos *sucesión* (*doblemente infinita*). En ciertos ámbitos, especialmente en Teoría de la Señal, es habitual denotar a_n por $a[n]$ para $n \in \mathbb{Z}$, usando los corchetes para enfatizar que se trata de una *señal discreta* en distinción de las señales continuas, en las que se usan los paréntesis: p.e. $f(t)$.

Por supuesto, también se contemplan las series de Laurent que representan funciones analíticas en $z_0 = 0$, es decir, con parte residual nula. Análogamente, juegan un papel destacado las denominadas *sucesiones causales*, que son aquellas del tipo $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ con $a_n = 0$ si $n < 0$.

Recordemos que para una serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ el conjunto de puntos donde converge absolutamente, supuesto no vacío, es una corona circular determinada por dos radios $0 \leq \rho_1 < \rho_2$, concretamente:

* La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge si $|z| < \rho_2$ y no converge si $|z| > \rho_2$.

* La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$ converge si $|z| > \rho_1$ y no converge si $|z| < \rho_1$.

Diremos que una serie de Laurent es *convergente* si su corona de convergencia absoluta es no vacía.

Definición 3.1. Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite *transformada* Z si la serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$ es convergente. En este caso, la función

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n \tag{3.1}$$

(identificada con la sucesión $\{a_{-n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$) se denomina *transformada* Z de $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ se denomina *parte causal* de la transformada, mientras que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ es la *parte anticausal*.

Se denomina *corona de convergencia de la transformada* Z de $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ a la corona de convergencia $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$ de la serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$.

En adelante usaremos la abreviatura TZ para referirnos a la transformada Z de una sucesión.

Teorema 3.2 (Inversión de la TZ). Sea f una función holomorfa en un abierto que contiene a la corona $C = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$. Existe una única sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tal que en la corona C la función f coincide con la TZ de dicha sucesión. Además se verifica:

I) La corona de convergencia de la TZ de $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ contiene a la corona C.

II) Para cada número real r, con $\rho_1 < r < \rho_2$, y para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$a_n = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{|z|\,=\,r} f(z)\, z^{n-1} dz\,,$$

considerando la circunferencia orientada en sentido positivo (antihorario).

La sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ así determinada se denomina *transformada inversa* Z de la función f.

Propiedades 3.3 (de la TZ). Sean $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dos sucesiones que admiten TZ, siendo

$$C_a = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\} \qquad \text{y} \qquad C_b = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$$

sus respectivas coronas de convergencia y F, G las correspondientes TZ.

I) **Linealidad:** Si $R_1 = \text{máx}\{\rho_1, r_1\} < R_2 = \text{mín}\{\rho_2, r_2\}$, entonces para cada par de números complejos α, β, la sucesión $\{\alpha\, a_n + \beta\, b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ en una corona que contiene a

$$C_a \cap C_b = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}\,.$$

Además, en esta corona la TZ de $\{\alpha\, a_n + \beta\, b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es la función

$$\alpha\, F + \beta\, G\,.$$

II) **Conjugación:** La sucesión $\{\overline{a_n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ con corona de convergencia

$$C_a = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$$

y su transformada es la función

$$\overline{F(\overline{z})}\,.$$

III) **Traslación (desfase):** Sea p un número entero. La sucesión $\{a_{n+p}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ con corona de convergencia

$$C_a = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$$

y su transformada es la función

$$z^p F(z)\,.$$

IV) **Modulación:** Sea w un número complejo no nulo. La sucesión $\{w^n a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ con corona de convergencia

$$\{z \in \mathbb{C} : |w|\rho_1 < |z| < |w|\rho_2\}$$

y su TZ es la función

$$F\Big(\frac{z}{w}\Big)\,.$$

V) **Derivación:** La sucesión $\{n\, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ con corona de convergencia

$$C_a = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$$

y su TZ es la función

$$-z\, F'(z)\,.$$

VI) **Simetría (inversión en tiempo o "time reversal"):** La sucesión $\{a_{-n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ con corona de convergencia

$$\Big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\rho_2} < |z| < \frac{1}{\rho_1}\Big\}$$

y su TZ es la función

$$F\Big(\frac{1}{z}\Big)\,.$$

VII) **Convolución discreta:** Si $R_1 = \text{máx}\{\rho_1, r_1\} < R_2 = \text{mín}\{\rho_2, r_2\}$, para cada número entero n se tiene que la serie numérica

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, b_{n-k}$$

converge absolutamente; sea c_n su suma. La sucesión $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ se denomina *convolución* de las sucesiones $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Esta sucesión admite TZ en una corona que contiene a

$$C_a \cap C_b = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$$

y la TZ de $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es la función

$$F(z)\, G(z)\,.$$

Notas: El producto de convolución se denota por el símbolo '$*$', esto es, $c[n] = (a * b)[n]$.

VIII) **Producto de sucesiones:** Si $\rho_1 r_1 < \rho_2 r_2$ la sucesión $\{a_n b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ en una corona que contiene a

$$\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 r_1 < |z| < \rho_2 r_2\}\,.$$

Además, si la función H es la TZ de $\{a_n b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, se tiene que

$$H(z) \;=\; \frac{1}{2\,\pi\, i}\int_{|w|\,=\,r} F\Big(\frac{z}{w}\Big)\,\frac{G(w)}{w}\,dw\,, \qquad \text{donde } \; r_1 < r < r_2 \;\text{ y }\; r\,\rho_1 < |z| < r\,\rho_2,$$

orientando las circunferencias en sentido positivo; o también

$$H(z) \;=\; \frac{1}{2\,\pi\, i}\int_{|w|\,=\,\rho} \frac{F(w)}{w}\,G\Big(\frac{z}{w}\Big)\,dw\,, \qquad \text{donde } \; \rho_1 < \rho < \rho_2 \;\text{ y }\; \rho\, r_1 < |z| < \rho\, r_2.$$

Ejemplos 3.4. En los siguientes ejemplos utilizaremos la notación simplificada $a[n]$ para referirnos a la sucesión (o señal, como se prefiera) $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Este abuso, suprimiendo el dominio de las funciones, es habitual y en el contexto adecuado no causa mayores inconvenientes.

I) Si denotamos por $\boldsymbol{\delta}$ al *impulso unidad*, es decir, la sucesión cuyos elementos son

$$\delta_n = \boldsymbol{\delta}[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0; \end{cases}$$

su TZ es la función C_1 constantemente igual a 1: $C_1(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$. Entonces, para $p \in \mathbb{Z}$ la función $G(z) = z^p = z^p\, C_1(z)$ es la transformada del desfase $\boldsymbol{\delta}[n+p]$ (ver propiedad 3.3.III), de donde se sigue inmediatamente que para $\alpha \in \mathbb{C}$

- $TZ\big(\alpha\, \boldsymbol{\delta}[n+p]\big) = \alpha\, z^p$

con corona de convergencia igual a todo $\mathbb{C}$ si $p \geq 0$ o $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si $p < 0$.

II) Consideremos la señal *escalón* $\boldsymbol{\epsilon}$, cuyos valores son

$$\epsilon_n = \boldsymbol{\epsilon}[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ 1 & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

Su TZ, que tiene parte anti-causal nula, es la suma geométrica

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - {}^1\!/_z} = \frac{z}{z-1}\,, \qquad |z| > 1$$

(recuérdese que una serie geométrica converge si, y sólo si, su razón tiene módulo menor que 1). En consecuencia, si $w \neq 0$, la sucesión $\{w^n \boldsymbol{\epsilon}[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ (ver propiedad 3.3.IV) y

- $TZ\big(w^n \boldsymbol{\epsilon}[n]\big) = G(z) = F\Big(\dfrac{z}{w}\Big) = \dfrac{z}{z-w}$

con corona de convergencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| > |w|\}$.

III) Si se revierten en tiempo las señales del apartado anterior, esto es, considerando

$$\boldsymbol{\gamma}[n] = w^{-n}\boldsymbol{\epsilon}[-n] = \begin{cases} w^{-n} & \text{si } n \leq 0, \\ 0 & \text{si } n > 0; \end{cases}$$

en virtud de la propiedad 3.3.VI, estas admiten TZ y

- $TZ(w^{-n}\boldsymbol{\epsilon}[-n]) = G\Big(\dfrac{1}{z}\Big) = \dfrac{{}^1\!/_z}{{}^1\!/_z - w} = \dfrac{1}{1 - w\,z} = \dfrac{-w}{z - {}^1\!/_w}$

con corona de convergencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| < {}^1\!/_{|w|}\}$.

IV) Aplicando la propiedad 3.3.V la señal cuyos valores son

$$f[n] = n\,\epsilon[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \le 0, \\ n & \text{si } n > 0; \end{cases}$$

admite TZ con la misma corona de convergencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, y su valor es:

- $$TZ\big(n\,\epsilon[n]\big) = -z\Big(\frac{z}{z-1}\Big)' = \frac{z}{(z-1)^2} = z\,(z-1)^{-2}\,.$$

Según 3.3.III, resulta que $TZ\big((n-1)\,\epsilon[n-1]\big) = z^{-1}TZ(n\,\epsilon[n]) = (z-1)^{-2}$ para $|z| > 1$; y derivando de nuevo

- $$TZ\big(n(n-1)\,\epsilon[n-1]\big) = -z\,\big((z-1)^{-2}\big)' = 2\,z\,(z-1)^{-3}\,, \qquad |z| > 1\,.$$

Volviendo a razonar igual $TZ\big((n-1)(n-2)\,\epsilon[n-2]\big) = z^{-1}TZ\big(n(n-1)\,\epsilon[n-1]\big) = 2\,(z-1)^{-3}$, y derivando

- $$TZ\big(n(n-1)(n-2)\epsilon[n-2]\big) = -z\Big(2\,(z-1)^{-3}\Big)' = 6\,z\,(z-1)^{-4}\,, \qquad |z| > 1\,.$$

Recurrentemente, se deduce que

- $$TZ\big(n(n-1)\cdots(n-k+1)\,\epsilon[n-k+1]\big) = k!\,\frac{z}{(z-1)^{k+1}}\,, \qquad |z| > 1\,.$$

Finalmente, nótese que $n(n-1)\cdots(n-k+1)\,\epsilon[n-k+1] = n(n-1)\cdots(n-k+1)\,\epsilon[n]$ pues para $n < k$ el coeficiente $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ se anula y para $n \ge k$, es decir, $n-k \ge 0$, se tiene que $\epsilon[n] = 1 = \epsilon[n-k+1]$. Atendiendo a los coeficientes binomiales, y con el convenio de que $\binom{n}{k} = 0$ si $n < k$, la fórmula anterior se reescribe

- $$TZ\left(\binom{n}{k}\epsilon[n]\right) = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}\,, \qquad |z| > 1\,.$$

Combinando lo anterior con la propiedad 3.3.IV, para $w \ne 0$ se sigue que

- $$TZ\left(\binom{n}{k}w^n\epsilon[n]\right) = \frac{w^k z}{(z-w)^{k+1}}\,, \qquad |z| > |w|\,.$$

3.1.1. La TZ unilateral

Algunos autores se refieren a la transformada Z aplicada sólo a sucesiones del tipo $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ (limitadas por la izquierda), esto es

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longmapsto F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

Es a esta transfromación a la que damos el nombre de *transformada Z unilateral*, denotémosla por TZ_u. Del mismo modo, muchos programas de cálculo simbólico (p.e. *Maple*©) implementan esta definición en sus librerías. No hay grandes diferencias en adoptar esta definición o la que hemos dado en (3.1) (que podemos denominar *bilateral*). Si identificamos las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ con sucesiones doblemente infinitas causales (obviamente dando el valor 0 para $n < 0$), entonces la TZ_u es una mera restricción de aquella al subespacio vectorial de las sucesiones causales, mientras que la bilateral se puede obtener de la unilateral según muestra la propiedad 3.3.VI. Evidentemente, todo lo que se puede decir sobre la TZ bilateral se particulariza a la unilateral, así pues son igualmente válidas para ésta las propiedades 3.3.I, 3.3.II, 3.3.IV, 3.3.V, 3.3.VII y 3.3.VIII; es evidente que no tiene sentido para la TZ_u la inversión en tiempo 3.3.VI. Aparte de esto se tienen unas peculiaridades que se exponen a continuación.

Observación 3.5. La convolución de sucesiones causales $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no es otra cosa que el producto de Cauchy de las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$; explícitamente, si $c[n] = (a * b)[n]$, entonces

$$c[n] = 0 \quad \text{para} \quad n < 0 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad c[n] = \sum_{k=0}^{n} a[k]\,b[n-k] \quad \text{para} \quad n \ge 0\,.$$

Proposición 3.6 (TZ_u **de desfases).** Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión que admiten TZ_u. Pongamos $a_n = 0$ para $n < 0$ y $F(z) = TZ\big(\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\big) = TZ_u\big(\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\big)$.

I) La corona de convergencia de la transformada $F(z)$ de $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es el exterior de un disco, es decir, de la forma $\{z \in \mathbb{C} : \rho < |z|\}$; lo mismo se puede decir para cualquier desfase suyo $\{a_{n+p}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, pues la parte anticausal consta eventualmente, si $p > 0$, de una cantidad finita de términos no nulos.

II) 1. Si $p<0$ el desfase $\{a_{n+p}\}_{n=0}^{\infty}$, identificado con la sucesión doblemente infinita

$$\{\dots,0,0,\overset{n=0}{0},\dots,0,\overset{n=-p}{a_0},a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\},$$

tiene TZ_u igual a $z^pF(z)$ (como en 3.3.III).

2. Pero si $p>0$, la sucesión desfasada $\{a_{n+p}\}_{n=0}^{\infty}$, que se identifica con el "truncamiento" del desfase $\{a_{n+p}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ haciendo nulos los valores para $n<0$, o lo que es lo mismo, con la señal

$$g[n]=\boldsymbol{\epsilon}[n]\,a[n+p]=\{\dots,0,0,0,\overset{n=0}{a_p},a_{p+1},a_{p+2},\dots,a_{p+n},\dots\},$$

tiene TZ, con la misma corona de convergencia que $F(z)$, igual a la función

$$G(z)=z^p\Big(F(z)-a_0-\frac{a_1}{z}-\frac{a_2}{z^2}-\dots-\frac{a_{p-1}}{z^{p-1}}\Big).$$

3.2. Transformada inversa Z de fracciones racionales

La fórmula de inversión dada en el teorema 3.2 es, a todas luces, de difícil ejecución en la práctica. No obstante, para funciones sencillas (en concreto, los cocientes de polinomios) las propiedades anteriores proporcionan argumentos viables para determinar tal inversión. Explicaremos someramente estos argumentos, ilustrados luego con algunos ejemplos:

Si P y Q son polinomios en la variable z con coeficientes complejos es posible reescribir la *fracción racional* $F(z)={}^{P(z)}/_{Q(z)}$ de la forma

$$F(z)=C(z)+\frac{R(z)}{Q(z)}=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_pz^p+\frac{R(z)}{Q(z)},$$

donde C es el cociente de la división de P entre Q (si eventualmente el grado de P es mayor o igual que el de Q) y R es el resto de tal división. Luego, si $r_1,r_2,\dots,r_k$ son las raíces de Q, la fracción ${}^{R(z)}/_{Q(z)}$ se puede descomponer, como se indica en la observación 2.24, en *fracciones simples* de la forma (2.5).

En virtud de la linealidad es suficiente determinar la transformada inversa de los monomios del cociente y de las fracciones simples:

I) Según el ejemplo 3.4.I es obvio que para $p\geq 0$

$$\text{la transformada inversa de}\quad a_p\,z^p\quad\text{es}\quad a_p\,\boldsymbol{\delta}[n+p]=\{\dots,0,0,0,\overset{n=-p}{a_p},0,0,\dots,\overset{n=0}{0},\dots\}$$

con corona de convergencia igual a todo $\mathbb{C}$.

II) Para fracciones simples $G(z)=\dfrac{1}{(z-r)^m}$ la cuestión es un poco más complicada, pues si $r\neq 0$ existen dos coronas disjuntas donde tales funciones admiten desarrollos de Laurent centrados en $z_0=0$: $\{|z|>|r|\}$ y $\{|z|<|r|\}$. Si atendemos a la práctica:

a. cuando en Teoría de la Señal se consideran desfases u de señales causales (i.e., con *tiempo de encendido* finito: $u[n]=0$ para $n<n_0$, ver ejercicio 3.5), la corona de convergencia de su TZ es el exterior de un disco centrado en $z_0=0$ (ver proposición 3.6.I);

b. por otro lado, en la teoría de *sistemas discretos* se consideran señales u *sumables* (la serie $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\big|u[n]\big|$ es convergente), lo que implica que la corona de convergencia contiene a la circunferencia unidad $\{|z|=1\}$.

Estas consideraciones nos indican la forma de proceder:

a. Para el caso del exterior de un disco, pongamos $m=k+1$ (i.e. $k=m-1$) y consideremos la función $G(z)=\dfrac{1}{(z-r)^m}=\dfrac{1}{(z-r)^{k+1}}$. Según el ejemplo 3.4.IV se tiene que

$$z\,G(z)=\frac{z}{(z-r)^{k+1}}=TZ\left(\frac{1}{r^k}\binom{n}{k}r^n\boldsymbol{\epsilon}[n]\right)=TZ\left(\frac{1}{r^{m-1}}\binom{n}{m-1}r^n\boldsymbol{\epsilon}[n]\right),\qquad |z|>|r|.$$

Pero según la propiedad 3.3.III

$$G(z)=z^{-1}z\,G(z)=TZ\left(\frac{1}{r^{m-1}}\binom{n-1}{m-1}r^{n-1}\boldsymbol{\epsilon}[n-1]\right),\qquad |z|>|r|.$$

b. Cuando se trabaja en el interior del disco de radio r la clave consiste en usar la propiedad 3.3.VI, para ello escribamos

$$\frac{1}{(z-r)^m} = \frac{1}{z^m(1-{}^r\!/_z)^m} = \frac{({}^1\!/_z)^m}{(1-{}^r\!/_z)^m} = F\Big(\frac{1}{z}\Big),$$

siendo F la función analítica en la corona $\{z \in \mathbb{C} : |z| > {}^1\!/_r\}$ dada por

$$F(z) = \frac{z^m}{(1-r\,z)^m} = \frac{(-1)^m}{r}\, z^{m-1}\, \frac{({}^1\!/_r)^{m-1} z}{(z-{}^1\!/_r)^m} = \frac{(-1)^m}{r}\, z^{m-1}\, TZ\bigg(\binom{n}{m-1}\frac{1}{r^n}\,\boldsymbol{\epsilon}[n]\bigg),$$

siendo la última igualdad consecuencia de las fórmulas obtenidas en el ejemplo 3.4.IV. Si atendemos ahora a la propiedad de desfases 3.3.III resulta que

$$F(z) = TZ\bigg(\frac{(-1)^m}{r}\binom{n+m-1}{m-1}\frac{1}{r^{n+m-1}}\,\boldsymbol{\epsilon}[n+m-1]\bigg),$$

es decir $F(z)$ es la transformada inversa en la corona $\{z \in \mathbb{C} : |z| > {}^1\!/_r\}$ de la sucesión

$$\varphi[n] = \binom{n+m-1}{m-1}\frac{(-1)^m}{r^{n+m}}\,\boldsymbol{\epsilon}[n+m-1],$$

de donde se concluye finalmente que $\dfrac{1}{(z-r)^m} = F({}^1\!/_z)$ es la transformada inversa en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ de la sucesión

$$\varphi[-n] = \binom{-n+m-1}{m-1}\frac{(-1)^m}{r^{-n+m}}\,\boldsymbol{\epsilon}[-n+m-1]$$

(recuérdese que convenimos que $\binom{n}{k} = 0$ para $n < k$).

Lo expuesto anteriormente muestra de forma sistemática y general que toda fracción racional, fijada una corona donde sea holomorfa, es la transformada Z de una sucesión. Ahora bien, en la práctica, distintas argucias permiten simplificar los cálculos. Ilustramos esto a continuación.

Ejemplos 3.7. Aplicaremos las consideraciones anteriores a dos casos concretos.

I) Sea $F(z) = \dfrac{z^3}{z^2-1}$. Esta función tiene polos simples en $z = 1$ y $z = -1$, por lo que las coronas donde es susceptible de desarrollar en serie de Laurent son $\{|z| > 1\}$ y $\{|z| < 1\}$. Calculemos su transformada Z inversa en la primera de ellas. Primero escribamos

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^2}{z^2-1} = 1 + \frac{1}{z^2-1} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+1}, \qquad |z| > 1,$$

de donde se sigue que (ver ejemplos 3.4.I y 3.4.II)

$$F(z) = z + \frac{1}{2}\,\frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\,\frac{z}{z+1} = TZ\big(\boldsymbol{\delta}[n+1]\big) + \frac{1}{2}\,TZ\big(\boldsymbol{\epsilon}[n]\big) - \frac{1}{2}\,TZ\big((-1)^n\boldsymbol{\epsilon}[n]\big),$$

con corona de convergencia $\{|z| > 1\}$. En resumen, la transformada inversa de F es la señal

$$\varphi[n] = \boldsymbol{\delta}[n+1] + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\epsilon}[n] - \frac{1}{2}\,(-1)^n\boldsymbol{\epsilon}[n].$$

II) Sea $F(z) = \dfrac{z}{(z-{}^1\!/_2)(z-2)}$. Esta función tiene polos simples en $z = {}^1\!/_2$ y $z = 2$.

Si buscamos soluciones de $TZ(\varphi) = F$ con $\varphi[n]$ sumable, de entre todas las coronas donde F admite desarrollo de Laurent, la única que contiene a la circunferencia unidad es $\{{}^1\!/_2 < |z| < 2\}$; en ella buscaremos la transformada Z inversa. Se tiene que

$$F(z) = \frac{z}{(z-{}^1\!/_2)(z-2)} = z\,\frac{1}{(z-{}^1\!/_2)(z-2)} = z\Big(\frac{2}{3}\,\frac{1}{z-2} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{z-{}^1\!/_2}\Big) = \frac{2}{3}\,\frac{z}{z-2} - \frac{2}{3}\,\frac{z}{z-{}^1\!/_2}.$$

Por una parte, según 3.4.II, se tiene que

$$\frac{z}{z-{}^1\!/_2} = TZ\big(2^{-n}\boldsymbol{\epsilon}[n]\big), \qquad |z| > \frac{1}{2},$$

y atendiendo al ejemplo 3.4.III y la propiedad 3.3.III, se deduce que

$$\frac{z}{z-2} = -2\,z\,\frac{-2^{-1}}{z-{}^1\!/_{2^{-1}}} = TZ\big(-2^n\boldsymbol{\epsilon}[-n-1]\big), \qquad |z| < \frac{1}{|2^{-1}|} = 2.$$

Recogiendo la aportación de los dos términos, la transformada Z inversa de F con corona de convergencia $\{1/2 < |z| < 2\}$ es la señal

$$\varphi[n] = \frac{2}{3}\Big(- 2^n \boldsymbol{\epsilon}[-n-1] - 2^{-n}\boldsymbol{\epsilon}[n]\Big) = -\frac{2^{n+1}}{3}\,\boldsymbol{\epsilon}[-n-1] - \frac{2^{-n+1}}{3}\,\boldsymbol{\epsilon}[n]\,.$$

Si se buscan soluciones φ con tiempo de encendido finito, la corona de convergencia resulta ser $\{|z| > 2\}$; en este caso para la fracción $z/(z-2)$ se razona igual que con la otra obteniendo

$$\varphi[n] = \frac{1}{3}\big(2^{n+1} - 2^{-n+1}\big)\,\boldsymbol{\epsilon}[n]\,.$$

3.3. Relación de la TZ con otras transformaciones

Los distintos métodos de tratamiento de ecuaciones funcionales son a veces variaciones adaptadas a la naturaleza del problema concreto a tratar de un mismo planteamiento abstracto: a saber, la descripción de cierto fenómeno en un sistema de referencia constituido por autofunciones, o si se prefiere, en términos del *espectro de frecuencias* de las funciones (o señales, etc.). Por ejemplo, las transformaciones de Fourier son útiles para funciones de cuadrado integrable (i.e. señales de energía finita periódicas o no periódicas), mientras que la de Laplace es aplicable a una gama más amplia de funciones a transformar.

En esta sección se pone de manifiesto el comentario anterior en dos situaciones distintas.

3.3.1. Relación de la TZ con series de Fourier

Recordemos que si f es una función compleja, periódica de periodo 2π y localmente integrable, se define la *serie de Fourier de f* como la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(k\,x) + b_k\,\mathrm{sen}(k\,x)\Big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,e^{i\,k\,x}\,,$$

cuyos coeficientes vienen dados por las expresiones

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(k\,x)\,dx \quad k \geq 0\,, \qquad \text{y} \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(k\,x)\,dx\,, \quad k \geq 1\,,$$

o lo que es lo mismo,

$$c_k = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-i\,k\,x}\,dx\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

El número c_k recibe el nombre de *k-ésimo coeficiente de Fourier de f* y se denota también por $\widehat{f}(k)$; se tiene que $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$; $c_k = \dfrac{(a_k - i\,b_k)}{2}$ y $c_{-k} = \dfrac{(a_k + i\,b_k)}{2}$, $k \geq 1$; o dicho de otra forma, $a_k = c_k + c_{-k}$ para $k \geq 0$, y $b_k = i\,(c_k - c_{-k})$ si $k \geq 1$.

Supongamos ahora que $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ admite TZ y que su corona de convergencia contiene a la circunferencia $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Si F es su transformada, entonces

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^n$$

es holomorfa en esa corona, lo que implica que las series numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen absolutamente y, por tanto, la serie trigonométrica

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (e^{-it})^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n}\,; \qquad \text{siendo } \ z = e^{it},\ |z| = 1,$$

es la serie de Fourier de una función continua y 2π-periódica f hacia la que converge uniformemente.

