1 Dada la ecuación diferencial
$$y' = \frac{y^2 + xy}{x^2},$$

1. Resolver el problema de valor inicial $y(1) = 2$.
2. Aproximar el valor $y(1.2)$ por el método de Euler.

Solución:

1. Podemos escribir la ecuación en la forma
$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right) \equiv f\left(\frac{ty}{tx}\right), \quad (t \in \mathbb{R})$$
y por lo tanto es homogénea. Haciendo el cambio $y(x) = x \cdot v(x)$ se transforma en la ecuación de variables separables
$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x}.$$
Resolviendo esta ecuación se obtiene
$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + C$$
y deshaciendo el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$ se obtiene la solución
$$y = -\frac{x}{\ln|x| + C}$$
Para obtener el valor de la constante utilizamos la condición inicial:
$$2 = y(1) = -\frac{1}{\ln|1| + C}$$
de donde se sigue $C = -1/2$.

2. Tomando $h = 0.2$ en la fórmula de Euler (ver formulario), $f(y_1) = y_0 + 0.2\, f(x_0, y_0)$, y teniendo en cuenta la condición inicial $x_0 = 1, y_0 = 2$, se tiene:
$$y(1.2) = 2 + 0.2 \cdot f(1,2) = 2 + 0.2 \cdot \frac{2^2 + 1 \cdot 2}{1^2} = 3.2 \quad \blacklozenge$$

2 Dado el siguiente problema de Sturm-Liouville

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad (0 < x < 1),$$

$$X'(0) = 0, \; X(1) + X'(1) = 0.$$

1. Hallar la ecuación que han de satisfacer los autovalores λ_k del problema.
2. Hallar las autofunciones $X_k(x)$ normalizadas.
3. Dar la expresión formal de los coeficientes del desarrollo de la función $f(x) = x$, $0 < x < 1$, en el sistema de autofunciones del apartado anterior.

Solución:

1. Teniendo en cuenta que en este caso $(a, b) = (0, 1)$, la solución general de la ecuación es de la forma:

$$X(x) = A \operatorname{sen}(\omega x) + B \cos(\omega x)$$

y por tanto

$$X'(x) = \omega A \cos(\omega x) - \omega B \operatorname{sen}(\omega x)$$

Aplicando las dos condiciones de contorno resulta:

$$0 = X'(0) = \omega A \implies A = 0$$

$$0 = X(1) + X'(1) = B \cos(\omega) - \omega \operatorname{sen}(\omega) \implies \frac{1}{\omega} = \tan(\omega).$$

Los autovalores del problema son $\lambda_k = -\omega_k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, donde los w_k satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{\omega_k} = \tan(\omega_k)$$

2. Las autofunciones del problema tienen que ser de la forma

$$X_k(x) = \cos(\omega_k x) \quad k = 1, 2, \ldots$$

Hallemos el cuadrado de la norma de estas autofunciones

$$\|X_k\|^2 = \int_0^1 \cos^2(\omega_k x)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \cos(2\omega_k x))\, dx = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\operatorname{sen}(2\omega_k)}{2\omega_k} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2 \operatorname{sen}(\omega_k) \cos(\omega_k)}{2 \, \frac{1}{\tan(\omega_k)}} \right] = \frac{1 + \operatorname{sen}^2(\omega_k)}{2}$$

Dividiendo las $X_k(x)$ por $\|X_k(x)\|$ se obtienen las autofunciones normalizadas $\Phi_k(x)$,

$$\Phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{1+\operatorname{sen}^2(\omega_k)}}\,\cos(\omega_k x) \quad k = 1, 2\ldots$$

3. Se pide hallar los coeficientes c_k tales que

$$x = \sum_k c_k \cos(\omega_k x), \quad (0 < x < 1).$$

Los c_k vienen dados en este caso por la expresión:

$$c_k = \frac{1}{\|\cos(\omega_k x)\|^2}\int_0^1 x\cos(\omega_k x)\,dx = \frac{2}{1+\operatorname{sen}^2(\omega_k)}\int_0^1 x\cos(\omega_k x)\,dx$$

$$= \frac{2[-1+\cos(\omega_k)+\omega_k\operatorname{sen}(\omega_k)]}{\omega_k^2[1+\operatorname{sen}^2(\omega_k)]} \quad \blacklozenge$$

3 La temperatura en una varilla está descrita por el siguiente problema de valores de contorno

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + tx \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0,$$

donde las unidades de t están elegidas de tal manera que el coeficiente de difusión térmica α^2 del material, puede tomarse como la unidad. Hallar la distribución de temperaturas en la varilla en el instante $t = 5$.

