GRADO INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS DE TELECOMUNICACIÓN
GRADO INGENIERÍA DE SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN
GRADO INGENIERÍA TELEMÁTICA

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la primera parte del examen de Junio (10 de junio de 2011)

1.- Parametrizar la *curva* Γ intersección de la hoja *superior* del cono $x^2+y^2=4z^2$ y el cilindro $x^2+y^2=4y$.

Solución: La proyección de la curva sobre el plano XY coincide con la base del cilindro, esto es, la circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2. Al considerar coordenadas polares centradas en $(0,2)$ para parametrizar dicha proyección mediante el ángulo polar θ, se tiene que $x(\theta)=2\cos(\theta)$ e $y(\theta)=2\operatorname{sen}(\theta)+2$, donde $\theta\in[0,2\pi]$. Finalmente, la componente z se obtiene al despejar en la ecuación del cono (hoja superior):

$$z=+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{4}}=+\sqrt{y}=+\sqrt{2\operatorname{sen}(\theta)+2}.$$

Por tanto, una parametrización de la curva es de la forma

$$\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3:\theta\mapsto(2\cos(\theta),2\operatorname{sen}(\theta)+2,+\sqrt{2\operatorname{sen}(\theta)+2}).$$

2.- Calcular la integral curvilínea del campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(yz+y-1,xz+x,xy+3z^2\big)$$

a lo largo de cualquier curva Γ de extremos $(0,2,0)$ y $(\sqrt{2},1,1)$.

Solución: Se verifica que el rotacional de $\boldsymbol{F}$ es nulo para todo punto de $\mathbb{R}^3$. Puesto que $\mathbb{R}^3$ es abierto estrellado, por el lema de Poincaré, existe un campo escalar f tal que $\nabla f=\boldsymbol{F}$ en $\mathbb{R}^3$. Dicho potencial escalar f de $\boldsymbol{F}$ se calcula mediante técnicas elementales de integración:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=F_1=yz+y-1\quad\Rightarrow\quad f=\int(yz+y-1)\,dx\quad\Rightarrow\quad f=(yz+y-1)x+C(y,z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=(z+1)x+\frac{\partial C}{\partial y}=F_2=xz+x\quad\Rightarrow\quad C(y,z)=C(z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=yx+\frac{dC}{dz}=F_3=xy+3z^2\quad\Rightarrow\quad\frac{dC}{dz}=3z^2\quad\Rightarrow\quad C(z)=z^3+Cte.$$

Ahora, por la regla de Barrow, si Γ es una curva de extremos $(0,2,0)$ y $(\sqrt{2},1,1)$, entonces

$$\int_\Gamma\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=f(\sqrt{2},1,1)-f(0,2,0)=\sqrt{2}+1.$$

3.- Calcular la circulación del campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(y,-x,z)$$

a lo largo de la curva Γ intersección del plano $z=1$ con la superficie que limita el cubo $[0,2]\times[0,2]\times[0,2]$, indicando la orientación considerada.

Solución: Γ es una curva cerrada, unión de cuatro segmentos. Consideremos la superficie S contenida en el plano horizontal $z=1$ e interior al cubo $[0,2]\times[0,2]\times[0,2]$.

Entonces, $\Gamma = \partial S$. Por el teorema de Stokes,

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iint_{(0,2)\times(0,2)} (0,0,-2)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy = -8,$$

donde la parametrización de S considerada es $\varphi : (0,2)\times(0,2) \to \mathbb{R}^3 : (x,y) \mapsto (x,y,1)$, con vector normal asociado $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$, el cual induce la orientación en Γ que recorre sus vértices en el siguiente orden: $(0,0,1)$, $(2,0,1)$, $(2,2,1)$, $(0,2,1)$, $(0,0,1)$.

4.- Calcular el flujo del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(x^2, 4z, 2y^2\big)$ a través de la frontera del abierto V dado por

$$V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, 0<x<1,\ 0<y<1,\ z>0,\ x+y+z<2\},$$

indicando la orientación considerada.