3.3.2. La TZ como transformada de Laplace

Consideremos una sucesión causal $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos. Dado $0 < \varepsilon < 1$, a partir de esa sucesión se define la función f en $[0, \infty)$ mediante

$$f(x) = \frac{c_n}{\varepsilon} \quad \text{si} \ \ x \in [n, n+\varepsilon]\,, \quad n \geq 0\,.$$

Esta función es de las que se denominan *numerablemente escalonadas*, y resulta evidente que f es localmente integrable y que su integral en cada intervalo $[n, n+\varepsilon]$ es c_n; si ε es pequeño f concentra el valor c_n en torno al punto n o, dicho de otra forma, cuando $\varepsilon \to 0$ la restricción de f a un entorno del punto n es el producto de la constante c_n por una aproximación de la identidad en dicho punto.

Fijado $s \in \mathbb{C}$, supongamos que existe $\mathfrak{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$, i.e. que es finito el límite

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \int_0^k f(t)\, e^{-st}\, dt &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \int_n^{n+\varepsilon} \frac{c_n}{\varepsilon}\, e^{-st}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left. \frac{e^{-st}}{-s\varepsilon} \right|_{t=n}^{t=n+\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{e^{-s(n+\varepsilon)} - e^{-sn}}{-s\varepsilon} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{-sn}\, \frac{e^{-s\varepsilon}-1}{-s\varepsilon} = \frac{e^{-s\varepsilon}-1}{-s\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, (e^s)^{-n}, \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{-s\varepsilon}-1}{-s\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{-s\varepsilon}-e^0}{-s\varepsilon} = \exp'(0) = 1,$$

de manera que el límite de $\mathfrak{L}f(s)$ cuando $\varepsilon \to 0$ es la TZ de la sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ en el punto $z = e^s$.

Notemos que $\mathfrak{L}f(s)$ está definida para $\mathrm{Re}(s) > \sigma$, siendo σ la abscisa de convergencia de $\mathfrak{L}f$, por lo que la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, z^{-k}$ convergerá para $|z| = |e^s| = e^{\mathrm{Re}(s)} > e^\sigma = \rho > 0$; es decir, como ya sabíamos, en el exterior de un disco centrado en $z_0 = 0$ (ver proposición 3.6.i).

En el lenguaje de la ingeniería es usual escribir

$$\mathfrak{L}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \delta(x-n)\Big)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \mathfrak{L}\big(\delta(x-n)\big)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{-ns}.$$

Dar sentido riguroso a la expresión anterior es uno de los objetivos de los siguientes capítulos.

3.4. Ecuaciones en diferencias. Aplicación al estudio de sistemas lineales

Dada una sucesión $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ o, si se prefiere, una señal $u[n]$, se definen las *diferencias progresivas* de $u[n]$ como

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n\,, \quad \Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n) = u_{n+2} - 2\,u_{n+1} + u_n\,, \text{ etc.}$$

y las *diferencias regresivas* de $u[n]$ como

$$\nabla u_n = u_n - u_{n-1}\,, \quad \nabla^2 u_n = \nabla(\nabla u_n) = u_n - 2\,u_{n-1} + u_{n-2}\,, \text{ etc..}$$

Una *ecuación en diferencias* o *ecuación recurrente* es una ecuación en la incógnita $u[n]$ del tipo

$$a_0[n]\, u[n] + a_1[n]\, u[n-1] + \ldots + a_N[n]\, u[n-N] = b[n]\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{3.2}$$

donde las sucesiones de coeficientes $a_k[n]$, $k = 0, 1, \ldots, N$ y la sucesión "término independiente" $b[n]$ son conocidos.

El nombre que se les da se debe al hecho de que la expresión (3.2) se puede reescribir fácilmente en términos de las diferencias (en este caso, regresivas) de $u[n]$. La resolución de este tipo de ecuaciones es, en general, complicada, pero cuando los coeficientes a_k son constantes la TZ proporciona un formalismo algebraico muy útil en su tratamiento y, en particular, en el estudio de los sistemas de señales discretos. Los últimos ejercicios de este tema (del 3.16 en adelante) son ejemplos de aplicación de la TZ a la resolución de ecuaciones recurrentes.

En cuanto a los sistemas lineales, haremos un breve compendio de los aspectos más relevantes para finalizar exponiendo como se usa la TZ en su tratamiento.

Un sistema *discreto* es un operador L que, recibiendo una señal de entrada discreta, devuelve otra señal discreta. Un sistema L se denomina *lineal* si para cada par de señales u, v y escalares α, β se tiene que $L(\alpha\, u + \beta\, v) = \alpha\, L(u) + \beta\, L(v)$.

Un sistema L se denomina *invariante en el tiempo* si verifica que $L(u[n-n_0]) = L(u)[n-n_0]$, es decir, si verifica que a un desfase en la señal de entrada responde con el mismo desfase en la de salida.

Un sistema L se denomina *causal* si para cada par de señales u y v tales que $u[n] = v[n]$ para $n \le n_0$, se tiene que $L(u)[n] = L(v)[n]$ para $n \le n_0$.

Teorema: Un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo es causal si, y sólo si, la respuesta a cada señal causal es también causal.

Es usual referirse a los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo como LTD (del inglés "*linear, time-invariant, discrete*").

Para un sistema LTD la respuesta $\boldsymbol{\tau} = L(\boldsymbol{\delta})$ al impulso unidad se denomina *respuesta al impulso.*

Un sistema LTD se denomina *estable* si la respuesta a cada señal acotada es también acotada. Resulta que un LTD es estable si, y sólo si, la respuesta al impulso $\boldsymbol{\tau}[n] = L(\boldsymbol{\delta})[n]$ verifica que $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \big|\boldsymbol{\tau}[n]\big| < \infty$.

Ejemplo 3.8. La fórmula

$$y[n] = L(u)[n] = u[n] - 2\,u[n-1] + u[n-2]\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

define un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal.

La respuesta al impulso está definida por

$$\boldsymbol{\tau}[0] = \boldsymbol{\delta}[0] = 1, \quad \boldsymbol{\tau}[1] = -2\,\boldsymbol{\delta}[0] = -2, \quad \boldsymbol{\tau}[2] = \boldsymbol{\delta}[0] = 1; \qquad \boldsymbol{\tau}[n] = 0 \text{ si } n \neq 0, 1, 2\,,$$

lo que permite reescribir el sistema en términos de una convolución

$$y[n] = \boldsymbol{\tau}[0]\,u[n] + \boldsymbol{\tau}[1]\,u[n-1] + \boldsymbol{\tau}[2]\,u[n-2] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\tau}[j]\,u[n-j]\,. \tag{3.3}$$

La fórmula (3.3) no es anecdótica, es válida para todo sistema LTD. Si denotamos por $Y(z)$, $T(z)$ y $U(z)$ a las correspondientes transformadas Z de las señales, la propiedad 3.3.vii establece que

$$Y(z) = T(z)\,U(z)$$

en la correspondiente corona de convergencia.

Definición 3.9. Para un sistema LTD, la TZ de su respuesta al impulso $\boldsymbol{\tau}$, $T(z) = \sum\limits_{n=\infty}^{\infty} \boldsymbol{\tau}[n]\,z^{-n}$, se denomina *función de transferencia* del sistema.

La función de transferencia caracteriza también ciertas propiedades de un sistema LTD, por ejemplo:

Teorema 3.10. Un sistema LTD es causal si, y sólo si, su función de transferencia T converge en el exterior de un disco centrado en $z_0 = 0$ y existe $\lim\limits_{|z|\to\infty} T(z) \in \mathbb{C}$.

Teorema 3.11. Si un sistema LTD tiene función de transferencia racional $T(z) = P(z)/Q(z)$, entonces:

i) El grado de P es menor o igual que el de Q.

ii) El sistema es estable si, y sólo si, los polos de T están dentro del disco unidad $\{|z| < 1\}$.

Las *ecuaciones en diferencias* juegan, para señales discretas, un papel análogo al de las ecuaciones diferenciales con señales continuas. Al igual que en este último caso las complicaciones de cálculo son enormes salvo para situaciones sencillas. No es difícil de comprender el porqué nos restringimos al estudio de ecuaciones lineales con coeficientes constantes que, por otra parte, caracterizan los sistemas LTD que se manejan habitualmente y que se describen a continuación.

Definición 3.12. Se dice que un sistema L está definido por una ecuación en diferencias si existen naturales N, M y constantes complejas $a_0, a_1, \ldots, a_N$ y $b_1, \ldots, b_M$ tales que para cada señal u, siendo $y[n] = L(u)[n]$, se verifica que

$$y[n] + b_1 y[n-1] + \ldots + b_M y[n-M] = a_0 u[n] + a_1 u[n-1] + \ldots + a_N u[n-N]\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.4}$$

Observaciones 3.13.

i) El ejemplo 3.8 es un caso particular sencillo de lo descrito arriba. Dejamos como ejercicio al lector comprobar que, efectivamente, la fórmula (3.4) define un sistema LTD y que, además, estos sistemas son causales.

ii) En general, para una señal de entrada fija u la ecuación (3.4) puede admitir múltiples soluciones. Pero si se fijan M valores (*iniciales*) de la señal de salida $y[j+1], y[j+2], \ldots, y[j+M]$, entonces la solución es única y, de forma teórica, puede ser obtenida recurrentemente. Por ejemplo si u es causal, entonces y es causal, entonces $y[-1] = y[-2] = \ldots = y[-M] = 0$ y queda determinado el valor $y[0]$; conocido éste último se determina $y[1]$, y así sucesivamente.

III) La fórmula (3.3) proporciona otra forma de resolución directa del sistema que evita la recurrencia. Para ello es necesario conocer la respuesta al impulso o, lo que es lo mismo, la función de transferencia y su inversa Z. Abordamos a continuación el estudio de esta cuestión.

Si tomamos TZ en (3.4), de las propiedades de linealidad y desfase se deduce que las funciones Y, U, transformadas respectivas de y y u, satisfacen

$$\big(1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}\big)\, Y(z) = \big(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}\big) U(z)$$

y resulta que la función de transferencia del sistema es racional

$$T(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}} = z^{M-N} \frac{a_N + a_{N-1} z + \ldots + a_o z^N}{b_M + b_{M-1} z + \ldots + z^M}\,. \tag{3.5}$$

Puesto que el sistema es causal, según el teorema 3.10, la corona de convergencia de T es el exterior de un disco centrado en $z_0 = 0$. Esto determina de forma unívoca la transformada inversa Z de T y, por lo tanto, la respuesta al impulso.

Ejemplos 3.14.

I) Consideremos el sistema $y = L(u)$ definido por

$$y[n] - 3\,y[n-1] + 2\,y[n-2] = u[n] + u[n-1]\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

La función de transferencia del sistema es

$$T(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 3\,z^{-1} + 2\,z^{-2}} = \frac{z + z^2}{z^2 - 3\,z + 2} = \frac{z + z^2}{(z-1)(z-2)} = \frac{3\,z}{z-2} - \frac{2\,z}{z-1}\,,$$

cuyos polos se encuentran en $z = 1$ y $z = 2$, por lo que su corona de convergencia es $\{|z| > 2\}$. De lo obtenido en el ejemplo 3.4.IV se deduce que la respuesta al impulso $\boldsymbol{\tau}$ es

$$\boldsymbol{\tau}[n] = (3 \cdot 2^n - 2)\, \boldsymbol{\epsilon}[n]\,.$$

El sistema no es estable pues la serie $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \big|\boldsymbol{\tau}[n]\big| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (3 \cdot 2^n - 2)$ no converge (véase también el teorema 3.11). Las soluciones vienen dadas según la fórmula (3.3):

$$y = (\boldsymbol{\tau} * u); \qquad \text{es decir,} \qquad y[n] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\tau}[j]\, u[n-j] = \sum_{j=0}^{\infty} (3 \cdot 2^j - 2)\, u[n-j]\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Obviamente las sumas anteriores no tienen sentido para toda señal u; ahora bien, si se trabaja con señales causales y sus desfases (con tiempo de encendido finito, i.e. verificando que $u[n] = 0$ para $n < N$, con lo que $u[n-j] = 0$ para $n - N < j$), esas sumas resultan ser finitas

$$y[n] = \sum_{j=0}^{n-N} (3 \cdot 2^j - 2)\, u[n-j]\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

II) Si el sistema $y = L(u)$ está definido por

$$y[n] - 3\,y[n-1] + 3\,y[n-2] - y[n-3] = u[n-2]\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

su función de transferencia es

$$T(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 3\,z^{-1} + 3\,z^{-2} - z^{-3}} = \frac{z}{z^3 - 3\,z^2 + 3\,z - 1} = \frac{z}{(z-1)^3}\,,$$

con corona de convergencia $\{|z| > 1\}$; según el teorema 3.11 el sistema no es estable.

Ejercicios

3.1 Determinar la corona de convergencia de la TZ de una sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ con un número finito de términos no nulos.

3.2 En los siguientes casos, determinar la corona de convergencia de la TZ de la sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$:

I) $a_n = (2^{-n} + 3^{-n})\, \boldsymbol{\epsilon}[n]$ II) $a_n = (2^n + 3^n)\, \boldsymbol{\epsilon}[-n]$

III) $a_n = \cos({}^{n\pi}/_{2})\, \boldsymbol{\epsilon}[n] + (2^n + 3^n)\, \boldsymbol{\epsilon}[-n]\,.$

3.3 Calcular la TZ de las sucesiones siguientes, indicando asimismo la corona de convergencia:

I) $a_n = 2\,n\,\boldsymbol{\epsilon}[n-2]$ II) $a_n = 2\,n\,\boldsymbol{\epsilon}[-n-2]$ III) $a_n = (-1)^n\,\boldsymbol{\epsilon}[-n]$
IV) $a_n = \boldsymbol{\epsilon}[4-n]$ V) $a_n = (n^2 + n\,4^n)\,\boldsymbol{\epsilon}[n]$.

3.4 Calcular la TZ de las sucesiones siguientes, indicando asimismo la corona de convergencia:

I) $a_n = \cos({}^{n\pi}/_2)\,\boldsymbol{\epsilon}[n]$ II) $a_n = \mathrm{sen}({}^{n\pi}/_2)\,\boldsymbol{\epsilon}[n]$ III) $a_n = e^{inw}\boldsymbol{\epsilon}[n] + 2^n e^{inw}\boldsymbol{\epsilon}[-n]$.

3.5 Se dice que $N \in \mathbb{Z}$ es el *tiempo de encendido* (*switch-on time*) de la señal discreta u si $u[n] = 0$ para $n < N$ y $u[N] \neq 0$. Análogamente, M es el *tiempo de apagado* (*switch-off time*) de la señal u si $u[n] = 0$ para $n > M$ y $u[M] \neq 0$.

Sean u, v dos señales discretas con tiempos de encendido finitos N_1, N_2, respectivamente, y tiempos de apagado finitos M_1, M_2, respectivamente. Calcular los tiempos de encendido y apagado del producto de convolución $u * v$.

3.6 Una señal u se dice *periódica* si existe un número natural $k > 0$ tal que

$$u[n+k] = u[n] \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}\,.$$

Una señal causal u se dice *periódica* si existe un número natural $k > 0$ tal que

$$u[n+k] = u[n] \qquad \text{para todo } n \geq 0\,.$$

I) Investigar qué sucesiones periódicas admiten TZ.

II) Determinar la TZ de una señal causal y periódica.

3.7 Sea F una función racional que no tiene polos en la corona $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$. Probar que, si $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es la transformada inversa Z de F en la citada corona, entonces

$$a_n = \sum_{\substack{a \text{ es polo de } z^{n-1}F(z) \\ |a| \leq \rho_1}} \mathrm{Res}\left(z^{n-1}F(z), a\right).$$

3.8 Para una señal causal u su TZ viene dada por

$$F(z) = \frac{1}{4\,z^2 + 1}\,.$$

Probar que u es sumable y calcular u.

3.9 Para las siguientes funciones determinar la transformada inversa Z en las distintas coronas admisibles. Indíquese también el caracter sumable de la señal, o si tiene un tiempo de encendido finito.

I) $F(z) = \dfrac{1}{z(z-2)^2}$ II) $F(z) = \dfrac{z^4 + z^3 - 2\,z + 1}{z^2 + 2\,z + 2}$ III) $F(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4}$

IV) $F(z) = \dfrac{z^3}{(z+3)(z + {}^1/_2)}$.

3.10

I) Calcular la señal causal cuya TZ es $F(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

II) Utilizando la convolución, calcular la señal causal cuya TZ es $G(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

3.11 Determinar la transformada inversa Z de las siguientes funciones en la corona $\{0 < |z|\}$:

I) $F(z) = \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ II) $F(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$ III) $F(z) = \dfrac{\mathrm{Ch}(z) - 1}{z^7}$.

3.12 Para los siguientes LTD se pide calcular la respuesta al impulso y determinar cuáles son causales y cuáles estables:

I) $y[n] = \sum\limits_{j=-\infty}^{n-1} 2^{j-n} u[j]$. II) $y[n] = \dfrac{u[n+1] + u[n-1]}{2}$. III) $y[n] = \sum\limits_{j=n}^{\infty} 2^{j-n} u[j]$.

3.13 Un LTD causal viene descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] + \frac{1}{2}\, y[n-1] = u[n]\,.$$

I) Calcular la respuesta al impulso del sistema.

II) Calcular la respuesta a la entrada $u[n] = 2^{-n}\boldsymbol{\epsilon}[n]$.

III) ¿Es estable el sistema?

3.14 Se considera el LTD dado por la ecuación en diferencias

$$y[n] - y[n-2] = u[n-1]\,.$$

I) Calcular la función de transferencia del sistema.

II) Calcular la respuesta a la entrada $u[n] = \cos(n\phi)\,\boldsymbol{\epsilon}[n]$.

3.15 Un LTD causal viene descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}\, y[n-2] = u[n] + u[n-1]\,.$$

I) Calcular la respuesta al impulso del sistema.

II) ¿Es estable el sistema?

III) Calcular la respuesta del sistema a la señal escalón $\boldsymbol{\epsilon}$.

IV) Calcular la respuesta a la entrada $u[n] = \boldsymbol{\epsilon}[n] + \boldsymbol{\epsilon}[n-2]$.

3.16 Utilícese la TZ para determinar las soluciones generales de la *ecuación de Fibonacci*:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\,, \qquad n \geq 0\,.$$

Indicación: Hágase uso de la fórmula presentada en la proposición 3.6.II.2 para expresar las soluciones en términos de las condiciones iniciales x_0 y x_1.

3.17 Resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2\,y_n = a^n\,, \qquad n \geq 0\,,$$

siendo $y_0 = 3\,,\, y_1 = 1$.

Indicación: Distinguir los casos $a^2 + a - 2 \neq 0$ y $a^2 + a - 2 = 0$.

3.18 Sea $P(z) = z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ un polinomio con p raíces distintas: $r_1, r_2, \ldots, r_p$ (i.e., que factoriza de la forma $P(z) = (z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_p)$). Probar que todas las soluciones de la ecuación recurrente

$$y_{n+p} + a_{p-1}\,y_{n+p-1} + \ldots + a_1\,y_{n+1} + a_0\,y_n = 0\,, \qquad n \geq 0\,,$$

son de la forma $y_n = C_1\,r_1^n + C_2\,r_2^n + \ldots + C_p\,r_p^n$, siendo $C_1, C_2, \ldots, C_p$ constantes complejas.

3.19 Resolver la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} x_{n+1} - y_n &= \quad 1 \\ x_n - y_{n+1} &= \; -1 \end{cases} \qquad n \geq 0\,,$$

siendo $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

3.20 Resolver la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} x_{n+1} - y_{n+1} - 2\,x_n &= \quad 2^n \\ x_{n+1} + y_{n+1} - 2\,y_n &= \quad 0 \end{cases} \qquad n \geq 0\,,$$

siendo $x_0 = y_0 = 1$.

Capítulo 4

Introducción a la teoría de distribuciones

Aunque se venía usando durante tiempo, no es hasta 1930 que Paul Dirac, en su libro *Principios de mecánica cuántica*, establece una definición de la “función” *delta* (δ). Contraviniendo todas las reglas de las funciones al uso (una función que se anula en todo punto menos en uno, donde vale ∞, y que tiene integral 1), sin embargo se demostró una herramienta extremadamente útil en la descripción y tratamiento de numerosos problemas de la Física y la Ingeniería.

Para mayor estupor de los matemáticos Dirac tuvo incluso la (feliz) osadía de derivar esta función, un sinsentido en el contexto de las funciones en el sentido clásico, pero una idea fructífera y herramienta indispensable en la actualidad en las matemáticas aplicadas. Como en muchos otros campos, la Matemática se ha desarrollado espoleada por los retos de la Física, para dar respuesta a los modelos que empíricamente esta última desarrolla. Así, alrededor de 1948 y fundamentalmente gracias a los trabajos de L. Schwartz y S.L. Sóbolev, se establece el marco adecuado donde alcanzan pleno sentido y rigor, no sólo la δ de Dirac, sino también una amplia gama de las que denominamos *distribuciones*, término introducido por Schwartz, que predomina en la escuela francesa y que procede de la generalización del concepto de *distribución de masa* (o *función de densidad*) suscitado por la mencionada δ de Dirac. Este aparato matemático consiste, vagamente hablando, en ampliar el concepto de función incluyendo las funciones clásicas, por lo que también las distribuciones se denominan *funciones generalizadas*, dependiendo del gusto personal o de la escuela a la que se pertenezca.

Este capítulo se dedica a presentar de forma concisa el concepto de distribución y sus propiedades. Por razones de simplicidad nos constreñimos al caso unidimensional pero, salvo las complicaciones habituales de notación y alguna otra, todo se puede generalizar, casi palabra por palabra, al caso de funciones de varias variables reales.

4.1. El espacio $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Distribuciones

Lema 4.1. Sean f, g funciones definidas en $\mathbb{R}$ a valores complejos. Se verifica:

I) Si f y g tienen soporte compacto también $f+g$ es de soporte compacto. Precisando más: en general, $\operatorname{sop}(f+g) \subseteq \operatorname{sop}(f) \cup \operatorname{sop}(g)$.

II) Si una de las dos es de soporte compacto, entonces $f\,g$ es de soporte compacto. Concretamente: $\operatorname{sop}(f\,g) \subseteq \operatorname{sop}(f) \cap \operatorname{sop}(g)$.

III) Si f es derivable en $\mathbb{R}$ y de soporte compacto entonces f' es de soporte compacto; de hecho $\operatorname{sop}(f') \subseteq \operatorname{sop}(f)$. En consecuencia, si f es de clase $\mathscr{C}^k$ en $\mathbb{R}$ para cada $m \leq k$ la derivada m-ésima $f^{(m)}$ es de soporte compacto.

Definición 4.2. Se designa por $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (también por $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$) al conjunto de las funciones complejas definidas y de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ y de soporte compacto. Sus elementos son las denominadas *funciones test*. Este conjunto, dotado de las operaciones habituales de suma de funciones y producto de un escalar por una función es un espacio vectorial, el denominado *espacio de las funciones test*.

Observaciones 4.3.

I) El lema 1.40 o el ejercicio 1.20 proporcionan ejemplos de funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$ y soporte compacto; es decir, el espacio $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ no es vacío.

II) Con vistas al estudio de ecuaciones funcionales se hace necesario definir una forma de medir la distancia entre funciones test. Esto es posible mediante una métrica (no normada) que toma en consideración las aportaciones de las funciones y todas sus derivadas. La construcción de esta métrica no es demasiado complicada, pero es más sencillo y operativo en la práctica describirla en términos secuenciales, como se hace en la siguiente definición.

Definición 4.4 (Convergencia en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$). Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Se dice que $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge hacia* 0 *en* $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ *o en el sentido de las distribuciones* si:

1. Existe un intervalo compacto $[a,b]$ tal que $\operatorname{sop}(\varphi_n) \subset [a,b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Para cada $k \geq 0$ la sucesión de derivadas $\{\varphi_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia 0 en $\mathbb{R}$.

Se dice que $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge hacia* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ (*en el sentido de las distribuciones*) si la sucesión $\{\varphi_n - \varphi\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

Observación 4.5. Por definición, el hecho de que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja uniformemente hacia 0 implica que, fijado $\varepsilon > 0$, se verifique $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ para todo x y todo $n \geq n_0(\varepsilon)$; en particular existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo x y todo $n \in \mathbb{N}$.

Así pues, la convergencia de una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ implica la acotación uniforme de todas las sucesiones de derivadas; concretamente, para cada $k \geq 0$ existe $M_k > 0$ tal que

$$\left|\varphi_n^{(k)}(x)\right| \leq M_k \qquad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R} \quad \text{y todo } n \in \mathbb{N}\,.$$

Definición 4.6. Se denomina *distribución* a toda aplicación lineal y continua $T\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$. Esto es:

1. Si $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se verifica que
$$T(\alpha\,\varphi + \beta\,\psi) = \alpha\,T(\varphi) + \beta\,T(\psi)\,.$$
2. Para cada sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones test que converge hacia 0 en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ se tiene que la sucesión de números complejos $\{T(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $0 \in \mathbb{C}$. Equivalentemente,
$$\text{si } \ \varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \text{ en } \mathscr{D}(\mathbb{R}), \quad \text{entonces } \ T(\varphi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(\varphi) \text{ en } \mathbb{C}\,. \tag{4.1}$$

Proposición 4.7. Sean S, T dos distribuciones y α un número complejo, entonces las aplicaciones lineales

$$T + S \qquad \text{y} \qquad \alpha\,T \tag{4.2}$$

son distribuciones.

Observaciones 4.8.

I) Según el resultado anterior el conjunto de las distribuciones dotado de las operaciones (4.2) es un espacio vectorial complejo que se representa $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

II) El conjunto de aplicaciones lineales definidas en un espacio vectorial E a valores en el cuerpo de escalares se denomina *dual algebraico* de E y se suele denotar E^*. Cuando el espacio E es normado y de dimensión finita toda aplicación lineal en E es continua; pero no sucede lo mismo en espacios vectoriales arbitrarios, por lo que se hace necesario distinguir entre el dual algebraico y el denominado *dual topológico*, que es el espacio de las aplicaciones complejas, lineales y continuas en E, denotado usualmente por E'. Obviamente $E' \subseteq E^*$.

