Hallar la solución del siguiente problema de valores iniciales y de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = \operatorname{sen} x.$$

**Solución**

Las condiciones de contorno son de Dirichlet y por tanto los autovalores y las autofunciones del PSL asociado, teniendo en cuenta que en este caso $L = \pi$, son:

$$\lambda_k = -\omega_k^2 = -k^2, \quad X_k = \operatorname{sen}(kx), \quad (w_k = k).$$

El desarrollo de las funciones $u(x,0)$ y $u_t(x,0)$ en este sistema de autofunciones es

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 1 \cdot \operatorname{sen}(1 \cdot x).$$

De aquí se sigue $A_1 = 1,\ B_1 = 1/c\omega_1$, y como en este problema $c = 1$ y $\omega_1 = 1$, tenemos finalmente $A_1 = B_1 = 1$. La solución del problema es por tanto

$$u(x,t) = (\cos(t) + \operatorname{sen}(t)) \operatorname{sen}(x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

Hallar la solución del siguiente problema de valores iniciales y de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right).$$

**Solución**

Las condiciones de contorno son de Dirichlet y por tanto los autovalores y las autofunciones del PSL asociado son:

$$\lambda_k = -\omega_k^2 = -k^2\pi^2/L^2, \quad X_k = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (w_k = k\pi/L).$$

Los desarrollos de las funciones $u(x,0)$ y $u_t(x,0)$ en este sistema de autofunciones son

$$u(x,0) = \sum_k 0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \quad u_t(x,0) = 1 \cdot \left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

De aquí se sigue $A_k = 0$ para todo $k$ y $B_3 = 1/c\omega_3$, siendo $\omega_3 = 3\pi/L$. La solución del problema es por tanto

$$u(x,t) = \frac{L}{3\pi c} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi c}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$