Solución:

La solución ha de ser de la forma

$$u(x,t) = \sum_k U_k(t) X_k(x)$$

donde las $X_k(x)$ son las autofunciones del problema de Sturm-Liouville asociado, que en este caso, al tratarse de un problema con condiciones de contorno de Dirichlet, vendrán dadas por $X_k(x) = \operatorname{sen}(k\pi x)$, y las $U_k(t)$ son soluciones del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} U_k'(t) &= \lambda_k U_k(t) + F_k(t) \\ U_k(0) &= c_k \qquad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{1}$$

siendo $\lambda_k = -k^2\pi^2$ los autovalores del PSL asociado, y $U_k(t)$ y $F_k(t)$ los coeficientes del desarrollo de $u(x,0)$ y $f(x,t)$ en el sistema de autofunciones $X_k(x)$, es decir,

$$u(x_0) = 0 = \sum_k 0 \cdot \operatorname{sen}(k\pi x) \quad k = 1, 2, \dots$$
$$f(x,t) = tx = \sum_k F_k(t) \operatorname{sen}(k\pi x) \quad k = 1, 2, \dots$$

Los $F_k(t)$ se calculan por la fórmula

$$F_k(t) = t \int_0^1 x \operatorname{sen}(k\pi x)\, dx = \frac{(-1)^{k+1}\, t}{k\pi}$$

De manera que el problema (1) se puede escribir finalmente en la forma

$$\begin{aligned} U_k'(t) &= \lambda_k U_k(t) + \tfrac{(-1)^{k+1}\, t}{k\pi} \\ U_k(0) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

donde la solución general de la ecuación homogénea es $U_k'(t) = \lambda_k U_k(t)$ es $U_k(t) = Ce^{\lambda_k t}$. Ahora utilizamos el método de variación de la constante para hallar una solución particular de la ecuación completa. Suponemos una solución particular de la forma $U_k(t) = C(t)e^{\lambda kt}$. Derivando esta expresión y llevándola a (2) se tiene:

$$U_k'(t) = C'(t)e^{\lambda_k t} + C(t)\lambda_k e^{\lambda_k t} = \lambda_k C(t)e^{\lambda_k t} + \frac{(-1)^{k+1}\,t}{k\pi}$$

de donde

$$C'(t) = \frac{(-1)^{k+1}\,t}{k\pi}e^{-\lambda_k t}$$

Integrando por partes se llega a

$$C(t) = \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k^2 k\pi}(-e^{-\lambda_k t})(1+\lambda_k t) = \frac{(-1)^k\,e^{-\lambda_k t}}{\lambda_k^2 k\pi}(1+\lambda_k t)$$

salvo una constante aditiva.

La solución general de la ecuación comopleta es pues:

$$U_k(t) = Ce^{\lambda_k t} + \frac{(-1)^k(1+\lambda_k t)}{\lambda_k^2 k\pi}.$$

Hallamos la solución particular teniendo en cuenta la condición inicial

$$0 = U_k(0) = C + \frac{(-1)^k}{k\pi\lambda_k^2} \quad \Longrightarrow C = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi\lambda_k^2}.$$

A partir de todo lo anterior podemos escribir:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^5\pi^5}e^{-k^2\pi^2 t} + \frac{(-1)^k(1-k^2\pi^2 t)}{k^5\pi^5}\sin(k\pi x) \quad (x < 0 < 1).$$

Para obtener la distribución de la temperatura en la varilla en el instante $t = 5$, basta sustituir este valor de t en la expresión anterior ♦