III) Si $\boldsymbol{x}$ es un elemento fijo del espacio vectorial E, la aplicación $T \in E^* \longmapsto T(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}$ es lineal, es decir, cada elemento de E se identifica con una aplicación lineal en E^*. Debido a esta *dualidad* es usual representar (a semejanza de lo que ocurre en los espacios euclídeos)
$$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle\,, \quad T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})\,,\ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,.$$

Ejemplos 4.9.

I) Sea a un número real. La aplicación δ_a definida en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ por
$$\delta_a(\varphi) = \langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$$
es una distribución que se denomina *delta de Dirac en el punto* a. Se suele escribir $\delta_0 = \delta$.

II) Supongamos que $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una sucesión de números reales tales que:

1. $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty\,.$

Entonces para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ es convergente la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta_{a_n}, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(a_n) = \sum_{a_n \in \operatorname{sop}(\varphi)} \varphi(a_n)$$

(que de hecho tiene un número finito de sumandos no nulos), y esta suma define una distribución que se representa por $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{a_n}$. En ciertos ámbitos, como Teoría de la Señal, se denomina *tren de deltas* a una de estas distribuciones. Cuando $a_n = n$ esta distribución recibe el nombre coloquial de *peine de Dirac*.

III) Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}$ (i.e., integrable en cada intervalo compacto). La aplicación T_f definida en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ por

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\operatorname{sop}(\varphi)} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

es una distribución. También se dice que f es una distribución, se representa T_f simplemente por f y se escribe

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

Esta identificación de la función f con la distribución T_f sugiere la otra nomenclatura para las distribuciones: *funciones generalizadas*.

IV) Caso particular del anterior es la denominada *función de Heaviside* definida por $H(x) = \chi_{[0,\infty)}$ o, en general, la *función escalón* en el punto $a \in \mathbb{R}$ dada por $H_a = \chi_{[a,\infty)}$, es decir $H_a(x) = H(x-a)$, cuya distribución asociada viene dada por

$$\langle H_a, \varphi \rangle = \int_a^{\infty} \varphi(x)\,dx\,.$$

4.1.1. Distribuciones regulares

Según el ejemplo 4.9.III toda función localmente integrable en $\mathbb{R}$ (y por ende, todas las continuas, de clase $\mathscr{C}^1$, etc.) define una distribución. Para distinguir este tipo de distribuciones utilizaremos el adjetivo "regular", no en el sentido de derivabilidad, sino como sinónimo de "común" o "propio". Se denota por $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de las funciones localmente integrables en $\mathbb{R}$.

Definición 4.10. Se dice que una distribución $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ es *regular* si existe una función f localmente integrable en $\mathbb{R}$ tal que $T = T_f$.

Lema 4.11. Sean f, g dos funciones localmente integrables tales que $T_f = T_g$, es decir, tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(f(x) - g(x)\big)\,\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \text{para cada} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,.$$

Entonces f y g son iguales casi siempre.

Observación 4.12. El significado del lema precedente es claro: dos funciones distintas f y g pueden generar la misma distribución, pero en este caso el conjunto de puntos donde difieren las funciones es de medida nula; en otras palabras, f y g son iguales casi siempre. En esta situación también se dice que f y g son *iguales en el sentido de las distribuciones*.

Entre las distribuciones regulares cabe destacar las que proceden de funciones continuas a trozos, pues son las que aparecen habitualmente en el estudio de la mayoría de los modelos matemáticos de las ciencias. La siguiente definición describe estos objetos.

Definición 4.13. Se dice que una función compleja f definida en $\mathbb{R}$ es *continua a trozos* si existe una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ verificando:

1. $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \quad$ y $\quad \lim\limits_{n\to-\infty} x_n = -\infty\,.$
3. f es continua (no necesariamente acotada) en cada intervalo $(x_n, x_{n+1})\,,\ n \in \mathbb{Z}$.

Lema 4.14. Con la notación de la definición anterior. Una función f continua a trozos en $\mathbb{R}$ es localmente integrable si, y sólo si, es integrable en cada intervalo (x_n, x_{n+1}) , $n \in \mathbb{Z}$; es decir, si para cada $n \in \mathbb{Z}$ es convergente la integral impropia

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left|f(x)\right| dx\,.$$

Notación: Se designará por $\mathscr{C}_d(\mathbb{R})$ al espacio vectorial (subespacio de $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$) de las funciones complejas f definidas en $\mathbb{R}$, localmente integrables y continuas a trozos.

Proposición 4.15. Dos funciones $f, g \in \mathscr{C}_d(\mathbb{R})$ son *iguales en el sentido de las distribuciones* si, y sólo si, existe una sucesión de números reales $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de manera que:

1. $y_n < y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty \quad$ y $\quad \lim\limits_{n\to-\infty} y_n = -\infty\,.$
3. $f(x) = g(x)$ para cada $x \in (y_n, y_{n+1})$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos 4.16. Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) La distribución H_a es regular; de hecho, $H_a \in \mathscr{C}_d(\mathbb{R})$.

ii) La distribución δ_a no es regular; es imposible que exista una función f localmente integrable tal que $\varphi(a) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ (ver ejercicio 4.8).

4.2. Operaciones con distribuciones

Una vez que hemos identificado las funciones usuales localmente integrables con distribuciones (las regulares), es lógico preguntarse si se pueden extender a las funciones generalizadas las operaciones habituales con funciones. La respuesta es afirmativa en muchos casos y a ello se dedica esta sección.

En la proposición 4.7 ya se ha establecido la estructura vectorial, en añadidura a esto la siguiente proposición afirma que la suma de distribuciones y producto de un escalar por una distribución generalizan los procesos análogos relativos a funciones clásicas.

Proposición 4.17. Sean T_f y T_g distribuciones regulares.

i) La distribución suma es también regular; concretamente $T_f + T_g = T_{f+g}$.

ii) Si $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha\,T_f = T_{(\alpha f)}$ y por tanto es una distribución regular.

4.2.1. Multiplicación de una distribución por una función

Notemos que si f es una función compleja de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ y φ es una función test, entonces $f\varphi$ también es una función test ($\mathrm{sop}(f\varphi) \subseteq \mathrm{sop}(\varphi)$ y la derivabilidad de cualquier orden es clara); así pues, tiene pleno sentido lo siguiente.

Lema 4.18. Sea f una función compleja de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. Si $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ la aplicación definida por

$$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longmapsto T(f\varphi) = \langle T, f\varphi\rangle \in \mathbb{C}$$

es también una distribución.

Definición 4.19. Si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ y $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ la distribución $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \mapsto \langle T, f\varphi\rangle \in \mathbb{C}$ se denomina *producto de la función f por la distribución T* y se denota por $f\,T$.

Proposición 4.20. Si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ y $T = T_h$ es una distribución regular, entonces

$$f\,T_h = T_{f\,h}\,.$$

Por tanto $f\,T_h$ es también una distribución regular.

Observación 4.21. Notemos que si h es localmente integrable en $\mathbb{R}$ y f es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, dado un compacto $K \subset \mathbb{R}$ entonces f está acotada en K por ser continua; digamos que $|f(x)| \leq M$, $x \in K$. El criterio de comparación asegura la integrabilidad en K de $|f\,h| \leq M|h|$. Es decir, $f\,h$ es también localmente integrable.

4.2.2. Derivación de distribuciones

Antes que nada veamos qué sucede con las funciones clásicas, lo que justificará la definición que se dará para funciones generalizadas:

Consideremos una función f derivable con continuidad en $\mathbb{R}$ (esto ya implica su carácter localmente integrable, así como el de f', por ser ambas continuas). Si φ es una función test, su soporte estará contenido en un intervalo acotado, digamos $[a,b]$, y lo mismo ocurre con los soportes de sus derivadas sucesivas (en particular, debe ser $\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b) = 0$ para todo $k \geq 0$). Entonces, de la fórmula de integración por partes se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx = f(x)\,\varphi(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx\,.$$

De la misma forma, si f es dos veces derivable con continuidad, realizando dos integraciones por partes, se prueba que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi''(x)\,dx$$

y, en general, que si f es de clase $\mathscr{C}^k$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi^{(k)}(x)\,dx$$

Esto sugiere la siguiente definición.

Lema 4.22. Sean $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ y k un número natural. La aplicación

$$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longmapsto (-1)^k T(\varphi^{(k)}) = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle \in \mathbb{C}$$

es también una distribución.

Definición 4.23. Si T es una distribución y $k \in \mathbb{N}$, la distribución $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \mapsto (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle \in \mathbb{C}$ se denomina *derivada k-ésima de T* y se denota por $T^{(k)}$.

Proposición 4.24. Si f es una función compleja de clase $\mathscr{C}^k$ en $\mathbb{R}$, entonces

$$(T_f)^{(k)} = T_{f^{(k)}}\,.$$

Proposición 4.25. Sean S, T distribuciones, $\alpha \in \mathbb{C}$, f una función compleja de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$.

I) $(T+S)^{(n)} = T^{(n)} + S^{(n)}$.

II) $(\alpha\,T)^{(n)} = \alpha\,T^{(n)}$.

III) $(f\,T)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\,T^{(k)}$ (*Fórmula de Leibnitz*).

Ejemplos 4.26.

I) Si $a \in \mathbb{R}$ las derivadas sucesivas de δ_a vienen dadas por

$$\delta_a^{(k)}(\varphi) = (-1)^k \delta_a(\varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(a)\,, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,.$$

II) La derivada de la función de Heaviside en el sentido de las distribuciones es

$$(T_H)'(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_0^{\infty} H(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x\to\infty} = \varphi(0)\,, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,.$$

Es decir, la derivada de H en el sentido de las distribuciones es la delta de Dirac en 0.

Como se deduce de los resultados anteriores, la definición de derivada de una distribución generaliza convenientemente la derivada usual. Es también interesante examinar cómo se derivan distribuciones regulares que proceden de funciones no de clase $\mathscr{C}^1$ en todo $\mathbb{R}$, pero sí a trozos. El ejemplo 4.26.II es un caso particular del siguiente resultado que incluye a la proposición 4.24.

Proposición 4.27 (Fórmula de los saltos). Sea f una función de $\mathscr{C}_d(\mathbb{R})$ tal que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números reales verificando:

1. $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to-\infty} x_n = -\infty$.
3. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, f admite derivada continua en (x_n, x_{n+1}) y f' es integrable en ese intervalo (no necesariamente acotada). En particular, f es continua en (x_n, x_{n+1}).
4. f presenta discontinuidades de salto finito en cada x_n, $n \in \mathbb{Z}$ (existen y son finitos los límites laterales $f(x_n^+) = \lim\limits_{x\to x_n^+} f(x)$ y $f(x_n^-) = \lim\limits_{x\to x_n^-} f(x)$). Esto, junto con la continuidad, garantiza que f es integrable en cada intervalo (x_n, x_{n+1}).

Entonces se verifica la siguiente igualdad (la denominada *fórmula de los saltos*)

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(f(x_n^+) - f(x_n^-)\big)\, \delta_{x_n},$$

donde la distribución $T_{f'}$ se refiere a la función de $\mathscr{C}_d(\mathbb{R})$ que se obtiene dando un valor arbitrario a f' en los puntos donde no está definida (los x_n, que conforman un conjunto de medida nula).

4.3. Convergencia débil de distribuciones

De la misma forma que cuantificamos la idea de que dos funciones estén "próximas" mediante la noción de convergencia uniforme, es posible establecer también una idea de proximidad entre distribuciones en términos secuenciales. Esto es lo que establece la siguiente definición.

Definición 4.28. Se dice que una sucesión de distribuciones $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ *converge débilmente* hacia la distribución T si para cada función test φ la sucesión numérica $\big\{\langle T_n, \varphi\rangle\big\}_{n=1}^\infty$ converge hacia $\langle T, \varphi\rangle$.

Observación 4.29. El adjetivo débil dado al tipo de convergencia antes definido nos indica ya que esta noción incluye las ideas de convergencia clásicas, aunque admite situaciones más generales. Por ejemplo:

i) Si una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformemente hacia f en los intervalos compactos de $\mathbb{R}$, o si simplemente converge puntualmente y está uniformemente acotada en los intervalos compactos, entonces $T_{f_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T_f$ débilmente.

ii) Si $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ es un sucesión regularizante, o simplemente una aproximación de la identidad, entonces, según muestra el teorema 1.43, $T_{\theta_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta$ débilmente. En otras palabras, la función generalizada δ, aunque no procede de una función clásica (no es una distribución regular, ver ejercicio 4.8), es sin embargo límite en el sentido débil de funciones clásicas.

4.4. Convolución de distribuciones

De manera natural, atendiendo a los resultados sobre funciones clásicas, surgen cuestiones como: ¿es posible definir un producto de convolución de distribuciones?, ¿se puede hablar del soporte de una distribución?, etc. Nos ocupamos ahora de estos asuntos.

Definición 4.30. Sea T una distribución. Se denomina *soporte de* T, denotado por $\operatorname{sop}(T)$, al conjunto de los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop}(\varphi) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ y $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$.

Observación 4.31. De forma equivalente, se puede definir el soporte de una distribución T como el complementario de la unión de sus abiertos de anulación; entendiendo que T se anula en un abierto V si $\langle T, \varphi\rangle = 0$ para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop}(\varphi) \subset V$. Evidentemente, el soporte de una distribución es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

Ejemplos 4.32.

i) Si T_f es una distribución regular entonces $\operatorname{sop}(T_f) = \operatorname{sop}(f)$ (nótese que si f se anula en casi todo punto de un abierto V, entonces para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop}(\varphi) \subset V$ se tiene que $f\varphi$ es igual a 0 en casi todo punto de $\mathbb{R}$). Como casos particulares: $\operatorname{sop}(H_a) = [a, \infty)$, $\operatorname{sop}(\log|x|) = \mathbb{R}$.

ii) $\operatorname{sop}\big(\text{v.p.}\frac{1}{x}\big) = \mathbb{R}$, $\operatorname{sop}\big(\text{p.f.}\frac{H}{x}\big) = [0, \infty)$, (ver ejercicios 4.6 y 4.7).

III) $\mathrm{sop}(\delta_a) = \{a\}$, lo mismo sucede con todas sus derivadas distribucionales.

Es más, aunque la demostración no es sencilla, resulta que si para una $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ se tiene que $\mathrm{sop}(T) = \{a\}$, entonces ha de ser

$$T = \sum_{k=0}^{n} c_k\, \delta_a^{(k)}\,, \qquad c_k \in \mathbb{C}\,.$$

Lema 4.33. Sean $S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Se tiene que:

I) $\mathrm{sop}(S + T) \subset \mathrm{sop}(S) \cup \mathrm{sop}(T)$,

II) $\mathrm{sop}(\alpha\, S) \subset \mathrm{sop}(S)$. De hecho, si $\alpha \neq 0$, entonces $\mathrm{sop}(\alpha\, S) = \mathrm{sop}(S)$.

Definición 4.34. Según el resultado anterior el conjunto de distribuciones de soporte compacto (i.e. acotado) es un subespacio vectorial de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ que se denota por $\mathscr{E}'(\mathbb{R})$.

Observación 4.35. Las distribuciones de soporte compacto se identifican con las aplicaciones complejas, lineales y continuas definidas en el espacio de las funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ (no necesariamente de soporte compacto), donde la convergencia de una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ se define como la convergencia uniforme de todas las sucesiones de derivadas $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$, $k \geq 0$, en los compactos de $\mathbb{R}$. Este espacio se denota habitualmente por $\mathscr{E}(\mathbb{R})$, lo que justifica la notación elegida para estas distribuciones.

Según veíamos en el primer capítulo (ver proposición 1.38), si $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ y al menos una de las dos funciones tiene soporte compacto, entonces está bien definido

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(x - t)\, dt\,.$$

El miembro de la derecha se puede expresar distribucionalmente como $\langle T_{f(t)}, \varphi(x - t)\rangle$ (aquí se usa t para nombrar la variable real, jugando x el papel de constante); esto sugiere las siguientes notación y definición.

Notación: Para una función f definida en $\mathbb{R}$ se denotará:

$$\check{f}(y) = f(-y)\,, \qquad\qquad (\tau_x f)(y) = f(y - x)\,.$$

En particular la convolución se reescribe según esta notación como

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(x - t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, (\tau_x \check{\varphi})(t)\, dt = \langle T_f, \tau_x \check{\varphi}\rangle\,.$$

Definición 4.36. Sean $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, o bien $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$. La convolución de T y φ es la función $T * \varphi$ definida por

$$(T * \varphi)(x) = \langle T_t, \varphi(x - t)\rangle = \langle T, \tau_x \check{\varphi}\rangle\,. \tag{4.3}$$

Observaciones 4.37.

I) En la definición anterior la expresión T_t se utiliza como se indicó más arriba, para significar que x es constante y t designa la variable real de la que dependen las funciones.

II) Es inmediato comprobar que si $\varphi(t)$ es una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ también lo es $\varphi(x - t)$, y puesto que $\mathrm{sop}\big(\varphi(x - t)\big) = x - \mathrm{sop}(\varphi)$, si $\varphi(t)$ es una función test también lo es $\varphi(x - t)$. En otras palabras, si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, tambien $\tau_x \check{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

III) A la vista de (4.3) y teniendo en cuenta que $(\check{\varphi})\check{} = \varphi$, la actuación de una distribución T sobre una función test φ se puede escribir en términos de la convolución como:

$$\langle T, \varphi\rangle = (T * \check{\varphi})(0)\,, \qquad \text{o también} \quad \langle T, \check{\varphi}\rangle = (T * \varphi)(0). \tag{4.4}$$

IV) Cuando $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ la fórmula (4.3) es clara, pero ¿cómo se debe interpretar $\langle T_f, \varphi\rangle$ para $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$, $\varphi \notin \mathscr{D}(\mathbb{R})$? Si pensamos en distribuciones regulares, tiene perfecto sentido definir

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathrm{sop}(f)} f(t)\, \varphi(t)\, dt = \int_{\mathrm{sop}(f)} f(t)\, \psi(t)\, \varphi(t)\, dt\,,$$

siendo ψ cualquier función que valga 1 en el compacto $\operatorname{sop}(f)$. Basta considerar entonces una función fija $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ que en $\operatorname{sop}(T)$ tome el valor 1 (por ejemplo, una función meseta), con lo que $\psi\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ para toda $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ y es consistente definir

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi\varphi \rangle ,$$

valor independiente de la función ψ elegida. No obstante, en la práctica no es necesario recurrir a este argumento al manejar las distribuciones usuales: por ejemplo,

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) , \qquad \langle T\chi_{[0,1]}, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(t) dt$$

son expresiones perfectamente definidas para cada $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$, aun cuando no tenga soporte compacto.

v) Una adaptación conveniente del teorema de derivación bajo el signo integral 1.17 (sustituyendo el paso al límite en las integrales por la continuidad de las distribuciones) permite concluir que $T * \varphi$ es una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. El siguiente teorema amplia información sobre este aspecto.

Teorema 4.38. Sean $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, o bien $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$

i) La convolución $T * \varphi$ es una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(T * \varphi)^{(k)} = T^{(k)} * \varphi = T * \varphi^{(k)} .$$

ii) Más aún: si $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, entonces $T * \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

El siguiente resultado establece el carácter asociativo de la convolución.

Proposición 4.39. Las siguientes convoluciones están bien definidas y verifican

$$T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi = (T * \psi) * \varphi$$

en cualquiera de estas dos situaciones:

i) Si $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ y $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

ii) Si $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ y $\psi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$.

Ejemplos 4.40.

i) Si $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, entonces $T_f * \varphi = f * \varphi$. En particular,

$$(H * \varphi)(x) = \langle H, \varphi(x-t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)\, \varphi(x-t)\, dt = \int_0^{\infty} \varphi(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \varphi(s)\, ds$$

es decir, $\Phi = H * \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ es la primitiva de φ que se anula en $-\infty$.

ii) Consideremos la distribución de Dirac $\delta \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ y una función $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$. Se tiene que

$$(\delta * \varphi)(x) = \langle \delta, \varphi(x-t) \rangle = \varphi(x-0) = \varphi(x) .$$

iii) Los apartados anteriores nos sirven para ilustrar la fórmula de derivación de la convolución dada en el teorema 4.38:

$$\Phi'(x) = (H * \varphi)'(x) = (H * \varphi')(x) = (H' * \varphi)(x) = (\delta * \varphi)(x) = \varphi(x) .$$

Observación 4.41. El producto de convolución de funciones clásicas no tiene elemento unidad (no existe u integrable en $\mathbb{R}$ tal que $u * f = f$ para cada función integrable en $\mathbb{R}$). El ejemplo 4.40.ii indica que, en cierto sentido, este papel lo juega la función generalizada δ. Esta consideración quedará aclarada más adelante.

Nuestro siguiente propósito es construir la convolución de distribuciones. Empecemos prestando atención a las fórmulas (4.4) y consideremos dos distribuciones S, T y $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Una manipulación formal siguiendo las propiedades indicadas, y que será necesario justificar, conduce a

$$\big(T * (S * \varphi)\big)(x) = \big\langle T_y, (S * \varphi)(x-y) \big\rangle = \big\langle T_y, \langle S_t, \varphi(x-y-t) \rangle \big\rangle;$$
$$\big(T * (S * \varphi)\big)(0) = \big\langle T_y, \langle S_t, \varphi(-y-t) \rangle \big\rangle .$$

Si se pretende que $T * (S * \varphi) = (T * S) * \varphi$, de manera puramente formal deberá ser

$$\big((T * S) * \varphi\big)(0) = \big\langle T_y, \langle S_t, \varphi(-y-t) \rangle \big\rangle ,$$

y también, según las fórmulas (4.4),

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \big((T * S) * \check{\varphi}\big)(0) = \big\langle T_y, \langle S_t, \varphi(y+t) \rangle \big\rangle .$$

Lema 4.42. Sean $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ y $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. La aplicación $L\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definida por

$$L\varphi = \big\langle T_y, \langle S_t, \varphi(y+t)\rangle\big\rangle \tag{4.5}$$

es una distribución.

Definición 4.43. Sean $S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, al menos una de ellas de soporte compacto. Se define la convolución de T y S como la única distribución $T * S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ que verifica

$$(T * S) * \varphi = T * (S * \varphi) \qquad \text{para cada } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,. \tag{4.6}$$

En particular

$$\langle T * S, \varphi\rangle = \big(T * (S * \check{\varphi})\big)(0) \qquad \text{para cada } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,; \tag{4.7}$$

o equivalentemente

$$\langle T * S, \varphi\rangle = \big\langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle\big\rangle \qquad \text{para cada } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,. \tag{4.8}$$

Observaciones 4.44.

I) Nótese que la caracterización funcional (4.6) tiene siempre pleno sentido: si $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$, entonces $\psi = S * \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ (ver 4.38.II); si es T la que tiene soporte compacto, entonces $\psi = S * \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$. En ambos casos está bien definido $T * (S * \varphi)$ en los términos de la definición 4.36:

$$\big(T * (S * \varphi)\big)(x) = (T * \psi)(x)\,, \qquad T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}), \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \quad \text{o} \quad T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}), \psi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})\,.$$

II) A la hora de calcular cómo actúa una distribución $T * S$ sobre una función test, las fórmulas (4.7) y (4.8) son suficientes, pues consisten en la aplicación particular de 4.6 a $\check{\varphi}$ en $x = 0$.

Propiedades 4.45. Sean $R, S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

I) Si al menos una de las distribuciones S, T es de soporte compacto, entonces

$$S * T = T * S\,.$$

II) Si al menos uno de los conjuntos $\operatorname{sop}(S)$ o $\operatorname{sop}(T)$ es compacto, entonces

$$\operatorname{sop}(S * T) \subset \operatorname{sop}(S) + \operatorname{sop}(T)\,.$$

III) Si al menos dos de las distribuciones R, S, T son de soporte compacto, entonces

$$(R * S) * T = R * (S * T)\,.$$

IV) Para cada entero no negativo n se tiene que $T^{(n)} = \delta^{(n)} * T$. En particular

$$\delta * T = T * \delta = T \quad \text{para toda } T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})\,.$$

V) Si al menos una de las distribuciones es de soporte compacto, entonces para cada entero no negativo n se tiene que

$$(S * T)^{(n)} = S^{(n)} * T = S * T^{(n)}\,.$$

Observación 4.46. Es posible que la convolución de dos distribuciones esté definida con condiciones menos restrictivas, pero entonces pueden fallar algunas de las propiedades anteriores (ver ejercicio 4.24).

Ejercicios

4.1 Sea φ una función test. Probar que:

I) Si f es una función compleja de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, entonces $f\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

II) Si $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de números complejos que converge hacia 0, entonces $\{a_n\varphi\}_{n=1}^\infty$ converge hacia 0 en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

4.2 Sean $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones test que convergen en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ hacia φ y ψ, respectivamente. Probar que $\{\varphi_n+\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $\varphi+\psi$ en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

4.3 Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones test que converge hacia 0 en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Si f es una función compleja de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, entonces $\{f\,\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge hacia 0 en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

4.4 Considérese una función f de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ que tome el valor 1 en el intervalo $[-1,1]$ (por ejemplo, una función meseta). Probar que las sucesiones de funciones $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas por

$$\varphi_n(x)=\frac{f(x)\operatorname{sen}(n\,x)}{n}; \qquad \psi_n(x)=\frac{1}{n}\,f\Big(\frac{x}{n}\Big),$$

son de elementos de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, convergen uniformemente hacia 0, pero no convergen en el sentido de las distribuciones.

4.5 Sea φ una función test y pongamos que $\operatorname{sop}(\varphi)\subseteq[-M,M]$ (es decir, $\varphi(x)=0$ si $|x|\geq M$). Dado un número natural n se considera la función g definida en $\mathbb{R}$ por

$$g(0)=\frac{1}{n!}\,\varphi^{(n)}(0); \qquad g(x)=\frac{1}{x^n}\Big(\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\Big), \quad x\neq 0$$

I) Probar que g es continua en $\mathbb{R}$.