Solución: Al aplicar el teorema de la divergencia se tiene

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_e\,d\sigma = \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dxdydz,$$

siendo $\boldsymbol{n}_e$ el vector normal exterior a V. Por tanto, la primera integral es el flujo saliente de V a través de ∂V del campo $\boldsymbol{F}$. Ahora, por el teorema de Fubini,

$$\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dxdydz = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^{2-x-y} 2x\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \frac{5}{6}.$$

5.- Determinar en qué puntos del plano es derivable, en sentido complejo, la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + |z|^2.$$

Solución: La función $g(z) = 1/z^2$ es derivable en todos los puntos de $\mathbb{C}$ salvo en el cero. Por otra parte, la función

$$h(z) = |z|^2 = x^2 + y^2, \quad z = x + iy,$$

sólo es derivable en cero, como se puede comprobar fácilmente a partir de las condiciones de Cauchy-Riemann. En consecuencia, $f = g + h$ no es derivable en ningún punto.

6.- Sea Γ el borde del rectángulo cuyos vértices son $-i$, $-i+2$, $i+2$, i. Calcular

$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z-1)^2}\,dz.$$

Solución: Esta cuestión se puede resolver indistintamente usando la fórmula integral de Cauchy o el teorema de los residuos.

El borde del dominio de Jordan $D = \{z\in\mathbb{C} \,:\, 0<\operatorname{Re}(z)<2,\ -1<\operatorname{Im}(z)<1\}$ es Γ, el punto 1 pertenece a D, y la función $f(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Si se aplica la fórmula integral de Cauchy se tiene que

$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z-1)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\,f'(1) = 2\pi i\,\pi\cos(\pi\cdot 1) = -2\pi^2 i.$$

Para aplicar el teorema de los residuos se considera la función $h(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z-1)^2}$, holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, con un polo simple en $z_0 = 1$, de forma que

$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z-1)^2}\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}(h,1) = 2\pi i\,f'(1) = -2\pi^2 i.$$

Para calcular el residuo de h en $z_0 = 1$ se pueden usar la proposición 3.5 o la proposición 3.8 del tema 8 del formulario. Otra forma, más laboriosa, consiste en obtener el desarrollo de Laurent de la función en la corona $0 < |z-1| < \infty$:

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z-1)^2} = \frac{\operatorname{sen}(\pi(z-1)+\pi)}{(z-1)^2} = -\frac{\operatorname{sen}(\pi(z-1))}{(z-1)^2} \\ &= -\frac{\pi}{z-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \pi^{2n+1} (z-1)^{2n-1}, \quad 0 < |z-1| < \infty. \end{aligned}$$

7.- Determinar el radio de convergencia y la función suma en el correspondiente abierto de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}\,.$$

Solución: El radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!}\, w^n$, calculado bien usando el criterio del cociente, bien el de la raíz, vale infinito. A partir de ahí es sencillo deducir que el radio de convergencia de la serie original,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!}\, (z^2)^n,$$

también es infinito.

Puesto que

$$\frac{2n}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

se puede sumar la serie fácilmente: para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} = z\,\mathrm{Ch}(z) - \mathrm{Sh}(z)\,.$$

Otra posiblidad es la siguiente: si llamamos f a la función suma,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

se obtiene derivando que

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(2n+1)}{(2n+1)!}\, z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}\, z^{2n} = z\,\mathrm{Sh}(z), \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

Se obtiene el mismo resultado que antes integrando la función $z\,\mathrm{Sh}(z)$ y teniendo en cuenta que $f(0) = 0$.

8.- Usando la teoría de los residuos, calcular

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 - 1}\, dx\,.$$

Solución: Obviamente la respuesta se obtiene de la fórmula 4.5.1 del tema 8 del formulario,para el cálculo del valor principal de Cauchy de una función usando residuos. Obsérvese que la función $f(z) = 1/(z^4 - 1)$ es un cociente de polinomios, el grado del denominador es 4 y el grado del denominador es 0, además todos los polos de f (1,-1,i

y $-i$) son simples, por lo que se puede aplicar la fórmula citada para obtener que

$$\begin{aligned} VP\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx &= 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i) + \pi i\,(\mathrm{Res}(f,1)+\mathrm{Res}(f,-1)) \\ &= 2\pi i\,\frac{1}{4\cdot i^3} + \pi i\,(\frac{1}{4\cdot 1^3} + \frac{1}{4\cdot(-1)^3}) = -\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$