II) Demostrar que existe una constante $C>0$ tal que

$$\sup\big\{|g(x)|:|x|\leq M\big\}\leq C\,\sup\big\{|\varphi^{(n)}(x)|:|x|\leq M\big\}.$$

4.6 Probar que para cada $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ existe y es finito el límite

$$\text{v.p.}\frac{1}{x}(\varphi)=Vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\Big).$$

Comprobar que la aplicación $\text{v.p.}\frac{1}{x}$ así definida en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ es una distribución, que se denomina *valor principal de Cauchy de* $1/x$ (en inglés se denota por $\text{p.v.}\frac{1}{x}$).

4.7 Sea H la función de Heaviside. Probar que para cada función test φ existe y es finito el límite

$$\begin{aligned}\text{p.f.}\frac{H}{x}(\varphi) &= Pf\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{H(x)}{x}\,\varphi(x)\,dx+\varphi(0)\ln(\varepsilon)\Big)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\varphi(0)\ln(\varepsilon)\Big).\end{aligned}$$

Comprobar que la aplicación $\text{p.f.}\frac{H}{x}$ así definida en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ es una distribución.

Nota: La notación $\text{p.f.}\frac{H}{x}$ se debe a Hadamard, donde la abreviatura p.f. hace referencia a *parte finita* (igual en francés, de *partie finie*; f.p. en inglés, por *finite part*). Al igual que el valor principal esta es una de las denominadas *pseudofunciones*, que son distribuciones (no regulares) asociadas a funciones no localmente integrables, vagamente hablando, recolectando la *parte finita* de una integral divergente, que se denota $Pf\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$.

Históricamente, las pseudofunciones aparecen en el estudio de derivadas distribucionales, para dar sentido preciso, por ejemplo, a la relación $\big(\log|x|\big)'=x^{-1}\notin\mathscr{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, o $(x^{-1})'=-x^{-2}$, etc. (ver ejercicios 4.12 y 4.13).

4.8 Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}$ y considérese una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ tales que:

1. $\operatorname{sop}(\varphi_n)\subset\big[-1/n,1/n\big]$ para todo $n\in\mathbb{N}$.
2. $0\leq\varphi_n(x)\leq 1$ para cada $x\in\mathbb{R}$ y cada $n\in\mathbb{N}$
3. $\varphi_n(0)=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Aplíquese el teorema de la convergencia dominada a la sucesión $\{f\,\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ y conclúyase que la distribución δ no es regular.

Mediante traslaciones convenientes dedúzcase lo mismo para δ_a, $a\in\mathbb{R}$.

4.9

I) Sea $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Probar que $\varphi(0) = 0$ si, y sólo si, existe $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tal que

$$\varphi(x) = x\,\psi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

II) Sea θ un elemento fijo de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $\theta(0) = 1$. Demostrar que para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ existe una única función $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tal que

$$\varphi(x) = \varphi(0)\,\theta(x) + x\,\psi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

III) Sea T una distribución tal que $x\,T = 0$. Probar que existe una constante compleja a tal que

$$T = a\,\delta\,.$$

4.10 Sea f una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. Dado $a \in \mathbb{R}$, determinar la distribución $f\,\delta_a$ y sus derivadas sucesivas.

4.11 Determinar las distribuciones:

I) $x\,\delta'$ II) $x^2\,\delta'$ III) $x\,\delta^{(m)}$.

4.12 La función $\log|x|$ (definida en $x = 0$ como se quiera), es localmente integrable. Demostrar que la derivada de $\log|x|$ en el sentido de las distribuciones es $\text{v.p.}\dfrac{1}{x}$.

4.13 Determinar la derivada de la distribución $\text{v.p.}\dfrac{1}{x}$.

4.14 Calcular la derivada en el sentido de las distribuciones de las funciones:

I) $f(x) = \cos(x)\chi_{[0,\infty)}$ II) $f(x) = |x|$ III) $f(x) = |\text{sen}(x)|$ IV) $f(x) = |\cos(x)|$.

4.15 Calcular las derivadas de orden 1 y 2 en el sentido de las distribuciones de las funciones:

I) $f(x) = |x|\,\text{sen}(x)$ II) $f(x) = |x|\cos(x)$.

4.16 Sea T una distribución. Calcular en el sentido de las distribuciones:

I) $\Big(\dfrac{d}{dx} - \lambda\Big)\big(e^{\lambda x}T\big)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ II) $\Big(\dfrac{d^2}{dx^2} - w^2\Big)\Big(\dfrac{\text{sen}(w\,x)}{w}T\Big)$, $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$.

4.17 Sean f, g funciones de clase $\mathscr{C}^2$ en $\mathbb{R}$. Se supone que:

1. Existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que

$$f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) = g''(x) + a\,g'(x) + b\,g(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}\,.$$

2. $f(0) = g(0)$ y $f'(0) - g'(0) = 1$.

Se considera la función $h(x) = f(x)\,\chi_{(-\infty,0]}(x) + g(x)\,\chi_{(0,\infty)}(x)$. Calcular

$$(T_h)'' + a\,(T_h)' + b\,T_h.$$

4.18 Sean $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ y $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

I) Probar que si φT es la distribución idénticamente nula, entonces

$$\langle T, \varphi\rangle = 0.$$

Sugerencia: Considérese $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ que tome el valor 1 en $\text{sop}(\varphi)$.

II) Considerando $T = \delta'$ y una función test φ igual a 1 en un entorno de $x_0 = 0$ comprobar que el recíproco no es cierto.

4.19 Sea $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de distribuciones que converge débilmente hacia la distribución T. Probar que para cada natural k la sucesión $\{T_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente hacia la distribución $T^{(k)}$.

4.20 Demostrar que para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)-\varphi(-h)}{2\,h} = \varphi'(0)\,.$$

Deducir que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos que converge hacia 0, entonces la sucesión de distribuciones $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, definida por

$$T_n = \frac{1}{2\,a_n}\big(\delta_{a_n} - \delta_{-a_n}\big),$$

converge débilmente

4.21 Para cada $n \in \mathbb{N}$ se consideran las funciones definidas en $\mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = n^3 x\, e^{-n^2x^2}\,; \qquad\qquad g_n(x) = \frac{n}{2}\, e^{-n^2x^2}.$$

I) Probar que $\{T_{g_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente hacia la distribución $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,\delta$.

II) Probar que la sucesión $\{T_{f_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente y determinar su límite.

4.22 Sean $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ y $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$x^n(S*T) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^kS)*(x^{n-k}T)\,.$$

4.23 Sean $p,q,m,n \in \mathbb{N}$. Calcular

$$\big(x^p\delta^{(q)}\big) * \big(x^m\delta^{(n)}\big)\,.$$

4.24 Denotemos por $\mathbf{1}$ a la distribución regular asociada a la función constante idénticamente igual a 1. Como es habitual H y δ denotarán a las distribuciones de Heaviside y Dirac, respectivamente.

I) Probar que $\delta' * H = \delta$ y que $\mathbf{1} * \delta' = 0\,.$

II) Comprobar que la propiedad asociativa falla (dos de las distribuciones no tienen soporte compacto)

$$\mathbf{1} * (\delta' * H) \neq (\mathbf{1} * \delta') * H\,.$$

4.25

I) Calcular en $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}}\Big(1-\frac{x^2}{n}\Big)^{n^3} = \lim_{n\to\infty} P_n(x)\,.$$

II) Deducir que toda distribución de soporte compacto es límite débil de una sucesión de polinomios. *Sugerencia*: Si $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ considérese $T * P_n$.

4.26

I) Sean $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ y $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Probar que para cada $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$e^{ax}(S*T) = \big(e^{ax}S\big) * \big(e^{ax}T\big)\,.$$

II) Dados $b,c,d \in \mathbb{C}$ se define el operador diferencial $P(D)$ por $P(D)f = b\,f'' + c\,f' + d$. Encontrar un operador diferencial $Q(D)$ tal que

$$e^{ax}P(D)T = Q(D)(e^{ax}T) \qquad \text{para toda } T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})\,.$$

III) Supongamos que $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ satisface $P(D)E = \delta$. Encontrar un operador diferencial $Q(D)$ tal que

$$Q(D)(e^{ax}E) = \delta\,.$$

Capítulo 5

Transformación de Laplace de distribuciones

Para algunas funciones generalizadas es posible definir la transformada de Laplace, que verifica propiedades análogas a las del caso de funciones clásicas. Por supuesto, lo que se pretende es generalizar ese otro caso; concretamente, para una distribución regular T_f, con $f \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, se debe verificar

$$\mathfrak{L}(T_f) = \mathfrak{L}f.$$

Como se puede observar en los tratados sobre *Teoría de Distribuciones*, materia que se clasifica dentro del *Análisis Funcional*, el marco más general para tratar estos problemas es el de las *distribuciones temperadas*, que representa, asimismo, el contexto adecuado para tratar la transformación de Fourier de distribuciones.

Ahora bien, es posible realizar un tratamiento mediante técnicas elementales (las del denominado *Cálculo Avanzado*), que sin proporcionar toda la potencia del Análisis Funcional, son suficientes para el estudio de una amplia gama de casos que incluyen todos los de aplicación habitual en la Física y la Ingeniería.

Este capítulo se enfoca desde ese punto de vista elemental, sin renunciar a presentar otros aspectos más sutiles cuya justificación pueda quedar fuera del alcance de estas notas.

5.1. La ecuación $T^{(n)} = 0$

El teorema fundamental del Cálculo (la regla de Barrow, si se prefiere) muestra que toda función f de clase $\mathscr{C}^n$ en $\mathbb{R}$ y con derivada n-ésima idénticamente nula es un polinomio.

En esta sección nos proponemos demostrar que las distribuciones cuya derivada n-ésima es nula son distribuciones regulares asociadas a polinomios de grado menor que n. En otras palabras, la ecuación $T^{(n)} = 0$ planteada en el espacio de las funciones generalizadas tiene sus soluciones en el conjunto de las funciones clásicas.

Lema 5.1. Sean k, n números enteros tales que $n > k \geq 0$. Para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi^{(n)}(x)\, dx = 0.$$

Proposición 5.2. Sean n un número natural y $P(x) = a_0 + a_1\, x + \ldots + a_{n-1}\, x^{n-1}$ un polinomio con coeficientes complejos de grado menor que n. Entonces

$$(T_P)^{(n)} = 0.$$

Lema 5.3. Una función $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ es la derivada de otra función test si, y sólo si,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 0.$$

Lema 5.4. Sea $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\, dx = 1$$

Si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, entonces existe $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tal que

$$\varphi(x) = \theta(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt + \psi'(x), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Proposición 5.5. Sea T una distribución tal que $T' = 0$. Entonces existe una constante compleja C tal que T es la distribución regular T_C.

Teorema 5.6. Sean n un número natural y $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Los asertos siguientes son equivalentes:

a) $T^{(n)} = 0$.

b) Existe un polinomio P con coeficientes complejos y de grado menor que n, tal que $T = T_P$.

5.2. Transformación de Laplace en $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$

Como se indicaba en la introducción, se pretende definir una transformada de Laplace para funciones generalizadas que contemple el caso clásico. Si en aquella situación nos restringíamos al caso de funciones f nulas para $t < 0$, es decir, con $\mathrm{sop}(f) \subset [0, \infty)$, es lógico contemplar ahora distribuciones con soporte contenido en el intervalo $[0, \infty)$, que se denota también por $\mathbb{R}_+$.

Es fácil comprobar que el conjunto de distribuciones T con $\mathrm{sop}(T) \subset \mathbb{R}_+$ es un subespacio de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ que denotaremos $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ (ver ejercicio 5.11).

El siguiente resultado, consecuencia del teorema 5.6, es esencial en la construcción que se desarrollará posteriormente.

Proposición 5.7. Sean f, g dos funciones continuas en $\mathbb{R}$, con soporte contenido en $[0, \infty)$ y que admiten transformada de Laplace en el sentido clásico (p.e. de orden exponencial). Se supone que existen números enteros no negativos n y m tales que

$$(T_f)^{(n)} = (T_g)^{(m)}.$$

Entonces, para cada número complejo z con $\mathrm{Re}(z) > \max\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\}$ se tiene que

$$z^n \mathfrak{L}f(z) = z^m \mathfrak{L}g(z).$$

Definición 5.8. Se dice que una distribución T admite transformada de Laplace si existen una función f continua en $\mathbb{R}$, con $\mathrm{sop}(f) \subset [0, \infty)$ y que admite transformada de Laplace en el sentido clásico, y un número entero no negativo n tal que

$$T = \left(T_f\right)^{(n)}.$$

La función $\mathfrak{L}T$ definida por

$$\mathfrak{L}T(z) = z^n \mathfrak{L}f(z), \qquad \mathrm{Re}(z) > \sigma_a(f),$$

es la denominada *transformada de Laplace* de T.

Observaciones 5.9.

i) La proposición 5.7 muestra que la definición anterior es coherente, es decir, dos representaciones distintas $T = (T_f)^{(n)} = (T_g)^{(m)}$ dan lugar a la misma transformada $\mathfrak{L}T$.

ii) En general, para cada $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ se tiene que $\mathrm{sop}(T') \subset \mathrm{sop}(T)$, por tanto,

$$\mathrm{sop}\left((T_f)^{(n)}\right) \subset \mathrm{sop}(T_f) = \mathrm{sop}(f),$$

lo que muestra que, aunque no se ha mencionado explícitamente en la defincición 5.8, la transformada de Laplace de distribuciones se contempla sólo para aquellas de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Ejemplos 5.10.

i) Consideremos la función definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = x\,\chi_{[0,\infty)}(x)$, esto es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Obviamente f es continua en $\mathbb{R}$, $\mathrm{sop}(f) = [0, \infty)$ y su transformada de Laplace en el sentido ordinario es $\mathfrak{L}f(z) = {}^1\!/_{z^2}$. Es inmediato también que H, la función de Heaviside, es la derivada distribucional de f, y por tanto,

$$\delta = H' = (T_f)''.$$

Luego H y δ admiten transformada de Laplace y

$$\mathfrak{L}H(z) = z\,\mathfrak{L}f(z) = \frac{1}{z}, \qquad \mathfrak{L}\delta(z) = z\,\mathfrak{L}H(z) = z^2\mathfrak{L}f(z) = 1.$$

La primera relación lo es en el sentido ordinario (véase el ejercicio 2.4), no así la segunda; nótese, por ejemplo, que no se verifica la anulación en el infinito de la transformada, como sucede para funciones clásicas según indica la proposición 2.10.

II) Sea g una función definida en $\mathbb{R}$, nula para $x < 0$, que admite transformada de Laplace y continua a trozos, explícitamente: g es continua e integrable en cada intervalo (x_n, x_{n+1}), siendo

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Entonces, en virtud del teorema Fundamental del Cálculo la función f definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = \int_{0}^{x} g(t)\,dt$$

es continua en $\mathbb{R}$, nula para $x \leq 0$ y obviamente

$$T_g = (T_f)'$$

por lo que

$$\mathfrak{L}T_g(z) = z\,\mathfrak{L}T_f(z) = z\,\mathfrak{L}f(z) - f(0) = \mathfrak{L}g(z)\,.$$

Compárese con la proposición 2.12 y la observación 2.13: la definición distribucional de transformada de Laplace que hemos dado coincide con la clásica, al menos, para las funciones habituales, las continuas a trozos.

Observación 5.11. La situación descrita en el ejemplo 5.10.II cubre la práctica totalidad de los problemas que aparecen en el tratamiento de las ecuaciones habituales de la Física Matemática, pero es natural preguntarse porqué en la definición 5.8 se ha exigido la continuidad de f en lugar de la condición más débil de integrabilidad local. Pues bien, sucede que para una función g localmente integrable en $\mathbb{R}$ (no necesariamente continua a trozos) y nula para $x < 0$, el integrador

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = \int_{0}^{x} g(t)\,dt$$

es una función continua en $\mathbb{R}$, aunque no está claro que $f' = g$ en el sentido clásico. No obstante (aunque la justificación queda fuera del alcance de estas notas) sigue siendo cierto que $T_g = (T_f)'$ pues f' está definida y es igual a g salvo en un conjunto de medida nula. Este supuesto se puede abordar también en los términos de la definición 5.8, aumentando un grado de regularidad, pues la primitiva h de f, $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, sí es una función derivable en todo punto, con $h' = f$, por tanto

$$T_g = (T_f)' = (T_h)''$$

y, por definición, se tiene que

$$\mathfrak{L}T_g(z) = z^2\,\mathfrak{L}T_h(z) = z^2\mathfrak{L}h(z) = z\,\mathfrak{L}f(z)\,.$$

Nótese que este razonamiento está en total sintonía con lo expuesto en la proposición 2.14.

Notación: En lo que sigue denotaremos por $\mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ al conjunto de las distribuciones con soporte en $[0,\infty)$ que admiten transformada de Laplace en el sentido de la definición 5.8.

Propiedades 5.12. Sean $S, T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$.

I) La transformada de Laplace es lineal; es decir, si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha\,S + \beta\,T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ y

$$\mathfrak{L}(\alpha\,S + \beta\,T) = \alpha\,\mathfrak{L}S + \beta\,\mathfrak{L}T\,.$$

II) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $T^{(n)} \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ y

$$\mathfrak{L}(T^{(n)}) = z^n\mathfrak{L}T\,.$$

En particular

$$\mathfrak{L}(\delta^{(n)})(z) = z^n\,.$$

III) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x^nT \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ y

$$\mathfrak{L}(x^nT) = (-1)^n(\mathfrak{L}T)^{(n)}\,.$$

IV) Para cada número complejo z_0 se tiene que $e^{z_0x}T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ y

$$\mathfrak{L}(e^{z_0x}T)(z) = \mathfrak{L}T(z - z_0)\,.$$

Las propiedades anteriores generalizan las correspondientes en el sentido clásico. Por ejemplo, la última establece que la Transformada de Laplace convierte modulaciones en traslaciones. Para el "recíproco", más concretamente para la generalización de la propiedad 2.9.III, necesitamos dar sentido a la expresión $T(x-a)$ cuando $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ no es una función clásica. Para ello observemos primero que si $T = T_f$ es una distribución regular, entonces dado $a \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x+a)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\tau_{-a}\varphi(x)\,dx\,.$$

Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 5.13. Sea $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Si $a \in \mathbb{R}$ entonces la aplicación definida por

$$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longmapsto \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle$$

es una distribución que se denota por $\tau_a T$, la *trasladada por a* de T. Abusando de la notación, y siguiendo la pauta de las funciones clásicas, también se escribe $\tau_a T = T(x-a)$.

Proposición 5.14. Sean $T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$. Para cada número real $a > 0$ se tiene que $\tau_a T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ y

$$\mathfrak{L}(\tau_a T)(z) = e^{-az}\mathfrak{L}T(z)\,,$$

o escrito de otra forma

$$\mathfrak{L}\big(T(x-a)\big) = e^{-az}\mathfrak{L}T\,,$$

Ejemplo 5.15. Puesto que $\delta_a^{(n)} = \tau_a \delta^{(n)}$ para todo entero $n \geq 0$, es inmediato de los resultados anteriores que para $a > 0$ se tiene que

$$\mathfrak{L}\big(\delta_a^{(n)}\big)(z) = e^{-az}z^n.$$

El siguiente resultado, recíproco de la proposición 5.7 establece la invertibilidad de la transformada de Lapalce en $\mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 5.16 (Inyectividad de la transformada de Laplace). Sean $S\,,T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$, digamos que $S = (T_f)^{(n)}$ y $T = (T_g)^{(m)}$, y tales que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\mathfrak{L}S(z) = z^n\mathfrak{L}f(z) = z^m\mathfrak{L}g(z) = \mathfrak{L}T(z)$$

para cada z en el semiplano $\big\{\operatorname{Re}(z) > \alpha\big\}$, entonces $S = T$.

5.3. El álgebra de convolución $\mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$. Aplicación a las E.D.O.

Ya hemos tratado el problema general de la convolución de distribuciones al final del capítulo anterior. Lo que abordamos ahora es el tratamiento particular de aquellas que admiten transformada de Laplace y cómo se han interpretar las definiciones y propiedades que se han presentado en la sección anterior. Aunque es posible definir la convolución de dos de estas distribuciones al estilo de como allí se hizo, aunque no tengan soporte compacto (ver ejercicio 5.11), desarrollamos ahora un tratamiento equivalente y alternativo, en consonancia con la construcción realizada en la sección precedente.

Para empezar, recordemos que siempre es posible considerar el producto de convolución de dos funciones f, g, ambas con soporte contenido en $[0,\infty)$ y localmente integrables, si una de ellas es localmente acotada (ver proposición 2.16). Estas condiciones vienen garantizadas cuando las funciones son continuas en $\mathbb{R}$ y nulas en $(-\infty, 0]$.

Lema 5.17. Sean f_1, f_2, g_1, g_2 funciones complejas definidas en $\mathbb{R}$ y n_1, n_2, m_1, m_2 números enteros no negativos. Se supone que:

1. f_1, f_2, g_1, g_2 son continuas en $\mathbb{R}$, nulas en $(-\infty, 0]$ y admiten todas ellas transformada de Laplace.
2. $(T_{f_1})^{(n_1)} = (T_{f_2})^{(n_2)}$ y $(T_{g_1})^{(m_1)} = (T_{g_2})^{(m_2)}$.

Entonces

$$(T_{f_1 * g_1})^{(n_1+m_1)} = (T_{f_2 * g_2})^{(n_2+m_2)}.$$

Definición 5.18. Sean $S, T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$, representadas en términos de las funciones continuas f, g por $T = (T_f)^{(n)}$, $S = (T_g)^{(m)}$. La distribución

$$(T_{f*g})^{(n+m)}$$

recibe el nombre de *convolución* de las distribuciones S y T y se representa por $S * T$.

Observaciones 5.19.

I) Es fácil comprobar para funciones suficientemente derivables (esto es, cuando también $T = (T_f)^{(n)}$ y $S = (T_g)^{(m)}$ son distribuciones regulares) que la definición anterior es equivalente a la 4.43 y, a su vez, ambas coinciden con la definición para funciones usuales (ver ejercicios 5.10 y 5.11).

II) Además se verifican propiedades similares a las enunciadas en 4.45; de hecho, la equivalencia de las dos definiciones viene dada por la relación $(S * T)^{(n)} = S^{(n)} * T = S * T^{(n)}$, que también es válida cuando $S, T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$, aunque ninguna de las distribuciones tenga soporte compacto. A continuación se presenta información detallada de este y otros aspectos.

Propiedades 5.20. Sean $R, S, T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$.

I) Si $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces $(\alpha S) * T = \alpha (S * T) = T * (\alpha S)$. En particular, $S * T = T * S$.

II) $(R * S) * T = R * (S * T)$.

III) $R * (S + T) = R * S + R * T$.

IV) Para cada entero no negativo n se tiene que

$$(S * T)^{(n)} = S^{(n)} * T = S * T^{(n)}.$$

En particular $T^{(n)} = \delta^{(n)} * T$ y $\delta * T = T$.

V) Para cada $a > 0$ se tiene que $\tau_a(S * T) = (\tau_a S) * T = S * (\tau_a T)$.

VI) $S * T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ y se tiene que

$$\mathfrak{L}(S * T) = \mathfrak{L}S \cdot \mathfrak{L}T.$$

Observación 5.21. En Matemáticas se denomina *álgebra* a la estructura $\mathcal{A}$ que consiste en un espacio vectorial dotado, además de la suma de vectores '$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$' y producto de escalares por vectores '$\alpha\, \boldsymbol{x}$', de una operación '$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$' que es asociativa y distributiva respecto de la suma '$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$'. Si esta nueva operación '$\cdot$' es conmutativa, tiene elemento neutro, etc., se dice que el álgebra $\mathcal{A}$ es conmutativa, tiene elemento unidad, etc.

Por ejemplo, el conjunto $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes complejos tiene estructura vectorial para las operaciones usuales de suma de matrices y producto de un escalar por una matriz, y también se puede considerar el producto de matrices, resultando un álgebra no conmutativa con elemento unidad (la matriz diagonal I_n).

El resultado anterior muestra que $\mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ que, dotado del producto de convolución '$*$', tiene estructura de álgebra conmutativa con elemento unidad, que es δ.

Lema 5.22. Sean $S, T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$. A lo sumo existe un $X \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$T * X = S.$$

Definición 5.23. Sea $T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$. Se dice que T admite *inverso* si existe $S \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$T * S = \delta.$$

El inverso de T, si existe, es único y se denota por T^{-1}.

Definición 5.24. Sean $S, T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$. Una expresión del tipo

$$T * X = S \tag{5.1}$$

en la incógnita $X \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ se denomina *ecuación de convolución*. Si existe, la solución de la ecuación

$$T * X = \delta \tag{5.2}$$

se denomina *solución fundamental* o *elemental* de la ecuación (5.1).

Proposición 5.25. Sea $T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$. Si E es solución elemental de la ecuación (5.1), esto es, $T * E = \delta$, entonces para cada $S \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ la ecuación $T * X = S$ tiene solución, que viene dada por

$$X = E * S.$$

5.3.1. Aplicación al estudio de operadores diferenciales lineales

Consideremos una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$f^{(m)}(x) + c_{m-1}\, f^{(m-1)}(x) + c_{m-2}\, f^{(m-2)}(x) + \ldots + c_1\, f'(x) + c_0\, f(x) = g(x) \tag{5.3}$$

en la incógnita $f(x)$, sienco $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ y g una función compleja definida en un intervalo, que se supone conocida. Es usual representar la ecuación (5.3) en forma de *operador*:

$$P(D)f = g\,, \qquad \text{siendo} \quad P(z) = z^m + c_{m-1}\, z^{m-1} + \ldots + c_1\, z + c_0, \tag{5.4}$$

haciendo referencia a que el operador diferencial viene dado como el polinomio P en la variable D, que representa el operador de derivación $Df = f'$, $D^2 f = f''$, etc.

En general, para funciones definidas en $\mathbb{R}^n$, mediante los operadores

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,, \qquad D_j D_i f = D_{ji} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\,, \qquad \text{etc.}$$

la mayoría de los operadores (lineales) diferenciales de las ecuaciones de la Física Matemática habituales, tales como el Laplaciano, el D'Alambertiano, etc., se representan de esta forma, como polinomios en las variables D_i; por ejemplo: el laplaciano de una función de dos variables se representa mediante el polinomio $P(x, y) = x^2 + y^2$:

$$\Delta f = D_{11} f + D_{22} f = P(D) f\,.$$

Si además de la ecuación (5.3) se consideran valores iniciales

$$f(0) = y_0, \quad f'(0) = y_1, \quad \ldots \quad f^{(m-1)}(0) = y_{m-1} \tag{5.5}$$

es decir, un *problema de Cauchy* (mediante traslaciones siempre podemos suponer que el instante inicial corresponde a $x_0 = 0$), es conocido que, bajo las condiciones adecuadas de regularidad sobre g, existe una única solución f del problema $\{(5.3),(5.5)\}$, además, ya hemos visto en el capítulo 2 que la transformada de Laplace es una herramienta muy eficiente en el cálculo de dichas soluciones. Otra cuestión de índole diferente es el caso en el que el término independiente no es una función clásica; las herramientas de convolución proporcionan un formalismo muy útil en este sentido.

Definición 5.26. Si $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ es tal que

$$P(D)E = \delta$$

se dice que E es una *solución elemental* o *fundamental* de $P(D)$, o también una *función de Green* para el operador $P(D)$.

Lema 5.27. Sea $P(D)$ un operador diferencial dado según (5.4). La distribución $P(D)\delta$ es invertible en $\mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$. Además $\big(P(D)\delta\big)^{-1}$, que es la única solución elemental de $P(D)$ en $\mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$, viene dada por la distribución regular Hf, donde f es la única solución del problema de Cauchy homogéneo

$$\begin{cases} P(D)f = 0\,; \\ f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(m-2)}(0) = 0, \quad f^{(m-1)}(0) = 1\,. \end{cases}$$

Observación 5.28. Sean $S, T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ y $P(D)$ un operador diferencial lineal con coeficientes constantes. De las relaciones

$$(S * T)^{(k)} = S^{(k)} * T = S * T^{(k)}\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

se sigue inmediatamente que

$$P(D)(S * T) = \big(P(D)S\big) * T = S * \big(P(D)T\big)\,.$$

Por otra parte, en virtud de las propiedades de linealidad y 5.12.II, se deduce que

$$\mathfrak{L}\big(P(D)T\big)(z) = P(z)\, \mathfrak{L}T(z)\,.$$

Proposición 5.29. Sea $P(D)$ un operador diferencial con coeficientes constantes

$$P(D) = D^m + c_{m-1}\, D^{m-1} + \ldots + c_1\, D + c_0\,.$$

Para cada $S \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ la ecuación

$$P(D)X = S$$

admite una única solución $T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$. Dicha solución viene dada por

$$T = E * S$$

donde E es la solución fundamental de $P(D)$. Además, la solución T es de clase $\mathscr{C}^{m-2}$ en $\mathbb{R}$.

5.3.2. Revisión de los sistemas LTC

Volviendo al problema de los sistemas LTC descritos por ecuaciones diferenciales, la ecuación (2.12) se puede reescribir, en términos de operadores lineales, como

$$Q(D)y = P(D)u\,.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de reposo inicial, al tomar transformadas de Laplace se sigue que

$$Q(z)\,\mathfrak{L}y(z) = P(z)\,\mathfrak{L}u(z)\,,$$

y si se toma como entrada $u = \delta$, que en este contexto se denomina también *impulso unidad*, habida cuenta que $\mathfrak{L}\delta = 1$, se tiene que para la *respuesta al impulso* h su transformada $T(z) = \mathfrak{L}h(z)$, que es la denominada *función de transferencia*, verifica que

$$Q(z)\,\mathfrak{L}h(z) = P(z)\,, \qquad \text{es decir,}\;\; T(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\,,$$

y en general, para cualquier entrada u y correspondiente salida y, las correspondientes transformadas de Laplace verifican

$$\mathfrak{L}y(z) = T(z)\,\mathfrak{L}u(z) = \mathfrak{L}h(z)\,\mathfrak{L}u(z) = \mathfrak{L}(h*u)(z)\,;$$

como se anunció en el segundo capítulo esto permite obtener la salida, invirtiendo la transformada

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\big(\mathfrak{L}(h*u)\big)(t) = (h*u)(t)\,.$$

Ejercicios

5.1 Se considera la función

$$f(x) = \ln(x)\,\chi_{(0,\infty)}(x)\,.$$

I) Probar que T_f admite transformada de Laplace en el sentido de la definición 5.8 y que

$$\mathfrak{L}T_f(z) = -\frac{\log(z)}{z} - \frac{\gamma}{z} \qquad \text{(el logaritmo en la rama principal)},$$

donde γ es la denominada *constante de Euler*:

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \ln(m)\right) = -\int_0^\infty e^{-x}\ln(x)\,dx \;\simeq\; 0{,}5772156649...$$

Indicación: Si $z>0$ hágese en la integral de Laplace $\int_0^\infty e^{-zt}\ln(t)\,dt$ el cambio de variable $z\,t = x$.

II) Comprobar que $\text{p.f.}\dfrac{H}{x}$ es la derivada distribucional de T_f y deducir el valor $\mathfrak{L}\Big(\text{p.f.}\dfrac{H}{x}\Big)$.

5.2 Sea E la función definida por

$$E(x) = [x]\chi_{[0,\infty)}(x)\,,$$

esto es: $E(x)$ es la *parte entera* de x para $x \geq 0$ y $E(x) = 0$ si $x < 0$.

I) Comprobar que T_E admite transformada de Laplace y calcularla.

II) Determinar la derivada distribucional de T_E y calcular $\mathfrak{L}T_{E'}$ y $\mathfrak{L}((T_E)')$.

5.3 Para $x \in \mathbb{R}$ se define la *parte fraccionaria* de x como $\{x\} = x - [x]$. Sea F la función definida por

$$F(x) = \{x\}\chi_{(0,\infty)}(x)\,,$$

es decir: $F(x) = x - n$ si $n \leq x < n+1$, $n = 0,1,2,\dots$ y $F(x) = 0$ si $x < 0$.

I) Comprobar que T_F admite transformada de Laplace y calcularla.

II) Determinar la derivada distribucional de T_F y calcular $\mathfrak{L}((T_F)')$.

5.4 Demostrar que la distribución $T = \sum_{n=0}^{\infty}\delta_n$ admite transformada de Laplace y calcular $\mathfrak{L}T$.

5.5 Sean $S, T \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$. Probar que si S y T son invertibles también lo es $S*T$.

5.6 Calcular las inversas en $\mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$, si existen, de las siguientes distribuciones:

i) H (la función de Heaviside)

ii) δ'

iii) $\delta' - a\,\delta\,, \ \ a \in \mathbb{C}$

iv) $\delta''' - 2\,\delta'' + \delta' - 2\,\delta$

v) $\delta' + H$

vi) $\delta(x) + 2\,w\,H(x)\cos(w\,x)\,, \ \ w \in \mathbb{C}$

vii) $H(x)\,E(x+1)$ (E es la función parte entera).

5.7 Supuesto que $S \in \mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ es conocida, resolver en $\mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ la ecuación de convolución

$$H(x)\cos(x) * X = S\,.$$

5.8 Resolver en $\mathscr{D}'_{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}_+)$ el sistema de ecuaciones de convolución siguiente

$$\begin{cases} T * T + S * S \ = 2\,H(x)\,x\cos(x) \\ \qquad\quad T * S = H(x)\,\mathrm{sen}(x) \end{cases}$$

5.9 Revisar los ejercicios (problemas de Cauchy) 2.14.iii y 2.14.v en el contexto de la transformada de Laplace de distribuciones.

Analizar asimismo la regularidad de las soluciones en relación con la del término no homogéneo g (escritas las ecuaciones en la forma $P(D)f = g$).

5.10 Sean f, g dos funciones complejas definidas y continuas en $\mathbb{R}$, ambas nulas en $(-\infty, 0]$ y de orden exponencial. Probar que, aunque ni f ni g tengan soporte compacto, es posible definir $T_f * T_g$ en el sentido de la definición 4.43 por la fórmula (4.8). Además, se verifica que

$$T_f * T_g = T_{f*g}.$$

5.11 Probar que si $S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ está bien definida $S * T$ por

$$\langle S * T, \varphi\rangle = \big\langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\big\rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,,$$

aun cuando ni S ni T tengan soporte compacto, y que $S * T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$.

5.12 Sea $P(D)$ un operador diferencial con coeficientes constantes:

$$P(D)f = a_0 f + a_1 f' + a_2 f'' + \ldots + f^{(n)}.$$

i) Sean $z_1, z_2, \ldots z_n \in \mathbb{C}$ las raíces del polinomio $P(z)$. Utilizando la representación

$$P(D) = \big(D - z_1\big)\big(D - z_2\big)\cdots\big(D - z_n\big),$$

probar que

$$\big(P(D)\delta\big)^{-1} = H\,e^{z_1 x} * H\,e^{z_2 x} * \cdots * H\,e^{z_n x}.$$

Deducir que todo operador diferencial no nulo con coeficientes constantes admite una solución fundamental.

ii) Encontrar una solución fundamental del operador D^n, es decir, determinar $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tal que

$$E^{(n)} = \delta\,.$$

iii) Probar que toda solución de la ecuación homogénea

$$P(D)f = 0$$

en el sentido de las distribuciones es una solución clásica.

Capítulo 6

Complementos de la teoría de distribuciones

Este tema está destinado al lector que, habiendo adquirido la suficiente destreza en el manejo de los conceptos presentados en los dos capítulos anteriores, desee profundizar en la materia. Se contemplan aquí diversos aspectos, que podríamos calificar de avanzados, sobre funciones generalizadas, cuya justificación teórica requiere a menudo de técnicas de Análisis Funcional que quedan fuera de los prerrequisitos de la asignatura (*espacios vectoriales topológicos*, *teoría de la medida*, etc.).

No obstante, si se obvian las demostraciones de los teoremas, la mayoría de los resultados tiene una lectura sencilla y una interpretación evidente. En particular, la transformación de Fourier de distribuciones tiene, operacionalmente hablando, el mismo aspecto que la transformación de funciones clásicas.

6.1. Funciones de decrecimiento rápido. El espacio de Schwartz

Definición 6.1. Sea f una función compleja definida y de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. Se dice que f es de *decrecimiento rápido* si para cada par de números enteros no negativos m, k se verifica que

$$\lim_{x\to\infty} x^k f^{(m)}(x) = 0\,; \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^k f^{(m)}(x) = 0\,. \tag{6.1}$$

Observación 6.2. Las condiciones (6.1), que significan que f y todas sus derivadas se anulan en el infinito más rápidamente que cualquier potencia $|x|^{-k}$, se pueden reformular como

$$\lim_{x\to\infty} \big(1+x^2\big)^k f^{(m)}(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} \big(1+x^2\big)^k f^{(m)}(x) = 0\,, \tag{6.2}$$

Ejemplos 6.3.

I) Si φ es una función test entonces φ es de decrecimiento rápido. En efecto, nótese que si $x \notin \operatorname{sop}(\varphi)$ entonces $\varphi^{(m)}(x) = 0$ para todo $n \geq 0$, y si $\operatorname{sop}(\varphi) \subset [-r, r]$, los límites de (6.1) son obvios de la relación $|x|^k \varphi^{(m)}(x) = 0$, $|x| > r$.

II) Toda función gaussiana es de decrecimiento rápido. Basta observar que para todo polinomio P, y cualesquiera que sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} P(x)\, e^{-\lambda(x-\mu)^2} = 0\,.$$

Lema 6.4. Sean f, g funciones de decrecimiento rápido. Para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ la función $\alpha\, f + \beta\, g$ es también de decrecimiento rápido.

Definición 6.5. Según el resultado anterior y los ejemplos 6.3, el conjunto de funciones de decrecimiento rápido es un subespacio vectorial de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ que contiene propiamente a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Este es el denominado *espacio de Schwartz* que en su honor se denota por $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Definición 6.6. Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones de decrecimiento rápido. Se dice que la sucesión converge hacia 0 en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ si para cada par de números enteros no negativos m, k la sucesión de funciones

$$\big\{\big(1+x^2\big)^k \varphi_n^{(m)}(x)\big\}_{n=1}^\infty$$

converge hacia 0 uniformemente en $\mathbb{R}$. Se dice que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ converge hacia $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ si $\{\varphi_n - \varphi\}_{n=1}^\infty$ converge hacia 0.

Observación 6.7. Recordemos que por $\mathscr{E}(\mathbb{R}) = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ denotamos al espacio de las funciones complejas e indefinidamente derivables en $\mathbb{R}$. Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ se dice convergente hacia 0 en $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ si para cada $r > 0$ y cada entero $m \geq 0$ la sucesión de funciones $\left\{f_n^{(m)}\right\}_{n=1}^\infty$ converge hacia 0 uniformemente en $[-r, r]$ (nótese que la convergencia uniforme en cada compacto no implica la convergencia uniforme en todo $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{r>0}[-r, r]$). Por supuesto, se dice que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge hacia f en $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ si $\{f_n - f\}_{n=1}^\infty$ converge hacia 0.

Lema 6.8. Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones complejas y de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$:

I) Si $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ es de funciones test y converge en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ hacia otra función test φ, entonces $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ también converge en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ hacia φ.

II) Si $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ es de funciones de decrecimiento rápido y converge en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ hacia otra función $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ también converge en $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ hacia φ.

Observación 6.9. El significado del lema anterior es el siguiente, no sólo se verifican las relaciones de contención $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{E}(\mathbb{R})$, sino que además las aplicaciones identidad $\mathrm{Id}\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y $\mathrm{Id}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{E}(\mathbb{R})$ ($\mathrm{Id}(\varphi) = \varphi$) son continuas, que equivale a decir secuencialmente continuas. Estas inyecciones continuas se suelen representar

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathscr{E}(\mathbb{R}).$$

El siguiente resultado es consecuencia del criterio de comparación para integrales impropias.

Proposición 6.10. Sean $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, P un polinomio, $m \geq 0$ un número entero y $\alpha > 0$ un número real. La función $x \in \mathbb{R} \mapsto \left|P(x)\, \varphi^{(m)}(x)\right|^\alpha$ es integrable en $\mathbb{R}$, es decir, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|P(x)\, \varphi^{(m)}(x)\right|^\alpha dx$$

es convergente.

Observación 6.11. Como caso particular de la proposición anterior, se tiene que toda función de decrecimiento rápido φ es tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p \, dx < \infty\,. \tag{6.3}$$

El conjunto de las funciones complejas y medibles en $\mathbb{R}$ que satisfacen (6.3) se representa por $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$. Entonces, para cada $p > 0$, se tiene que

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}^p(\mathbb{R})\,.$$

Proposición 6.12. Sean $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, P un polinomio y k un número entero no negativo. Las funciones

$$P\,f\,, \qquad g\,f\,, \qquad f^{(k)}$$

son también de decreciemiento rápido. Más aún, si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones de decreciemiento rápido que converge en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ hacia f, entonces

$$P\,f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P\,f\,, \qquad g\,f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g\,f\,, \qquad f_n^{(k)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{(k)},$$

en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Proposición 6.13. Sean $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Entonces $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

Observación 6.14. Puesto que $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, los resultados de tipo general presentados en el primer capítulo garantizan que la convolución de dos funciones de decrecimiento rápido está definida en todo punto y es una función de clase $\mathscr{C}^\infty$. La proposición 6.13 establece todavía más que eso; en otras palabras, $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ cerrado para la convolución.

6.2. Transformación de Fourier en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

En la sección 1.3.1 se ha definido la transformación de Fourier para funciones integrables en $\mathbb{R}^n$, en particular en $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{F}(f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,x} f(x)\,dx\,.$$

Pero resulta que la transformada $\widehat{f}$ de una función $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ no es necesariamente integrable, aunque goza de otras propiedades de regularidad.

No obstante, como muestra el resultado del ejercicio 1.20.III, las funciones integrables se pueden aproximar por funciones test en el sentido de la norma integral: si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \big|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)\big|\,dx < \varepsilon,$$

y puesto que $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, la función test φ_ε se puede sustituir por una función de decreciemiento rápido (esto se resume diciendo que $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ y $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ son *densos* en $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$).

Pues bien, sucede que si se restringe $\mathfrak{F}$ a $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ se obtienen propiedades adicionales muy interesantes, a las que prestamos atención ahora. El primer resultado recoge las fórmulas de derivación expuestas en la sección 1.3.1, traducidas al lenguaje de los operadores diferenciales.

Proposición 6.15. Sean $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y P un polinomio con coeficientes complejos.

$$\mathfrak{F}\big(P(D)f\big)(\omega) = P(i\omega)\,\widehat{f}(\omega)\,, \qquad P(D)\widehat{f}(\omega) = \mathfrak{F}\Big(P(-i\,x)\,f(x)\Big)(\omega)\,.$$

Teorema 6.16. Para cada $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ se tiene que $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Más aún, $\mathfrak{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ es un transformación lineal y continua; es decir, si $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Corolario 6.17. Sea $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ y para cada $\omega \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\big|\widehat{f}(\omega)\big| \le \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\,dx\,.$$

Teorema 6.18. Si $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ entonces

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}\,.$$

Lema 6.19. Sea $\phi(x) = \exp(-x^2/2)$. Se tiene que $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y

$$\widehat{\phi}(\omega) = \sqrt{2\,\pi}\,\phi(\omega)\,.$$

Teorema 6.20 (Fórmula de inversión de la transformada de Fourier).

I) Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega}\,\widehat{f}(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathfrak{F}\big(\widehat{f}\big)(-x) \qquad \text{para cada } \ x \in \mathbb{R}\,.$$

II) $\mathfrak{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ es una transformación lineal, biyectiva y continua, cuya inversa $\mathfrak{F}^{-1}$ también es continua.

Corolario 6.21. Si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ y $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathfrak{F}\big(\widehat{f}\big)(-x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

Observación 6.22. Hay otras definiciones alternativas de la transfromada de Fourier, dependiendo del gusto o enfoque personales. Por ejemplo si se definen, para $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$:

$$\Phi(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,x} f(x)\,dx\,; \qquad \Phi^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,x} g(\omega)\,d\omega\,;$$

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy\,,$$

entonces, a cambio del inconveniente de añadir esta constante, ciertas fórmulas adquieren expresiones más sencillas para esta otra transformada de Fourier Φ: sigue siendo cierto que $\Phi(f * g) = \Phi(f)\,\Phi(g)$, y además $\Phi(e^{-x^2/2}) = e^{-\omega^2/2}$, $\Phi^{-1}(g)(x) = \Phi(g)(-x)$, etc.

6.2.1. Trasformadas de Fourier de funciones de cuadrado integrable

Como se indicó en la observación 6.11 las funciones de decrecimiento rápido son de cuadrado integrable, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 dx < \infty \qquad \text{si} \;\; f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})\,.$$

Pero se puede decir más sobre la contención $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$: si atendemos a los resultados obtenidos en el ejercicio 1.20, dada $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ es posible encontrar para cada $\varepsilon > 0$ una función $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)\right|^2 dx < \varepsilon\,. \tag{6.4}$$

Si en el espacio vectorial $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ se define el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

esto define una *seminorma*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

El término seminorma se debe a que para una función f nula casi siempre, pero no nula, se tiene que $\|f\|_2 = 0$ (esto se resuelve de forma teórica identificando funciones iguales c.s. y trabajando con las clases de equivalencia). La relación (6.4) se escribe entonces

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|_2 < \sqrt{\varepsilon} = \delta$$

y puesto que $\delta > 0$ se puede hacer tan pequeño como se quiera, lo que se establece es que $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, y por tanto $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ son *densos* en $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. Esto permite extender la transformación de Fourier de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ a $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, aun cuando para alguna función f de cuadrado integrable no sea absolutamente convergente la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,x} f(x)\,dx\,.$$

Teorema 6.23 (de Plancherel). Existe una biyección lineal $\Psi\colon \mathscr{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\Psi(g) = \mathfrak{F}(g) \qquad \text{para cada} \;\; g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})\,.$$

Se sigue escribiendo $\Psi(g) = \widehat{g}$ para $g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. Además se verifica la *Fórmula de Parseval*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\,\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\,\overline{\widehat{g}(\omega)}\,d\omega\,, \qquad f, g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})\,.$$

En particular, poniendo $f = g$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 dx = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\omega)\right|^2 d\omega\,.$$

Teorema 6.24 (Fórmula de inversión en $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$). Sea $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. Si f es monótona en un entorno $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ del punto x, entonces

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\,\pi} \int_{-A}^{A} e^{i\,\omega\,x}\,\widehat{f}(\omega)\,d\omega\,.$$

6.3. Distribuciones temperadas

Dedicamos esta sección al estudio de la dualidad (i.e., de las aplicaciones lineales continuas) en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Veremos que estas aplicaciones, las que menciona el epígrafe, conforman un subespacio de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Definición 6.25. Una *distribución temperada* es una aplicación lineal y continua $T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, esto es, que verifica

1. $T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg$ para todas $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. Si $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces $Tf_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tf$ en $\mathbb{C}$.

El conjunto de distribuciones temperadas es un espacio vectorial que se denota por $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

Observación 6.26. Sea $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, entonces según el lema 6.8 se puede definir una distribución (una aplicación lineal y continua en el espacio de funciones test) mediante la relación

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}) \overset{\mathrm{Id}}{\hookrightarrow} \mathscr{S}(\mathbb{R}) \overset{T}{\longrightarrow} \mathbb{C},$$

puesto que, al ser ambas aplicaciones lineales y continuas, también lo es su composición $T \circ \mathrm{Id}$. En la práctica se suele obviar esto denominado igual a $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ que a $T \circ \mathrm{Id} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

De la misma forma, toda aplicación lineal y continua $T\colon \mathscr{E}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ define una distribución temperada mediante la inyección continua $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathscr{E}(\mathbb{R})$,

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) \overset{\mathrm{Id}}{\hookrightarrow} \mathscr{E}(\mathbb{R}) \overset{T}{\longrightarrow} \mathbb{C},$$

y por tanto también se identifica con un elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Identificando cada uno de estos espacios con subespacios de los otros podemos representar

$$\mathscr{E}'(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Esto justifica que, de forma genérica, se denominen distribuciones a todas estas aplicaciones. El adjetivo *temperada*, que es sinónimo de *moderada* o *acomodada a* hace referencia a una restricción del "crecimiento en el infinito", como quedará ilustrado en los ejemplos que se muestran más abajo. Por otra parte, la pertinencia de la calificación "de soporte compacto" dada a los elementos de $\mathscr{E}'(\mathbb{R})$ queda patente en el siguiente resultado.

Teorema 6.27. Sea $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$. Exiten un compacto $K \subset \mathbb{R}$ y una cantidad finita de funciones $f_0, f_1, \dots, f_m$, continuas en $\mathbb{R}$ y nulas fuera de K tales que

$$T = \sum_{k=0}^{m} \left(T_{f_k}\right)^{(k)}. \tag{6.5}$$

Corolario 6.28. Sea $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Existen funciones f_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, continuas en $\mathbb{R}$ y tales que

1. Para cada compacto $K \subset \mathbb{R}$ se tiene que $\operatorname{sop}(f_k) \cap K = \emptyset$ excepto a lo sumo para una cantidad finita de índices k.
2. La siguiente serie formal está bien definida como elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ y se tiene que

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_{f_k}\right)^{(k)}. \tag{6.6}$$

Observaciones 6.29.

i) Nótese que, si una distribución T está dada según la fórmula (6.5), entonces

$$\operatorname{sop}(T) \subset \bigcup_{k=1}^{m} \operatorname{sop}(f_k) \subset K\,,$$

así pues, denominar distribuciones de soporte compacto a los elementos de $\mathscr{E}'(\mathbb{R})$ es lo más razonable.

ii) Por supuesto, las representaciones dadas en (6.5) y (6.6) no son únicas; por ejemplo:

$$H' = \delta = (H+1)'.$$

iii) El resultado anterior muestra que los argumentos utilizados en el capítulo anterior para definir la transformada de Laplace de distribuciones (ver definición 5.8), aunque en principio aparentemente restrictivos, contemplan la situación más general.

Ejemplos 6.30.

I) Cada distribución de soporte compacto, como $\delta_a^{(k)}$, es una distribución temperada.

II) Si g es una función compleja localmente integrable en $\mathbb{R}$, tal que para algún $N \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|g(x)\right|}{\left(1+x^2\right)^N}\, dx < \infty\,,$$
entonces T_g es una distribución temperada. En particular, la distribución de Heaviside es temperada.

III) Los polinomios son distribuciones temperadas. Precisando más, si P es un polinomio con coeficientes complejos, entonces la función $P(x)$ satisface la condición del apartado anterior para cada natural N mayor que el grado de P, por tanto, la distribución regular T_P es temperada.

IV) En general, si g es medible en $\mathbb{R}$ y para algún número real $p \geq 1$ se tiene que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|g(x)\right|^p}{\left(1+x^2\right)^N}\, dx < \infty\,,$$
entonces T_g es una distribución temperada. Así pues, las funciones integrables, o las de cuadrado integrable, etc. definen distribuciones regulares temperadas, lo que se puede representar mediante las relaciones de contención: $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, etc. De la misma forma, cualquier función medible mayorada por un polinomio define una distribución temperada.

V) La función $g(x) = e^{x^2}$, por ser continua en $\mathbb{R}$, define una distribución $T_g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Sin embargo, $T_g \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R})$; nótese que $\varphi(x) = 1/g(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pero $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} 1\,dx = \infty$.

Estos ejemplo nos muestran que los elementos regulares de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ pueden proceder de funciones no acotadas, que crezcan en el infinito, pero moderamente (de orden polinómico), de aquí el adjetivo "temperadas" que se les otorga.

Proposición 6.31. Sea $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Se tiene que:

I) Si $k \geq 0$ es un número entero, entonces $T^{(k)}$ también es una distribución temperada.

II) Si P es un polinomio, PT es una distribución temperada.

III) Si $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces gT es una distribución temperada.

Definición 6.32. Sean $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ y $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define (nótese que $\tau_x \check{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$)
$$(T * f)(x) = \langle T, \tau_x \check{f}\rangle\,.$$
La función $T * f$ es la convolución de T y f.

Propiedades 6.33. Sean $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ y $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

I) $T * f$ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, y
$$(T * f)^{(k)} = (T^{(k)}) * f = T * (f^{(k)}).$$

II) $T * f$ es de crecimiento polinómico; precisando más, existen $N \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que
$$\left|(T * f)(x)\right| \leq C\left(1+x^2\right)^N, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Por tanto $T * f$ es una distribución temperada.

III) $(T * f) * g = T * (f * g)$.

6.4. Transformación de Fourier de distribuciones

De la misma forma que se ha extendido la transfromación de Laplace al caso de funciones generalizadas, uno se puede plantear la construcción de una transformada de Fourier de distribuciones. Obviamente, no toda distribución admitirá dicha transformada, pues no toda función la admite, así que hay que elegir un subespacio adecuado de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. El hecho de que $\mathfrak{F}$ transforme $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ en si mismo es la clave; de nuevo, el contemplar el caso de distribuciones regulares $T = T_f$ indica el modo en que se debe encauzar esta construcción si se pretende, como es natural, que $\mathfrak{F}(T_g) = T_{\mathfrak{F}(g)}$, es decir,
$$\langle \mathfrak{F}(T_g), f\rangle = \langle T_{\widehat{g}}, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(x)\, f(x)\, dx\,, \qquad \text{para cada } \ f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})\,.$$

Pero una sencilla aplicación del teorema de Fubini muestra que, para $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\langle T_{\widehat{g}}, f\,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(x)\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \widehat{f}(x)\, dx = \langle T_g, \widehat{f}\,\rangle.$$

Puesto que si T es un distribución temperada, la aplicación compuesta

$$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \longmapsto \widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \longmapsto T(\widehat{f}) \in \mathbb{C}$$

es continua, y es razonable la siguiente definición.

Definición 6.34. Para $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ se define la distribución $\mathfrak{F}(T) = \widehat{T}$ por

$$\langle \widehat{T}, f \rangle = \langle T, \widehat{f} \rangle\,, \qquad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Teorema 6.35.

I) La transformada de Fourier de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ en $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ es continua; esto es, si $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilemte hacia T, entonces $\{\mathfrak{F}(T_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilemte hacia $\mathfrak{F}(T)$.

II) $\mathfrak{F}\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ es una biyección lineal, cuya inversa también es continua.

Observación 6.36. La transformada de Fourier de distribuciones satisface propiedades similares a la transformada de funciones clásicas; por ejemplo, siguen siendo válidas las fórmulas de derivación dadas en la proposición 6.15.

Ejemplos 6.37.

I) Puesto que los polinomios son distribuciones temperadas tiene sentido hablar de su transformada de Fourier. Comencemos examinando los constantes (de grado 0). Si $\mathbf{1}$ denota la distribución regular asociada a la función constante 1, se tiene que

$$\langle \widehat{\mathbf{1}}, f\,\rangle = \langle \mathbf{1}, \widehat{f}\,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, d\omega = 2\,\pi\Big(\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i0\omega}\widehat{f}(\omega)\, d\omega\Big) = 2\pi\, f(0) = \langle 2\pi\,\delta, f\,\rangle\,,$$

así pues, $\widehat{\mathbf{1}} = 2\pi\,\delta$.

II) Para la distribución de Dirac se tiene que

$$\langle \widehat{\delta}, f\,\rangle = \langle \delta, \widehat{f}\,\rangle = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i0x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot f(x)\, dx = \langle \mathbf{1}, f\,\rangle\,,$$

y por tanto, $\widehat{\delta} = \mathbf{1}$.

III) Si P es un polinomio cualquiera, la fórmula $\mathfrak{F}\big(P(D)f\big)(\omega) = P(i\omega)\,\widehat{f}(\omega)$ se verifica igualmente sustituyendo la función de decreciemiento rápido f por una distribución temperada T. En particular, poniendo $T = \delta$, se deduce que

$$\mathfrak{F}\big(P(D)\delta\big) = P(i\omega)\,\widehat{\delta} = P(i\omega)\,.$$

Análogamente, si la fórmula $P(D)\widehat{f}(\omega) = \mathfrak{F}\Big(P(-i\,x)\,f(x)\Big)(\omega)$ se aplica a la distribución $\mathbf{1}$ se obtiene que

$$2\pi\, P(D)\delta = P(D)\widehat{\mathbf{1}} = \mathfrak{F}\Big(P(-i\,x)\,\mathbf{1}(x)\Big) = \mathfrak{F}\big(P(-i\,x)\big)$$

IV) Para $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ se define $\check{T} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ por

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle\,.$$

Es inmediato que $\check{T}$ es también una distribución, que $(\check{T})\check{} = T$, y que $\check{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Nótese ahora que para $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ la fórmula de inversión dada en el teorema 6.20 se escribe de forma equivalente

$$\check{f} = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathfrak{F}(\widehat{f})\,; \qquad \text{es decir } \check{f}(x) = f(-x) = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathfrak{F}(\widehat{f})(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Pues bien, esta fórmula es igualmente válida en $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, como ilustran los casos estudiados arriba:

$$\mathbf{1} = \check{\mathbf{1}} = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathfrak{F}(\widehat{\mathbf{1}}) = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathfrak{F}(2\pi\,\delta) = \mathfrak{F}(\delta)\,; \qquad \delta = \check{\delta} = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathfrak{F}(\widehat{\delta}) = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathfrak{F}(\mathbf{1})\,.$$

Proposición 6.38. Sean $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ y $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\mathfrak{F}(T * f) = \widehat{f} \cdot \widehat{T}$$

(nótese que según 6.33 tiene perfecto sentido el primer miembro de la igualdad, y el segundo consiste en multiplicar la función $\widehat{f}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ por la distribución $\widehat{T}$).

En cuanto a la convolución de distribuciones, recordemos que la convolución de dos distribuciones está bien definida cuando al menos una de ellas es de soporte compacto. Puesto que $\mathscr{E}'(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, siempre tiene sentido la convolución de una distribución temperada con otra de soporte compacto.

Lema 6.39. Sea $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Entonces $\mathfrak{F}(T) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, precisando más, $\mathfrak{F}(T)$ es una distribución regular asociada a la función $\widehat{T}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ y definida por

$$\widehat{T}(\omega) = \langle T_x, e^{-i\omega x} \rangle.$$

La actuación de T sobre la función $\varphi(x) = e^{-i\omega x} \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ se debe interpretar según se indicó en la observación 4.37.IV.

Proposición 6.40. Sean $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ y $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Entonces $S * T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ y

$$\mathfrak{F}(S * T) = \widehat{S} \cdot \widehat{T}\,.$$

El segundo miembro de la igualdad tiene perfecto sentido ya que $\widehat{S} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Teorema 6.41 (de Paley-Wiener).

I) Sea $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{sop}(\varphi) \subset [-r, r]$. Si se define

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx}\varphi(x)\,dx = \int_{-r}^{r} e^{-izx}\varphi(x)\,dx\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,, \tag{6.7}$$

entonces f es una función entera (holomorfa en todo $\mathbb{C}$) y para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ exiten constantes positivas C_n tales que

$$\big|f(z)\big| \le C_n\,\frac{e^{r|\operatorname{Im}(z)|}}{(1+|z|)^n}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{6.8}$$

Recíprocamente, si una función entera f satisface las condiciones (6.8), entonces existe $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop}(\varphi) \subset [-r, r]$ para la que se verifica (6.7).

II) Sea $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop}(T) \subset [-r, r]$. La transformada de Fourier de T se prolonga a una función entera F definida por

$$F(z) = \langle T_x, \exp(-i\,z\,x) \rangle. \tag{6.9}$$

Además, existen una constante positiva C y $N \in \mathbb{N}$ tales que para cada $z \in \mathbb{C}$

$$\big|F(z)\big| \le C\,(1+|z|)^N e^{r|\operatorname{Im}(z)|}\,. \tag{6.10}$$

Recíprocamente, para cada función entera F que satisface las condiciones (6.10) existe una $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop}(\varphi) \subset [-r, r]$ y que verifica (6.9), en particular $\widehat{T}(\omega) = F(\omega)$ para cada $\omega \in \mathbb{R}$.

6.5. Revisión de la transformación de Laplace de distribuciones

La transformada de Laplace se puede formular en el ámbito de las distribuciones temperadas. La construcción que presentamos aquí es equivalente a la que se hizo en el capítulo anterior. Recomendamos al lector que revise los casos prácticos habituales (T_f, δ, H, etc.) para confirmar este punto al menos con estos ejemplo sencillos.

Lema 6.42. Sea φ una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ tal que todas sus derivadas son acotadas y existe $x_0 \in \mathbb{R}$ con $\varphi(x) = 0$ para todo $x < x_0$. Si w es un número complejo con $\operatorname{Re}(w) > 0$ la función

$$e^{-w\,x}\varphi(x) = e^{-\operatorname{Re}(w)x}e^{-i\operatorname{Im}(w)x}\varphi(x)$$

es de decrecimiento rápido.

Supongamos que $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ y que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-\alpha x}T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Elijamos $\phi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ verificando las condiciones del lema precedente, y de manera que $\phi(x) = 1$ para cada $x \in \operatorname{sop}(T)$. Entonces para un $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(z) > \alpha$ la función $\psi(x) = e^{-(z-\alpha)x}\phi(x)$ es de decrecimiento rápido y tiene sentido considerar la actuación de $e^{-\alpha x}T$ sobre ψ, que denotaremos

$$\langle T_x, e^{-zx}\rangle = \langle e^{-\alpha x}T_x, \psi(x)\rangle = \big\langle e^{-\alpha x}T_x, e^{-(z-\alpha)x}\phi(x)\big\rangle.$$

Esto da sentido a la siguiente definición.

Definición 6.43. Sea $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ para la que existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-\alpha x}T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. La función definida por

$$\mathfrak{L}T(z) = \langle T_x, e^{-zx}\rangle\,, \qquad \operatorname{Re}(z) > \alpha\,,$$

es la denominada *transformada de Laplace* de T.

Observación 6.44. Por supuesto, esta nueva definición coincide con la dada en el capítulo anterior, sólo que se enfoca desde un punto de vista diferente, y verifica las propiedades 5.12, así como los resultados relativos a la convolución.

Teorema 6.45. Una función $F(z)$ es la transformada de Laplace de una distribución $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:

1. F es holomorfa en un semiplano de la forma $\Pi_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \alpha\}\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,.$
2. F es de orden polinómo en Π_α; esto es: existe un polinomio P con coeficientes positivos tal que

$$\big|F(z)\big| \le P(|z|)\,, \qquad z \in \Pi_\alpha\,.$$

Bibliografía complementaria

[1] W. Rudin: *Análisis Funcional*, Ed. McGraw-Hill.

[2] C. Zuily: *Problèmes de Distributions*, Ed. Hermann.

Capítulo 7

Introducción a los Espacios de Sóbolev y sus aplicaciones

Hablando de forma muy simplista, al igual que la transformada de Laplace es adecuada para tratar los problemas de evolución (ecuaciones diferenciales sujetas a condiciones iniciales), la teoría que exponemos en este capítulo constituye una herramienta muy útil a la hora de tratar problemas de contorno para ecuaciones elípticas.

Tal como mencionábamos en el capítulo 4, la teoría de distribuciones surgió a partir de dos puntos de vista diferentes. Prestamos ahora atención a las ideas de Sóbolev, relacionadas con los problemas de contorno arriba citados.

Al igual que en el capítulo anterior, el desarrollo exhaustivo de esta materia requiere de recursos avanzados de Análisis Funcional, pero, obviando las justificaciones teóricas, pretendemos dar un enfoque de fácil lectura, concentrado en los resultados de existencia y unicidad.

7.1. Motivación. Formulación débil de problemas de contorno

Como ejemplo sencillo, comencemos considerando el problema

$$\begin{cases} -\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x) = f(x)\,, \quad x \in [a,b], \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

siendo p, p', q y f funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, y además p, q positivas.

Observación 7.1. Las condiciones establecidas en (7.1) sobre los valores de u en la frontera del intervalo se denominan de *Dirichlet*. Otro tipo de condiciones frontera son las de *Neumann*, que establecen valores prefijados de u' en dichos puntos. Cuando se fijan valores de u en unos puntos de la frontera y de u' en otros, se habla de condiciones *mixtas*, refiriéndonos en general a todas ellas como *condiciones de frontera*. El sustantivo *frontera* es, sin duda, más acertado que el de *contorno*, que invita a pensar en dimensión 2, pero en este contexto es habitual usarlos indistintamente y referirse de forma genérica por *problemas de contorno* a las ecuaciones ordinarias o en derivadas parciales en un abierto de Jordan con condiciones en su frontera.

Definición 7.2. Si u es una función de clase $\mathscr{C}^2$ en $[a,b]$ que satisface (7.1) se dice que u es una *solución clásica* o *fuerte* del problema de contorno.

La *formulación débil* del problema (7.1) consiste en considerar para cada función φ de clase $\mathscr{C}^1$ en $[a,b]$ y con $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ la igualdad

$$\int_a^b \Big(-\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x)\Big)\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

e integrando por partes

$$\int_a^b p(x)\,u'(x)\,\varphi'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,u(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\,. \tag{7.2}$$

Nótese que en esta última relación sólo se requiere que u y u' sean integrables en $[a,b]$, y de hecho u' no necesita ser derivable ni continua, ni siquiera estar definida en todo punto. De momento, establezcamos la siguiente definición:

Definición 7.3. Si u es una función de clase $\mathscr{C}^1$ en $[a,b]$ que satisface (7.2) se dice que u es una *solución débil* del problema de contorno (7.1).

Observaciones 7.4.

I) Aunque, por simplicidad, nos ceñiremos al caso unidimensional lo anterior admite una generalización a cualquier dimensión: si D es un abierto de Jordan de $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂D regular a trozos, el problema análogo consiste en

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p(\boldsymbol{x})\,\nabla u(\boldsymbol{x})) + q(\boldsymbol{x})\,u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in D, \\ u(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\partial D, \end{cases} \tag{7.3}$$

y la correspondiente formulación débil, tomando funciones φ de clase $\mathscr{C}^1$ en $\overline{D}$ y que se anulen en ∂D resulta

$$\int_D p(x)\,\nabla u(\boldsymbol{x})\cdot\nabla\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_D q(\boldsymbol{x})\,u(\boldsymbol{x})\,\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_D f(\boldsymbol{x})\,\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,. \tag{7.4}$$

II) Las condiciones de tipo Dirichlet dadas en los ejemplos (7.1) y (7.3) son un caso particular de $u(\boldsymbol{x}) = \gamma(\boldsymbol{x})$, siendo γ cualquier función definida en la frontera de D. Las condiciones de tipo Neumann son de la forma $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \gamma(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in\partial D$, donde $\boldsymbol{n}$ es la normal exterior unitaria a D en los puntos frontera y $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}\cdot\nabla u$ es la denominada *derivada exterior* de u. Una condición de tipo mixto vendrá dada de la forma $\varepsilon_1\,u + \varepsilon_2\,\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \gamma$, siendo ε_1, ε_2 y γ funciones definidas en ∂D.

III) En las formulaciones débiles (7.2) y (7.4) se contemplan funciones φ de clase $\mathscr{C}^1$ en el abierto y nulas en su frontera. Ahora bien, en virtud de los resultados de densidad consecuencia de la convolución (ver teorema 1.45 y ejercicio 1.20), el planteamiento resulta equivalente si se consideran funciones φ de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\overline{D}$ y con $\operatorname{sop}(\varphi)\subset D$; es decir, funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^n$ y con soporte compacto contenido en D. Al contemplar estas *funciones test*, los términos $\int_a^b p\,u'\varphi'$, $\int_a^b q\,u\,\varphi$ y $\int_a^b f\,\varphi$ son la actuación sobre φ de las distribuciones $-(T_{pu'})'$, T_{qu} y T_f, respectivamente. Lo mismo sucede, evidentemente, en dimensión mayor que 1.

Como vemos, el adjetivo *débil* dado a esta reformulación del problema original es completamente adecuado, en consonancia con la teoría expuesta en los capítulos anteriores.

Desde el punto de vista teórico el enfoque *variacional* de los problemas de contorno consiste, en primer lugar, en crear el marco adecuado para tratar la noción de solución débil; este marco lo proporcionan los espacios de Sóbolev. Luego se trata de establecer la existencia y unicidad de soluciones débiles. Por último, comprobar que toda solución débil es una solución fuerte. Estos aspectos son, groso modo, el objetivo de las siguientes secciones.

7.2. Espacios con producto interno

Revisaremos aquí algunas nociones que generalizan las propiedades de los espacios euclídeos de dimensión finita y que son clave para el estudio de soluciones débiles. La razón es evidente si se contempla la formulación débil $\int_a^b p\,u'\,\varphi' + \int_a^b q\,u\,\varphi = \int_a^b f\,\varphi$.

Resulta que si f es integrable en (a,b) la correspondencia $\varphi\mapsto\int_a^b f\,\varphi$ define una aplicación lineal y continua, esto es, una distribución, en el espacio de las funciones test con soporte contenido en (a,b).

Por otro lado, fijadas p y q funciones continuas y positivas en $[a,b]$, entonces

$$\beta(u,v) = \int_a^b p\,u'\,\overline{v}' + \int_a^b q\,u\,\overline{v}$$

es una forma sesquilineal, más aún, un producto interno, en el espacio de las funciones de clase $\mathscr{C}^1$ en $[a,b]$, lo que permite definir una norma

$$\|u\| = \sqrt{\beta(u,u)} = \Big(\int_a^b p\,|u'|^2 + \int_a^b q\,|u|^2\Big)^{1/2}.$$

Se trata de estudiar procesos análogos a los de representación de aplicaciones lineales, obtención de bases ortonormales (diagonalización de matrices), etc. al caso de espacios vectoriales de dimensión infinita.

Definición 7.5. Sea H un espacio vectorial (real o complejo). Un *producto interno* en H es una aplicación $B: H \times H \mapsto \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, según corresponda, usualmente representada $B(u,v) = \langle u,v\rangle$, que verifica:

P1. $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$ para todos $u,v,w \in H$.

P2. $\langle \lambda\, u,v\rangle = \lambda\,\langle u,v\rangle$ para todos $u,v \in H$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

P3. $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$ para todos $u,v \in H$. En particular, si H es un espacio vectorial real se verifica la propiedad de simetría: $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \in \mathbb{R}$ para todos $u,v \in H$.

P4. $\langle v,v\rangle \geq 0$ para cada $v \in H$ y $\langle v,v\rangle = 0$ si, y sólo si, $v = 0 \in H$.

Dos vectores $u,v \in H$ se dicen *ortogonales* si $\langle u,v\rangle = 0$, y se representa $u \perp v$.

Observación 7.6. Las aplicaciones $\alpha: H \times H \to \mathbb{C}$ que verifican P1, P2 y P3 se denominan *formas sesquilineales*. Las propiedades P1 y P2 significan que la apliación es lineal respecto del primer argumento. Cuando una aplicación $\alpha: H \times H \to \mathbb{C}$ verifica la propiedad P3 se dice que es *hermítica*. Es evidente que para toda forma hermítica $\alpha(u,u) = \overline{\alpha(u,u)} \in \mathbb{R}$. En el caso de que el cuerpo de escalares sea la recta real, las formas hermíticas se denominan *simétricas*; en esta situación la aplicación α también es lineal respecto del segundo argumento, de manera que para espacios vectoriales reales las formas sesquilineales son las formas *bilineales* y *simétricas*.

Invitamos al lector que piense en el caso de dimensión finita, más concretamente en matrices cuadradas, que a buen seguro le resultará familiar. Esto último también justificará la oportunidad de denominar *definida positiva* a toda forma sesquilineal que verifique P4.

Propiedad 7.7 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si H es un espacio vectorial dotado del producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se verifica que

$$\big|\langle u,v\rangle\big|^2 \leq \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle, \quad \text{para todos} \quad u,v \in H\,.$$

Proposición 7.8. Si H es un espacio vectorial dotado del producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, entonces la aplicación $u \in H \mapsto \|u\| = \langle u,u\rangle^{1/2}$ es una *norma* en H, es decir, satisface las propiedades:

N1. $\|u\| \geq 0$ para cada $u \in H$ y $\|u\| = 0$ si, y sólo si, $u = 0 \in H$.

N2. $\|\alpha\, u\| = |\alpha|\|u\|$ para cada $u \in H$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

N3. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, para todos $u,v \in H$ (*desigualdad triangular*).

Ejemplo 7.9 (Funciones de cuadrado integrable). Consideremos el conjunto $\mathscr{L}^2(I)$ de todas las funciones complejas y medibles definidas en el intervalo I (acotado o no), y tales que $\int_I \big|f(x)\big|^2 dx < \infty$. El espacio vectorial que se obtiene al identificar funciones iguales c.s. está dotado del producto interno

$$\langle f,g\rangle = \int_I f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

(nótese que $\int_I \big|f(x)\big|^2 dx = 0$ si, y sólo si, $f = 0$ c.s.). En consecuencia

$$\|f\|_{L^2} = \Big(\int_I \big|f(x)\big|^2 dx\Big)^{1/2}$$

es una norma en este espacio, que se denota $L^2(I)$.

Observación 7.10. Cuando se dispone de una norma en un espacio vectorial E se dispone también de un criterio para medir distancias en E, esto es, de una *métrica* definiendo

$$d(u,v) = \|u - v\|, \quad u,v \in E.$$

Casos familiares son los espacios de dimensión finita, por ejemplo, $\mathbb{R}^n$; y como en ellos, es posible establecer todas las nociones asociadas a la de “proximidad”, como límites, continuidad, etc. y, en particular los relativos a sucesiones convergentes o de de Cauchy:

Se dice que la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ de vectores del espacio normado E *converge* hacia $u_0 \in E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n - u_0\| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ de vectores del espacio normado E se dice *de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ para todos $n,m \geq n_0$.

Definición 7.11. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial H, dotado de un producto interno, que es *completo* para la norma asociada, esto es: toda sucesión de Cauchy de elementos de H converge hacia un elemento de H.

Observación 7.12. La propiedad de completitud, coloquialmente hablando, es necesaria para garantizar en los procesos de paso al límite que no nos salimos del espacio, del ámbito en el que trabajamos; de igual forma que al tratar con números racionales uno se encuentra inevitablemente con la aparición de números irracionales.

Por ejemplo, el espacio $L^2(I)$ es de Hilbert (i.e. completo). Ahora bien si se considerasen sólo funciones continuas en el intervalo I, tendríamos sucesiones de funciones, incluso de clase $\mathscr{C}^\infty$, que convergen según la norma asociada al producto interno de $L^2(I)$ hacia funciones no continuas. Véase el ejercicio 1.20: el mismo argumento, sustituyendo la integral de $|s(x)-g(x)|$ por la de $|s(x)-g(x)|^2$ sirve para probar que toda función escalonada se puede aproximar tanto como se quiera en la norma de $L^2(I)$ por funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$.

7.2.1. Dualidad

Recordemos que toda aplicación lineal Φ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ viene dada de la forma

$$\Phi(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^n a_j\,x_j=\big\langle(x_1,x_2,\dots,x_n),(a_1,a_2,\dots,a_n)\big\rangle,$$

es decir, existe $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ tal que $\Phi(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\rangle$ para todo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$. Resulta que los espacios euclídeos (de dimensión finita) son completos y toda aplicación lineal en ellos es continua, o en otras palabras, los duales algebraico y topológico coinciden. El siguiente teorema generaliza esta situación a espacios de Hilbert cualesquiera.

Teorema 7.13 (de representación de Riesz). Sean H un espacio de Hilbert sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y $\Phi\colon H\to\mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua. Existe un único elemento $f\in H$ tal que

$$\Phi(v)=\langle v,f\rangle,\quad v\in H\,.$$

Definición 7.14. Sean H un espacio de Hilbert y β una forma sesquilineal en H.

i) Se dice que β es *continua* si existe $M>0$ con $\big|\beta(u,v)\big|\le M\,\|u\|\,\|v\|,\quad u,v\in H$.

ii) Se dice que β es *coercitiva* si existe $C>0$ tal que $\beta(u,u)\ge C\,\|u\|^2,\quad u\in H$.

Observaciones 7.15.

i) Las nociones de continuidad y coercitividad se establecen, obviamente, en relación a la norma original, al producto interno si se prefiere, del espacio H.

ii) Sucede que en espacios vectoriales de dimensión finita, en los que todas las normas son equivalentes, toda forma sesquilineal es continua y se puede representar mediante una matriz cuadrada autoadjunta (simétrica, si el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$). La condición de coercitividad equivale a que todos los autovalores de dicha matriz sean estrictamente positivos.

iii) En general, el hecho de que β sea continua y coercitiva significa que es un producto interno cuya norma asociada, $\|u\|_\beta=\sqrt{\beta(u,u)}$, verifica respecto de la original $\|u\|$ las desigualdades

$$\sqrt{C}\,\|u\|\le\|u\|_\beta\le\sqrt{M}\,\|u\|\,,\qquad u\in H\,.$$

En términos topológicos ello conlleva que las nociones de límites, continuidad, sucesiones convergentes, etc., sean las mismas para las dos normas.

Teorema 7.16 (de Lax-Milgram). Sean H un espacio de Hilbert y β una forma sesquilineal continua y coercitiva en H. Para cada aplicación lineal y continua $\Phi\colon H\to\mathbb{C}$ existe un único $u\in H$ tal que

$$\Phi(v)=\beta(v,u),\quad\text{para todo}\ \ v\in H\,.$$

En otras palabras, según el teorema de Riesz, para cada $f\in H$ existe un único elemento $u_f\in H$ tal que

$$\langle v,f\rangle=\beta(v,u_f),\quad\text{para todo}\ \ v\in H\,.$$

Además si H es real, $\Phi\colon H\to\mathbb{R}$ es continua y $\beta\colon H\times H\to\mathbb{R}$ es bilineal, simétrica, continua y coercitiva en H, entonces u_f se caracteriza por

$$\frac{1}{2}\,\beta(u_f,u_f)-\langle u_f,f\rangle=\min\Big\{\frac{1}{2}\,\beta(v,v)-\langle v,f\rangle : v\in H\Big\}.$$

Observación 7.17. Aunque no entraremos en detalles sobre el significado del resultado anterior, sí que podemos interpretarlo fácilmente en los espacios de dimensión finita:

Fijada una base en $\mathbb{R}^n$, pongamos que A es una matriz cuadrada simétrica de orden n, que por tanto representa una forma bilineal en $\mathbb{R}^n$ mediante $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\,A\,\boldsymbol{y}^t$ (éste es el producto matricial, representando los vectores por filas, de manera que $\boldsymbol{y}^t$, el traspuesto de $\boldsymbol{y}$, es un vector columna). Si además todos los autovalores de A son positivos (no nulos), esta matriz es regular o invertible. Entonces, dado $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ podemos escribir

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{z}^t = \boldsymbol{x}\,A\left(A^{-1}\boldsymbol{z}^t\right) = \boldsymbol{x}\,A\,\boldsymbol{y}^t, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Obviamente, el elemento $\boldsymbol{y}$ definido por $\boldsymbol{y}^t = A^{-1}\boldsymbol{z}^t$ es único.

7.2.2. Sistemas ortonormales. Bases hilbertianas

Recordemos que en un espacio euclídeo de dimensión finita es posible construir, partiendo de cualquier base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *ortonormal*, esto es, constituida por vectores de norma 1 y ortogonales dos a dos, éste es el conocido proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Fijada una base ortonormal la expresión de cualquier elemento $\boldsymbol{x} \in H$ respecto de dicha base es

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j\rangle\, \boldsymbol{e}_j, \qquad \text{además,} \quad \|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j\rangle\right|^2.$$

En espacios de dimensión infinita hay que tener cierta cautela al establecer expresiones similares a la anterior.

Definición 7.18. Sea H un espacio con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Un *sistema ortonormal* de vectores de H es una familia $\{\boldsymbol{e}_i : i \in I\}$ tales que

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = \delta(i-j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Proposición 7.19. Supongamos que $\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal en el espacio de Hilbert H. Para cada $\boldsymbol{x} \in H$ se consideran las “sumas parciales”

$$\boldsymbol{x}_m = \sum_{n=1}^{m} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n\rangle\, \boldsymbol{e}_n.$$

Entonces la sucesión $\{\boldsymbol{x}_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge hacia un elemento $\boldsymbol{x}_0 \in H$, que formalmente representamos $\boldsymbol{x}_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n\rangle\, \boldsymbol{e}_n$, y cuya norma verifica

$$\|\boldsymbol{x}_0\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n\rangle\right|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2. \tag{7.5}$$

Recíprocamente, si $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_j|^2 < \infty$, entonces existe un elemento $\boldsymbol{x}_0 \in H$ que verifica $\langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{e}_n\rangle = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Observaciones 7.20. Con la notación de la proposición anterior.

I) Los vectores de un sistema ortonormal son siempre linealmente independientes. En efecto, nótese que si $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j\, \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0} \in H$, entonces $\lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{k} \langle \lambda_j\, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle = \langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_i\rangle = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, k$.

II) Los escalares $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n\rangle$ son los *coeficientes* de $\boldsymbol{x}_0$ respecto al sistema ortonormal $\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$, pero no en el sentido algebraico; el concepto de base algebraica involucra combinaciones lineales finitas, a diferencia de lo establecido en la proposición anterior.

III) En la expresión (7.5) está implícito que la familia de los coeficientes es de cuadrado integrable. La desigualdad que se establece recibe el nombre de *desigualdad de Bessel-Parseval*.

IV) Los elementos $\boldsymbol{x}_0$ no están en el subespacio lineal engendrado por la familia de vectores $\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$, sino en su adherencia. Esto es claro, pues son límite de vectores de ese subespacio

$$\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_m\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} \left|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n\rangle\right|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

v) En la última conclusión de la proposición 7.19 el elemento $\boldsymbol{x}_0$ no es único; si ponemos, por ejemplo, $\boldsymbol{x}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, \boldsymbol{e}_n$, entonces lo mismo se verifica para $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ siendo $\boldsymbol{y}$ cualquier vector no nulo ortogonal a todos los $\boldsymbol{e}_n$. El poder elegir tales vectores $\boldsymbol{y}$ significa que la adherencia del supespacio lineal generado por $\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ no coincide con H, esto es, no todos los vectores de H se pueden aproximar en la forma que indica la proposición. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 7.21. Sean H un espacio de Hilbert y $\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en H. Se dice que el sistema ortonormal es *completo* si para cada $\boldsymbol{x} \in H$ se tiene que la sucesión

$$\boldsymbol{x}_m = \sum_{n=1}^{m} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n \rangle \, \boldsymbol{e}_n$$

converge hacia $\boldsymbol{x}$ o, equivalentemente, si

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n \rangle \right|^2.$$

En este caso también se dice que $\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una *base de Hilbert* de H.

Se dice que un espacio de Hilbert es *separable* si posee una base de Hilbert.

Observaciones 7.22.

i) Si un espacio de Hilbert es separable también lo es cualquier subespacio suyo. Nótese además, que en lo expuesto anteriormente, si se sustituye la familia de vectores $\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ por una colección finita $\{\boldsymbol{e}_i : 1 \leq i \leq m\}$, lo que se obtiene son los resultados familiares para los espacios de dimensión finita.

ii) Existen espacios de Hilbert no separables, es decir, para los que cualquier sistema ortonormal completo de vectores ha de ser no numerable (no se puede escribir como una sucesión). Pero resulta que los casos interesantes, al menos desde el punto de vista de las aplicaciones que perseguimos, se refieren a espacios separables.

iii) Por ejemplo, los espacios $L^2(I)$ son espacios de Hilbert separables, y por tanto así lo serán sus subespacios, entre los que se encuentra los espacios de Sóbolev que estudiaremos después. Caso de especial relevancia es el de las series de Fourier: si $I = [-\pi, \pi]$, resulta que la familia

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

es una base de Hilbert de $L^2(I)$, también la construida tomando de la anterior partes reales e imaginarias, es decir el denominado *sistema trigonométrico*.

iv) Por supuesto, un mismo espacio de Hilbert separable posee infinitas bases hilbertianas. La conveniencia de elegir unas u otras viene impuesta por el problema concreto que suscite su estudio.

7.3. Espacios de Sóbolev

Recordemos que para una función $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ el hecho de que la derivada débil, o en el sentido de las distribuciones, de u sea una función clásica, esto es distribución regular, significa que existe g localmente integrable tal que

$$\int_{\mathbb{R}} u \, \varphi' = -\int_{\mathbb{R}} g \, \varphi \qquad \text{para cada} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \, .$$

De forma análoga, puesto que ahora estamos interesados en funciones, o más bien en ecuaciones funcionales, definidas en intervalos de $\mathbb{R}$, damos la siguiente definición:

Definición 7.23. Sea $I = (a, b)$ un intervalo de $\mathbb{R}$ acotado o no, diremos que la función g definida c.s. en I y localmente integrable, es la *derivada débil* de u en I si se verifica que

$$\int_a^b u \, \varphi' = -\int_a^b g \, \varphi \qquad \text{para cada} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \quad \text{con} \quad \operatorname{sop}(\varphi) \subset (a, b) \, . \tag{7.6}$$

En este caso escribiremos también $u' = g$, en lugar de $(T_u)' = T_g$ aun cuando u no sea derivable en el sentido clásico en algunos puntos (que conformarán un conjunto de medida nula).

Observación 7.24. Dado un abierto Ω, el conjunto de las funciones test φ con $\mathrm{sop}(\varphi) \subset \Omega$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ que se denota $\mathscr{D}(\Omega)$.

Para aclarar y justificar la introducción de este espacio pensemos en que si, como es habitual, extendiésemos a todo $\mathbb{R}$ por 0 las funciones u definidas en (a,b) y considerásemos en (7.6) todas las funciones test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ nos encontraríamos, por ejemplo, que la función constante $f(x) = 1$ en $I = (0,1)$ tendría derivada débil $(T_f)' = \delta(x) - \delta(x-1)$, que no es una distribución regular, mientras que $f'(x) = 0$, para todo $x \in (0,1)$. Los siguientes lemas esclarecen más este aspecto.

Lema 7.25. Sea f una función localmente integrable en el intervalo $I = (a,b)$ y tal que

$$\int_a^b f\varphi'(x) = 0 \quad \text{para cada} \quad \varphi \in \mathscr{D}(I)\,.$$

Entonces existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(x) = c$ en casi todo punto x de I.

Lema 7.26. Sea g una función localmente integrable en el intervalo $I = (a,b)$. Fijado $c \in (a,b)$ se define

$$v(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,, \quad x \in (a,b)\,.$$

Entonces v es continua en I y g es la derivada débil de v en I:

$$\int_I v\,\varphi' = -\int_I g\,\varphi \qquad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathscr{D}(I)\,.$$

Definición 7.27 (Espacios de Sóbolev). Sean $I = (a,b)$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y $1 \leq p < \infty$. El conjunto de las funciones continuas $u\colon I \to \mathbb{C}$ tales que $\int_I |u|^p < \infty$ y que admiten derivada débil en I, u', también con $\int_I |u'|^p < \infty$ se denota $W^{1,p}(I)$.

Para $p = 2$ (funciones de cuadrado integrable con derivada de cuadrado integrable) se denota

$$H^1(I) = W^{1,2}(I)\,.$$

Observaciones 7.28.

I) El superíndice 1 en $W^{1,p}$ hace referencia al orden de derivación. El conjunto de funciones f medibles en el intervalo I y que $|f|^p$ es integrable se denota $\mathscr{L}^p(I)$. De forma análoga se definen los espacios $W^{k,p}$ de funciones que admiten derivada débil hasta orden k en el intervalo I y todas ellas están en $\mathscr{L}^p(I)$, y de la misma forma, $H^k(I) = W^{k,2}(I)$.

II) Si $I = (a,b)$ es acotado, toda función u de clase $\mathscr{C}^1$ en $\overline{I} = [a,b]$ es, al igual que su derivada, acotada y por tanto $|u|^p$ y $|u'|^p$ son integrables en $[a,b]$ cualquiera que sea p; es decir, $\mathscr{C}^1(\overline{I}) \subset W^{1,p}(I)$.

III) Si I es un intervalo acotado, toda función $f \in \mathscr{L}^p(I)$, esto es, que verifique $\int_I |f|^p < \infty$, es también integrable en I (en la notación funcional $\mathscr{L}^p([a,b]) \subset \mathscr{L}^1([a,b])$).

En consecuencia, las funciones u de $W^{1,p}(I)$ son, localmente, primitivas de funciones de $\mathscr{L}^p(I)$:

$$u(x) - u(y) = \int_x^y u'(t)\,dt\,, \qquad x, y \in I\,. \tag{7.7}$$

Si la función u es derivable en casi todo punto de $[a,b]$ y verifica el *teorema fundamental del cálculo integral*, es decir, la propiedad (7.7), se dice que u es *absolutamente continua* en $[a,b]$.

A partir de los lemas 7.25 y 7.26 se deduce la siguiente propiedad que viene a decir que, en la definición de espacio de Sóbolev, podríamos exigir a las funciones u que fuesen continuas también en los puntos frontera del intervalo.

Proposición 7.29. Sean $I = (a,b)$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y $u \in W^{1,p}(I)$. Si $b \in \mathbb{R}$ entonces existe

$$u(b^-) = \lim_{x \to b^-} u(x) = u(c) + \int_c^b u'(t)\,dt\,,$$

Siendo c cualquier punto de (a,b). Análogamente, si $a \in \mathbb{R}$, existe $u(a^+) = \lim_{x \to a^+} u(x)$.

En consecuencia, si I es acotado $W^{1,p}(I) \subset \mathscr{C}(\overline{I})$.

Siguiendo las pautas que sugiere lo expuesto en las secciones anteriores, a partir de ahora prestaremos atención, casi en exclusiva, a los espacios H^1.

Teorema 7.30. Sea $I=(a,b)$ un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. El espacio $H^1(I)$ está dotado del producto interno

$$\langle u,v\rangle = \int_a^b u'(x)\,\overline{v'}(x)\,dx + \int_a^b u(x)\,\overline{v}(x)\,dx$$

y para la norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = \Big(\|u'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\Big)^{1/2}$$

es completo, es decir, de Hilbert.

A continuación exponemos algunos resultados que aportan más información sobre la naturaleza de las funciones en H^1. En todos los casos $I=(a,b)$ denota un intervalo abierto de la recta real.

Proposición 7.31. Sea u una función continua, $u\in L^2(I)$. Son equivalentes

I) $u\in H^1(I)$.

II) Existe $C>0$ tal que

$$\Big|\int_I u(x)\,\varphi'(x)\,dx\Big| \le C\int |\varphi(x)|^2 dx = C\,\|\varphi\|_{L^2} \quad \text{para toda} \ \ \varphi\in\mathscr{D}(I)\,.$$

Teorema 7.32 (densidad de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ en $H^1(I)$). Sea $u\in H^1(I)$. Existe una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\varphi_n\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ para todo n, tales que sus restricciones al intervalo I convergen hacia u en $H^1(I)$. Explícitamente:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_a^b \big|u'(x)-\varphi_n'(x)\big|^2\,dx + \int_a^b \big|u(x)-\varphi_n(x)\big|^2\,dx\Big)^{1/2} = 0\,.$$

Observación 7.33. El resultado anterior es falso si se consideran funciones $\varphi_n\in\mathscr{D}(I)$, a no ser que $I=\mathbb{R}$, claro está. Sin entrar en detalles, nótese que estas funciones y sus derivadas se anulan en los extremos del intervalo, lo que no sucede en general para $u\in H^1(I)$. Véase el teorema 7.42.

Teorema 7.34. Existe una constante $C>0$, que depende sólo de I, tal que

$$\big|u(x)\big| \le C\,\|u\|_{H^1}$$

para toda $u\in H^1(I)$ y todo $x\in I$. En particular, las funciones funciones de $H^1(I)$ son acotadas en I.

Corolario 7.35. Sean $I=(a,\infty)$ (resp. $I=(-\infty,b)$) y $u\in H^1(I)$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = 0 \qquad (\text{resp.} \lim_{x\to-\infty} u(x) = 0\,.$$

Observación 7.36. Para una función continua y acotada en el intervalo I la cantidad

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup\big\{|u(x)| : x\in I\big\} \in [0,\infty)$$

define una norma en el espacio vectorial de tales funciones. El teorema anterior establece que

$$\|u\|_{L^\infty} \le C\,\|u\|_{H^1} \qquad u\in H^1(I)\,.$$

Corolario 7.37 (Fórmula de integración por partes). Sean $u,v\in H^1(I)$. Entonces $u\,v\in H^1(I)$ y se verifica que

$$(u\,v)' = u'v + u\,v'.$$

Además, para todos $x,y\in I$ se verifica que

$$\int_x^y u'(t)v(t)\,dt = u(y)\,v(y) - u(x)\,v(x) - \int_x^y u(t)\,v'(t)\,dt\,.$$

Corolario 7.38 (Regla de la cadena). Sea g una función de clase $\mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R}$ con $g(0)=0$. Si $u\in H^1(I)$ Entonces $g\circ u\in H^1(I)$ y se verifica que

$$(g\circ u)' = (g'\circ u)\,u', \quad \text{es decir,} \quad (g\circ u)'(x) = g'(u(x))\,u'(x)\,,\ x\in I\,.$$

7.3.1. Los espacios H_0^1

Hablando de una manera simplista, hasta ahora hemos prestado atención a la naturaleza de las funciones y sus derivadas, en relación con la formulación débil de las ecuaciones diferenciales. Igualmente importantes son las condiciones de contorno que motivan lo que a continuación se expone.

Definición 7.39. Dado un intervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, se denota por $W_0^{1,p}(I)$ al subespacio vectorial de las funciones $u \in W^{1,p}(I)$ tales que

$$u(a^+) = \lim_{x\to a^+} u(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad u(b^-) = \lim_{x\to b^-} u(x) = 0\,.$$

Para $p = 2$, se denota $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

Observaciones 7.40.

I) En los puntos del infinito, tal como establece el corolario 7.35, la definición anterior es ociosa. Pero para intervalos acotados, según la proposición 7.29, el significado es más relevante: las funciones de $W^{1,p}(I)$ son (o se identifican con) funciones continuas en $[a, b]$; el subespacio $W_0^{1,p}(I)$ está constituido por aquellas con valores nulos en los puntos frontera.

II) En el espacio $H_0^1(I) \subset H^1(I)$ se puede considerar el mismo producto interno y norma asocia. Resulta que también $H_0^1(I)$ es un espacio de Hilbert, en términos topológicos, que es un subespacio cerrado de $H^1(I)$. Esto es lo que establece el teorema siguiente.

Teorema 7.41. Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de $H_0^1(I)$ que convergen hacia $u \in H^1(I)$, es decir, tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^1} = 0\,.$$

Entonces $u \in H_0^1(I)$.

El siguiente resultado, análogo al teorema 7.32, arroja más luz sobre aquél.

Teorema 7.42 (de densidad de $\mathscr{D}(I)$ en $H^1(I)$). Sea $u \in H^1(I)$. Existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones de $\mathscr{D}(I)$ que converge hacia u en $H_0^1(I)$.

Proposición 7.43 (Desigualdad de Poincaré). Sea $I = (a, b)$ un intervalo acotado de $\mathbb{R}$. Existe una constante C, que depende sólo de la longitud de I, tal que

$$\|u\|_{H^1} \le C\,\|u'\|_{L^2} = C \int_a^b |u'|^2 \quad \text{para toda} \;\; u \in H_0^1(I)\,.$$

Observación 7.44. Nótese que para $u \in H_0^1(I)$ se tiene que

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt = \int_a^x u'(t)\,dt\,,$$

de donde se sigue que

$$\big|u(x)\big| \le \int_a^b \big|u'(t)\big|\,dt = \int_a^b \big|u'(t)\big|\,1\,dt \le \Big(\int_a^b 1^2\,dt\Big)^{1/2} \Big(\int_a^b \big|u'(t)\big|^2\,dt\Big)^{1/2},$$

siendo la última desigualdad la de Cauchy-Schwartz para el producto interno en L^2.

La desigualdad de Poincaré significa que en H_0^1 la forma sesquilineal $\beta(u, v) = \int_a^b u'\,\overline{v}'$ es un producto interno, cuya norma asociada $\|u\|^2 = \int_a^b |u'|^2$ es equivalente a la que hereda de $H^1(I)$.

Notación: El conjunto de las aplicaciones lineales y continuas $\Phi\colon H_0^1(I) \to \mathbb{C}$, es decir, el dual topológico de $H_0^1(I)$ se denota por $H^{-1}(I)$.

Puesto que $H_0^1(I)$ es un espacio de Hilbert, el teorema de Riesz 7.13 establece que todo elemento de $H^{-1}(I)$ viene dado de la forma

$$\Phi(u) = \langle u, g\rangle = \int_I u'\,\overline{g}' + \int_I u\,\overline{g}$$

para alguna $g \in H_0^1(I)$. Pero conviene, con vistas a futuras aplicaciones, dar una caracterización más general.

Proposición 7.45 (Dualidad en H_0^1). Sea $\Phi \in H^{-1}(I)$. Existe $f_0, f_1 \in L^2(I)$ tales que

$$\Phi(u) = \int_I f_1 u' + \int_I f_0 u \qquad \text{para cada} \;\; u \in H_0^1(I)\,. \tag{7.8}$$

Si I es acotada se puede tomar $f_0 = 0$.

Observaciones 7.46. Con la notación de la proposición anterior.

I) Es sencillo comprobar que las aplicaciones definidas según la fórmula (7.8) son continuas:
$$\Big|\int_I f_1 u'\Big| \le \|f_1\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} \le \|f_1\|_{L^2}\|u'\|_{H^1}$$
y lo mismo con el otro término. A diferencia del teorema de Riesz, en esta representación no se exige que f_1 sea la derivada débil de f_0.

II) Si el intervalo es acotado entonces, en virtud del lema 7.26, tomando $h(x) = \int_a^x f_0(t)\,dt$, la fórmula de integración por partes establece que
$$\int_a^b f_0 u = \int_a^b h' u = h(b)\,u(b) - h(a)\,u(a) - \int_a^b h\,u' = \int_a^b (-h)\,u'$$
y la función $-h$ por ser acotada es de cuadrado integrable.

III) Como se muestra en el apartado anterior, las funciones f_0 y f_1 no son únicas.

IV) En el lenguaje de las distribuciones es costumbre identificar Φ con $f_0 - f_1'$ o, expresado con más rigor, $\Phi = T_{f_0} - (T_{f_1})'$.

V) La representación (7.8) es también válida en el espacio de Hilbert $H^1(I)$.

7.4. Ejemplos de aplicación a problemas de contorno

A lo largo de esta sección se considerarán: un intervalo compacto $[a,b]$, esto es, la adherencia del abierto $I = (a,b)$, y funciones continuas $p, q\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, siendo $q(x) \ge 0$ para todo x, y p derivable con continuidad y estrictamente positiva en $[a,b]$; en particular, deberá ser por la compacidad de $[a,b]$, $p(x) \ge c > 0$, para todo $x \in [a,b]$.

Veremos cómo la teoría de espacios de Sóbolev permite establecer la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación

$$-\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x) = f(x)\,, \quad x \in [a,b] \tag{7.9}$$

sujeta a distintas condiciones de contorno.

Por supuesto, en algunos casos la ecuación diferencial lineal (7.9) se puede resolver explícitamente, por ejemplo, si los coeficientes p y q son constantes (como en $-u''+u = f$) y f es suficientemente regular y "manejable". Pero no sucede igual en el caso general, en el que contemplaremos términos independientes $f \in L^2(I)$, no necesariamente continuos.

7.4.1. Condición de Dirichlet homogénea

Para abordar el problema (7.9) sujeto a las condiciones de contorno

$$u(a) = 0\,, \quad u(b) = 0\,, \tag{7.10}$$

seguiremos los siguientes pasos:

1.- En primer lugar las condiciones de contorno sugieren considerar el espacio de Hilbert $H_0^1(I)$.

2.- Después, atendiendo a la formulación débil (7.2) se observa que:

I) La forma sesqulineal definida por $\beta(v,u) = \displaystyle\int_a^b p\,v'\,\overline{u}' + \int_a^b q\,v\,\overline{u}$ es continua en $H_0^1(I)$ y, en virtud de la desigualdad de Poincaré 7.43 también es coercitiva en este espacio.

II) Si $f \in L^2(I)$, la aplicación definida por $\Phi(v) = \int_a^b \overline{f}\,v$ es lineal y continua en $H_0^1(I)$.

En virtud del teorema de Lax-Milgram existe una única función $u \in H_0^1(I)$ tal que $\Phi(v) = \beta(v,u)$ para toda $v \in H_0^1(I)$, es decir

$$\int_a^b \overline{f}\,v = \int_a^b p\,v'\,\overline{u}' + \int_a^b q\,v\,\overline{u} \qquad \text{para toda} \;\; v \in H_0^1(I)\,.$$

3.- La solución débil u es de clase $\mathscr{C}^2$ en $[a,b]$. En efecto, conjugando la relación anterior (nótese que $v \in H_0^1(I)$ si, y sólo si, $\overline{v} \in H_0^1(I)$ y que $\mathscr{D}(I) \subset H_0^1(I)$) se deduce que

$$\int_a^b p\,u'\varphi' = \int_a^b (f - q\,u)\,\varphi \qquad \text{para toda} \;\; \varphi \in \mathscr{D}(I)\,.$$

Así pues $p\,u'$ es débilmente derivable en I y su derivada débil, $(p\,u')' = q\,u - f$, está en $L^2(I)$ (ver definición 7.23).

Si además la función f es continua entonces la derivada débil de $p\,u'$ es continua, es decir $p\,u'$ es de clase $\mathscr{C}^1$ en I. Puesto que $p(x) \geq c > 0$, se deduce que $u' = \dfrac{1}{p}\,p\,u$ también es de clase $\mathscr{C}^1$ en I, esto es, u es de clase $\mathscr{C}^2$ en I.

Finalmente, deshaciendo la integración por partes en (7.2), se sigue que cuando f es continua la solución débil es también solución fuerte y obviamente, por estar en $H_0^1(I)$ verifica las condiciones de contorno, es decir, es la solución clásica de $\{(7.9), (7.10)\}$.

El procedimiento anterior se adapta a otras condiciones de contorno, simplemente reformulando la ecuación en términos convenientes o eligiendo de forma adecuada el espacio en que se trabaja. En los siguientes ejemplos expondremos las líneas generales de actuación, dejando que el lector reproduzca, a imitación de lo expuesto anteriormente, los detalles.

7.4.2. Condición de Dirichlet no homogénea

El problema (7.9) con condiciones de contorno

$$u(a) = \gamma_1, \quad u(b) = \gamma_2, \tag{7.11}$$

se reduce al caso anterior cambiano la incógnita u de la siguiente forma: fijemos cualquier función u_0 de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $[a,b]$ y tal que $u_0(a) = \gamma_1$ y $u_0(b) = \gamma_2$; por ejemplo u_0 puede ser afín (su grafo es el segmento que une los puntos (a,γ_1) y (a,γ_2)). Obviamente $u_0 \in H^1(I)$ y para la nueva incógnita $\tilde{u} = u - u_0$ el problema (7.11) se transforma en

$$\begin{cases} -\big(p\,(\tilde{u}+u_0)'\big)' + q\,(\tilde{u}+u_0) = f\,, \\ u(a) = u_0(a) + \tilde{u}(a) = \gamma_1, \quad u(b) + \tilde{u}(b) = \gamma_2, \end{cases} \qquad \text{es decir,} \qquad \begin{cases} -\big(p\,\tilde{u}'\big)' + q\,\tilde{u} = f - q\,u_0 - (p\,u_0')'\,, \\ \tilde{u}(a) = 0, \quad \tilde{u}(b) = 0, \end{cases}$$

siendo este último el estudiado antes con término independiente $g = f - q\,u_0 - (p\,u_0')'$.

7.4.3. Condición de Neumann homogénea

Prestamos ahora atención a problemas del tipo (7.9) con condiciones

$$u'(a) = 0\,, \quad u'(b) = 0. \tag{7.12}$$

Se supone, adicionalmente, que también existe una constante d con $q(x) \geq d > 0$ en $[a,b]$.

En primer lugar se observa que si u es solución fuerte de $\{(7.9),(7.12)\}$, entonces para toda $v \in H^1(I)$ se tiene que

$$\int_a^b -\big(p\,u'\big)'v = -p(b)\,u'(b)\,v(b) + p(a)\,u'(a)\,v(a) + \int_a^b p\,u'v' = \int_a^b p\,u'v'. \tag{7.13}$$

Es decir, las condiciones de contorno, conducen a la formulación débil

$$\int_a^b p\,u'v' + \int_a^b q\,u\,v = \int_a^b f\,v$$

en el espacio de Hilbert $H^1(I)$. El tratamiento ahora es similar a los anteriores considerando la misma forma continua y coercitiva $\beta(u,v)$ y la aplicación lineal y continua Φ asociada a la correspondiente función $f \in L^2(I)$.

La regularidad de la solución débil se deduce, en el caso de que f sea continua, como antes. Finalmente que estas soluciones débiles verifican las condiciones de contorno se sigue de la relación

$$p(b)\,u'(b)\,v(b) - p(a)\,u'(a)\,v(a) = 0 \qquad \text{para toda} \;\; v \in H^1(I)\,,$$

y puesto que $p(a) > 0$, $p(b) > 0$ y $v(a), v(b)$ son arbitrarios, han de ser $u'(a) = u'(b) = 0\,.$

Nota: La condición impuesta impuesta sobre el coeficiente $q(x)$ es esencial para obtener el carácter coercitivo de β en el espacio $H^1(I)$: en este espacio no se verifica la desigualdad de la proposición 7.43 y no basta con exigir que $q(x) \geq 0$ en el intervalo.

Como contraejemplo, nótese que el problema (relativo a coeficientes $p = 1, q = 0$)

$$\begin{cases} -u''(x) = 0\,, & x \in [a,b] \\ u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0, \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones: todas las funciones constantes.

Lo mismo se puede decir en las siguientes secciones; hablando de una forma más coloquial, siempre que trabajemos fuera del espacio $H_0^1(I)$.

7.4.4. Condición de Neumann no homogénea

Para los problemas del tipo (7.9) con condiciones

$$u'(a) = \gamma_1, \quad u'(b) = \gamma_2, \tag{7.14}$$

procediendo como en el apartado anterior, las condiciones de contorno, conducen a la formulación débil

$$\int_a^b p\,u'v' + \int_a^b q\,u\,v = \int_a^b f\,v + \gamma_2 p(b)\,v(b) - \gamma_1 p(a)\,v(a)$$

En virtud del teorema 7.34, la aplicación lineal Φ dada por

$$\Phi(v) = \int_a^b f\,v + \gamma_2 p(b)\,v(b) - \gamma_1 p(a)\,v(a)$$

es continua en $H^1(I)$ cualquiera que sea $f \in L^2(I)$. Se razona entonces una vez más aplicando el teorema de Lax-Milgram con la misma forma sesquilineal β (coercitiva si $q \geq d > 0$) y esta aplicación lineal en el espacio $H^1(I)$.

Otra forma de proceder consiste en reducir este caso al de condiciones de Neumann homogéneas cambiando la función incógnita a semejanza de como se hizo en la subsección 7.4.2.

7.4.5. Otras condiciones de contorno

Expondremos someramente otras situaciones, relativas siempre a una ecuación diferencial lineal (7.9) con distintas condiciones de contorno. Se sigue suponiendo que $q(x) \geq d > 0$, $x \in [a,b]$.

1. **Condición mixta homogénea** $\{u'(a) - k\,u(a) = 0,\ u(b) = 0\}$:

   La formulación débil se expresa

   $$\int_a^b p\,u'v' + \int_a^b q\,u\,v = \int_a^b f\,v - k\,p(a)\,u(a)\,v(a)$$

   en el subespacio $H = \{v \in H^1(I) : v(b) = 0\}$, que es también de Hilbert, y en él la aplicación lineal $\Phi(v) = \int_a^b \overline{f}\,v$ y la forma sesquilineal $\beta(v,u) = \displaystyle\int_a^b p\,v'\,\overline{u}' + \int_a^b q\,v\,\overline{u} + k\,p(a)\,v(a)\,\overline{u}(a)$.

2. **Condición periódica** $\{u(a) = u(b),\ u'(a) = u'(b)\}$:

   Se supone aquí que además p es también periódica en el sentido de que $p(a) = p(b)$, por ejemplo, p puede ser constante. Para una solución fuerte u, integrando por partes como en (7.13) y teniendo en cuenta que $p(a) = p(b)$ y que $u'(a) = u'(b)$, la formulación débil se expresa

   $$\int_a^b p\,u'v' + \int_a^b q\,u\,v = \int_a^b f\,v$$

   en el subespacio vectorial $H = \{v \in H^1(I) : v(b) = v(a)\}$, que es también de Hilbert, y en él la aplicación lineal $\Phi(v) = \int_a^b f\,v$ y la forma sesquilineal $\beta(v,u) = \displaystyle\int_a^b p\,v'\,\overline{u}' + \int_a^b q\,v\,\overline{u}\,.$

7.5. Autofunciones y descomposición espectral

La materia que tratamos ahora tiene en el caso de dimensión finita un versión que a buen seguro resultará familiar: la diagonalización de matrices autoadjuntas. La teoría general que sustenta los resultados que presentamos (la Teoría de Operadores) escapa de las pretensiones de estas notas, pero como hemos dicho, las conclusiones son fácilmente comprensibles si se comparan con el caso finito antes citado. Como muestra de las dificultades que se deben soslayar desde el punto de vista teórico, recordaremos que entre espacios vectoriales normados de dimensión infinita existen aplicaciones lineales no continuas, en la terminología del Análisis Funcional los denominados *operadores no acotados*, en particular los operadores diferenciales de uso corriente en las ciencias aplicadas resultan ser no acotados.

El problema que tratamos ahora es la búsqueda de soluciones de la ecuación

$$\begin{cases} -\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x) = \lambda\,u(x)\,, & x \in [a,b] \\ \varepsilon_{11}u(a) + \varepsilon_{12}u'(a) = 0\,, \quad \varepsilon_{21}u(b) + \varepsilon_{22}u'(b) = 0. \end{cases} \tag{7.15}$$

Nótese que para que las condiciones de frontera mixtas homogéneas sean consistentes las constantes ε_{11} y ε_{12} no pueden ser simultáneamente nulas, y lo mismo con ε_{21} y ε_{22}. Por supuesto, las condiciones sobre los coeficientes p y q son las mismas que en la sección anterior: $q(x) \geq 0$ y p de clase $\mathscr{C}^1$ y estrictamente positiva.

Más general: si ρ es una función positiva e integrable en $[a,b]$, un problema del tipo

$$\begin{cases} -\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x) = \lambda\,\rho(x)\,u(x)\,, & x \in [a,b] \\ \varepsilon_{11}u(a) + \varepsilon_{12}u'(a) = 0\,, \quad \varepsilon_{21}u(b) + \varepsilon_{22}u'(b) = 0, \end{cases} \tag{7.16}$$

recibe el nombre de ***problema de Sturm-Liouville***. Pues bien, cuando la función ρ, denominada ***función peso*** o ***función de densidad***, es continua (de hecho basta con que $0 < \mu \leq \rho(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$) resulta que $\beta(u,v) = \int_a^b \rho(x)\,u(x)\,\overline{v}(x)\,dx$ es un producto interno cuya norma asociada es equivalente a la de L^2:

$$\mu\,\|u\|_{L^2} \leq \beta(u,v) = \int_a^b \rho(x)\big|u(x)\big|^2 dx \leq M\,\|u\|_{L^2},$$

razón por la que nos conformaremos con tratar el caso de (7.15). Otra cosa bien distinta ocurre cuando ρ es singular en algunos puntos (puede hacerse nulo o infinito) y no se verifican desigualdades similares a las anteriores. En términos físicos, la aparición de la función peso ρ viene dada por las condiciones particulares del problema a tratar (medios no homogéneos, etc.)

La clave está, hablando de una forma muy simple, en que el operador lineal (diferencial)

$$u \in H^1(I) \longmapsto -\big(p\,u'\big)' + q\,u \in L^2(I)$$

aunque no es acotado es invertible (aunque hemos obviado arriba las condiciones de contorno, se han de tener en cuenta pues son imprescindibles para tener el carácter inyectivo). Su inverso, dado por $f \in L^2(I) \longmapsto u_f \in H^1(I) \subset L^2(I)$, donde u_f es la única solución del problema (7.15) es ***autoadjunto*** en el sentido de que

$$\langle u_f, g\rangle = \int_a^b u_f\,\overline{g} = \int_a^b f\,\overline{u}_g = \langle f, u_g\rangle\,, \qquad f,g \in L^2(I)\,,$$

y además es ***compacto***, esto es: si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones de $L^2(I)$ con $\|f\|_{L^2} \leq 1$, entonces $\big\{u_{f_n}\big\}_{n=1}^\infty$ tiene una subsucesión convergente en $H^1(I)$. No entraremos en la teoría general de operadores compactos y autoadjuntos en espacios separables y nos limitaremos a exponer la forma particular que adquiere al aplicarse al problema que nos ocupa.

Obviamente, el problema de Sturm-Liouville, como toda ecuación lineal homogénea, siempre tiene solución cualquiera que sea $\lambda \in \mathbb{C}$: la función idénticamente nula, pero este caso trivial es el caso menos significativo.

Definición 7.47. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que el problema (7.15) tiene una solución no nula u. En este caso se dice que λ es un ***autovalor*** o ***valor propio*** y que u es una ***autofunción*** o ***función propia*** del problema de Sturm-Liouville.

Observación 7.48. La definición anterior está en total consonancia con las nociones generales de Álgebra Lineal, en este caso relativo a la aplicación lineal $A\,u = -\big(p\,u'\big)' + q\,u$ y las soluciones de $A\,u = \lambda\,u$. El usar el término autofunción en lugar de autovector se debe a la naturaleza de los espacios vectoriales considerados: espacios de funciones.

Teorema 7.49 (de descomposición espectral). Dado el problema de Sturm-Liouville (7.15) se verifica:

I) Todos los autovalores son reales.

II) La familia de autovalores es numerable, es decir, el conjunto de términos de una sucesión, y se puede disponer en forma estrictamente creciente
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$
siendo además $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

III) Autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales respecto del producto interno de $L^2(I)$.

IV) Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto de autofunciones correspondiente al autovalor λ_n es un subespacio vectorial de dimensión 1. En otras palabras, si se fija una autofunción u asociada al autovalor λ_n todas las demás autofunciones asociadas al mismo autovalor son de la forma $\alpha\, u$ con $\alpha \in \mathbb{C}$.

V) Si para cada $n \in \mathbb{N}$ se fija una autofunción u_n correspondiente al autovalor λ_n con $\|u_n\|_{L^2} = 1$, entonces la familia $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base hilbertiana de $L^2(I)$.

Observaciones 7.50. Con la notación del teorema anterior.

I) El conjunto de autovalores $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ es el denominado *espectro* del operador diferencial asociado al problema de Sturm-Lioville. De ahí el nombre dado al teorema.

II) Si no se exige que $q(x) \geq 0$ todas las conclusiones del teorema anterior permanecen válidas. Esto se deduce reformulando la ecuación diferencial en la forma
$$-\big(p(x)\, u'(x)\big)' + \big(q(x) + C\big)\, u(x) = (\lambda + C)\, u(x) = \mu\, u(x)$$
siendo C cualquier constante para la que $q(x) + C \geq 0$, $x \in [a, b]$. Se encuentran así autovalores
$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_n < \ldots$$
y por tanto, para el problema original, autovalores $\lambda_n = \mu_n - C$ con $\lambda_n \uparrow \infty$.

III) Para el problema (7.16) se tiene un resultado similar. Las autofunciones, en este caso, son ortogonales para el producto interno
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \rho(x)\, f(x)\, \overline{g}(x)\, dx\,.$$

Corolario 7.51. Sean p, q funciones definidas en $[a, b]$, q continua y no negativa, f de clase $\mathscr{C}^1$ y estrictamente positiva. Para el problema de Sturm-Lioville con condición de Dirichlet homogénea
$$\begin{cases} -\big(p(x)\, u'(x)\big)' + q(x)\, u(x) = \lambda\, u(x)\,, & x \in [a, b] \\ u(a) = 0\,, \quad u(b) = 0, \end{cases} \tag{7.17}$$
todos los autovalores son positivos, es decir, se pueden ordenar en forma estrictamente creciente
$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty\,.$$

Observaciones 7.52.

I) El corolario anterior se deduce fácilmente del teorema espectral. Primero nótese que $\lambda = 0$ no puede ser autovalor según lo expuesto en la subsección 7.4.1. Por otro lado, si u es solución del problema (7.17), entonces $u \in H_0^1(I)$ y se verifica que
$$0 \leq \int_a^b \big(p\,|u'|^2 + q\,|u|^2\big) = \int_a^b \big(-\big(p\,u'\big)' + q\,u\big)\,\overline{u} = \langle \lambda\, u, u\rangle = \lambda \int_a^b |u|^2.$$
En el lenguaje del Análisis Funcional, un operador diferencial A, como $A\,u = -\big(p\,u'\big)' + q\,u$, que satisface $\langle A\,u, u\rangle \geq 0$ para todo $u \in H_0^1(I)$ se denomina *positivo* en $H_0^1(I)$.

II) Si $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base hilbertiana de $L^2(I)$ consituida por autofunciones del problema (7.17), a la hora de resolver un problema de contorno
$$\begin{cases} -\big(p(x)\, u'(x)\big)' + q(x)\, u(x) = f(x)\,, & x \in [a, b] \\ u(a) = 0\,, \quad u(b) = 0, \end{cases} \tag{7.18}$$

siendo $f \in L^2(I)$ se puede proceder, de forma teórica, como sigue:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n \rangle \, u_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, u_n \,, \qquad \text{siendo} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|_{L^2} < \infty.$$

Puesto que λ_n crece hacia infinito, también es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{\lambda_n^2} < \infty$$

y según la proposición 7.19 el elemento

$$u_f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} \, u_n$$

está en $L^2(I)$, satisface las mismas condiciones de contorno y verifica que

$$-\big(p\,u_f'\big)' + q\,u_f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} \Big(-\big(p\,u_n'\big)' + q\,u_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} \lambda_n \, u_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, u_n = f \,,$$

donde la convergencia de las series anteriores se ha de entender en $L^2(I)$.

Nótese que la convergencia en $L^2(I)$ no implica siquiera la convergencia puntual. Ahora bien, puesto que las funciones u_n están en $H^1(I)$ (en particular, son continuas en $[a, b]$), si se dan condiciones adicionales de convergencia sobre dichas series (por ejemplo, uniforme), se obtendrán propiedades de regularidad adicionales sobre la solución u.

III) En el procedimiento indicado en el punto anterior lo importante, obviamente, no es que los autovalores sean positivos, sino que sean todos no nulos, así que el mismo tratamiento sirve para cualquier problema con condiciones generales de contorno que tenga solución única (es decir tal que el problema homogéneo, con término independiente $f = 0$ sólo tenga la solución trivial, que es lo mismo que decir que $\lambda = 0$ no es autovalor del problema de Sturm-Liouville asociado).

IV) Si el coeficiente q no es positivo puede suceder que $\lambda_k = 0$ para algún k (ver observación ver 7.50.II). El tratamiento difiere un poco de lo anterior: el problema (7.18) tendrá solución sólo para aquellas funciones $f \in L^2(I)$ tales que $\langle f, u_k \rangle = 0$, pero no es única: todas las funciones de la forma

$$u = \sum_{n \neq k} \frac{c_n}{\lambda_n} \, u_n + \alpha \, u_k \,, \qquad \alpha \in \mathbb{C} \,,$$

son solución del problema. Esto está en total consonancia con la teoría general de ecuaciones lineales; en este caso el operador $-\big(p\,u'\big)' + q\,u$ no es inyectivo (su núcleo es el subespacio engendrado por u_k), y conocida una solución particular de la ecuación $-\big(p\,u'\big)' + q\,u = f$, todas las demás se obtienen sumando vectores del núcleo, esto es, de la forma $\alpha\,u_k$.

V) Finalmente, si las condiciones de contorno del problema no son nulas, un cambio en la función incógnita, al estilo de como se expuso en la subsección 7.4.2 permite reducir el problema a otro con condiciones de contorno homogéneas (variando únicamente el término independiente f) y aplicar esta técnica espectral.

Ejemplos 7.53. Los problemas que examinamos a continuación, aunque sencillos por tratarse de coeficientes constantes, ilustran suficientemente el teorema espectral. En particular, es de destacar que para una misma ecuación diferencial los autovalores y autofunciones del problema de Sturm-Lioville asociado dependen de las condiciones de contorno.

I) Consideremos en el intervalo $[0, \pi]$ el problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \,, & x \in [0, \pi] \\ u(0) = 0 \,, \quad u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Las autofunciones son las soluciones de ecuaciones diferenciales

$$-u''(x) = \lambda \, u(x)$$

con condición de Dirichlet homogénea. Se obtienen en este caso los autovalores $\lambda_n = n^2 > 0$, $n \in \mathbb{N}$, y las autofunciones asociadas $u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(n\,x)$.

La familia $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hilbert de $L^2([0,\pi])$.

El problema tiene solución única para cada $f \in L^2([0,\pi])$. Por ejemplo si $f(x) = x$, entonces f se escribe respecto de esta base

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n \rangle\, u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2\,\pi}}{n}\, u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\,x)$$

y la solución del correspondiente problema de contorno es

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n^3} \operatorname{sen}(n\,x)\,.$$

Es fácil comprobar que esta es la representación en la base $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ de la única solución clásica del problema de contorno: la función $u(x) = \dfrac{\pi^2}{6}\, x - \dfrac{1}{6}\, x^3$.

II) Para el problema con condiciones de Neumann

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x)\,, & x \in [0,\pi] \\ u'(0) = 0\,, \quad u'(\pi) = 0, \end{cases}$$

las autofunciones son también soluciones de ecuaciones $-u''(x) = \lambda\, u(x)$. Aparecen de nuevo los autovalores $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, pero con las autofunciones asociadas $v_n = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos(n\,x)$; además $\lambda_0 = 0$ también es autovalor; la función constante $v_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ es una autofunción asociada a λ_0.

La familia $\{v_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ es una base de Hilbert de $L^2([0,\pi])$.

El problema de contorno tendrá solución sólo para aquellas funciones ortogonales a v_0, es decir para las f tales que

$$\langle f, v_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = 0\,,$$

pero no será única. Según lo expuesto en la observación anterior, si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, v_n \rangle\, v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\,x)$$

las soluciones son de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2} \cos(n\,x) + \alpha\, v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2} \cos(n\,x) + \text{cte.}$$

III) El problema

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x)\,, & x \in [0,\pi] \\ u(0) = 0\,, \quad u(\pi) = 0, \end{cases}$$

se reduce al primer ejemplo

$$-u''(x) + u(x) = \mu\, u(x)\,, \qquad -u''(x) = (\mu - 1)\, u(x)\,.$$

Los autovalores son $\mu_n = n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$, con autofunciones asociadas $u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(n\,x)$.

Al igual que el primer ejemplo, este problema es del tipo tratado en la sección 7.4.1.

IV) El problema

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x)\,, & x \in [0,\pi] \\ u'(0) = 0\,, \quad u'(\pi) = 0, \end{cases}$$

es un caso particular del tratado en la sección 7.4.3, por lo que tendrá solución única para cada $f \in L^2([0,\pi])$.

Los autovalores son $\mu_n = n^2 + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (todos positivos) con autofunciones asociadas $v_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ y $v_n = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos(n\,x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Observaciones 7.54.

I) Es común referirse al problema de autovalores estudiado como *problema de Sturm-Lioville regular*; el problema *no regular* consiste en el estudio análogo para intervalos no acotados.

II) La teoría expuesta es sin duda un potente herramienta teórica, pero el cálculo de las autofunciones, es decir, la resolución explícita de la ecuación diferencial lineal, puede ser un problema tan complicado como el original, a no ser que los coeficientes p y q sean "sencillos". No obstante, la necesidad de dar respuesta a diversos modelos de la Física Matemática planteados de forma similar al tratado, ha proporcionado sistemas de funciones ortonormales, incluidas generalmente en el grupo de las denominadas *funciones especiales*, como las funciones de de Bessel, Legendre, etc.

Por ejemplo: las ecuaciones paramétricas de Bessel

$$x^2y''(x) + x\,y'(x) + (\alpha^2x^2 - n^2)\,y(x) = 0\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

admiten una formulación autoadjunta

$$-\big(-x\,y'(x)\big)' + \Big(\alpha^2x - \frac{n^2}{x}\Big)\,y(x) = 0\,,$$

pero nótese que el coeficiente $q(x)$ es singular en cualquier intervalo que contenga a 0, o para el que éste sea una de sus extremos.

También las ecuaciones de Legendre

$$(1 - x^2)\,y''(x) - 2\,x\,y'(x) + n(n+1)\,y(x) = 0\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

admiten una formulación autoadjunta

$$-\big((x^2-1)\,y'(x)\big)' + n(n+1)\,y(x) = 0\,,$$

en este caso es el coeficiente p el que se hace singular (nulo) en los puntos 1 y -1.

III) El problema de Sturm-Lioville que hemos presentado es un caso entre otros muchos del Análisis Funcional, encuadrados en lo que se denomina genéricamente Análisis Armónico, en los que la clave está en encontrar una base hilbertiana adecuada del espacio funcional en que se trabaja. Esto incluye el familiar sistema trigonométrico o, de reciente cuño, la teoría de *ondículas* y los *análisis multirresolución*.

Bibliografía complementaria

[1] H. Brézis: *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*, Ed. Alianza.

[2] P. Hartman: *Ordinary Differential Equations*, Ed. Wiley.

[3] S. Novo, R. Obaya, J. Rojo: *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*, Ed. McGraw-Hill.

[4] H. Weinberger: *A First Course in Partial Differential Equations*, Ed. Dover.

Bibliografía

[1] R.J. Beerends, H.G. Morsche y otros: *Fourier and Laplace Transforms*, Ed. Cambridge Univ. Press.

[2] R.V. Churchill: *Variable Compleja y Aplicaciones*, Ed. McGraw-Hill.

[3] G. Doetsch: *Guide to the applications of the Laplace and Z-transforms*, Ed. Van Nostrand Reinhold, 1971.

[4] F. Galindo, J. Sanz, L.A. Tristán: *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en varias variables*, Ed. Thomson, 2005.

[5] C. Gasquet, P. Witomski: *Fourier Analysis and Applications*, Ed. Springer, 1998.

[6] Hwei P. Hsu: *Análisis de Fourier*, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.

[7] P. Lancaster, K. Salkauskas: *Transform methods in applied mathematics*, Ed. Wiley-Interscience, 1996.

[8] J.E. Marsden, M.J. Hoffman: *Análisis Clásico Elemental*, Ed. Addison-Wesley.

[9] J.E. Marsden: *Basic Complex Analysis*, Ed. Freeman.

[10] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky: *Señales y sistemas*, Ed. Prentice-Hall.

[11] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, J.R. Buck: *Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Ed. Prentice-Hall.

[12] F. Pestana Galván y otros: *Variable Compleja. Un curso práctico*, Ed. Síntesis.

[13] J.G. Proakis, D.G. Manolakis: *Tratamiento digital de señales*, Ed. Prentice-Hall.

[14] H. Reinhard: *Cours de mathématiques du signal*, Ed. Dunod, 1986.

[15] L. Schwartz: *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Ed. Masson, 1987.

[16] J. San Martín, V. Tomeo, I. Uña: *Métodos Matemáticos*, Ed. Thomson.

[17] C. Soize: *Méthodes mathématiques en analyse du signal*, Ed. Masson, 1993.

[18] M.R. Spiegel: *Transformadas de Laplace* (Serie Schaum), Ed. McGraw-Hill.

[19] R. Vich: *Z Transform theory and applications*, Ed. Reidel Pub. Co., 1987.

General:

[20] M. Abramowitz, C.A. Stegun (Eds.): *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Ed. Dover, 1972.

[21] J.W. Harris, H. Stocker: *Handbook of Mathematics and Computational Science*, Ed. Springer.

[22] M.R. Spiegel y otros: *Fórmulas y tablas de Matemática Aplicada* (Serie Schaum), Ed. McGraw-Hill.

En la red:

[23] *WolframMathWorld*, (por Eric Weisstein con recursos de Wolfram Research), URL: `http://mathworld.wolfram.com/`

[24] *The MacTutor History of Mathematics*, (por J. O'Connor y E. Robertson de la Univ. de St Andrews), URL: `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/`

Índice alfabético