1 Dada la función $f(x) = \pi$:

i) Hallar su desarrollo en serie de senos el intervalo $[1, 3]$

ii) Hallar su desarrollo en serie de cosenos en el intervalo $[2, 5]$.

Solución

i) El conjunto ortogonal correspondiente es $S_k(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{k\pi(x-1)}{2}\right)$,

$$\beta_k = \frac{2}{2}\int_1^3 \pi \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi(x-1)}{2}\right)\,dx = -\frac{2}{k}\cos\left(\frac{k\pi(x-1)}{2}\right)\Bigg|_1^3 = -\frac{2}{k}[\cos(k\pi)-\cos(0)] = \begin{cases} 0 & (k \text{ par}) \\ \frac{4}{k} & (k \text{ impar}) \end{cases}$$

Podemos escribir entonces que

$$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2k-1} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi(x-1)}{2}\right), \quad x \in [1, 3].$$

ii) El conjunto ortogonal correspondiente es $C_k(x) = \cos\left(\dfrac{k\pi(x-2)}{3}\right)$,

$$\alpha_0 = \frac{1}{3}\int_2^5 \pi\,dx = \pi$$

$$\alpha_k = \frac{2}{3}\int_2^5 \pi \cos\left(\frac{k\pi(x-2)}{3}\right)\,dx = \frac{2}{k}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi(x-2)}{3}\right)\Bigg|_2^5 = \frac{2}{k}[\operatorname{sen}(k\pi) - \operatorname{sen}(0)] = 0 \quad (k \geqslant 1).$$

En este caso

$$\pi = \pi\cos\left(\frac{0\cdot\pi(x-2)}{3}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} 0\cdot\cos\left(\frac{k\pi(x-2)}{3}\right) = \pi, \quad x \in [2, 5].$$

2 Dado el siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$X'' = \lambda X, \quad X'(-\pi) = 0,\ X'(\pi/2) = 0$$

i) Hallar los autovalores

ii) Hallar las autofunciones normalizadas.

Solución

El intervalo problema es $[a, b]$ donde $a = -\pi$ y $b = \pi/2$. Consideramos una solución de la forma

$$X(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega(x+\pi)) + B\cos(\omega(x+\pi)).$$

Derivando ésta expresión obtenemos

$$X'(x) = \omega A\cos(\omega(x+\pi)) - \omega B\sin(\omega(x+\pi)).$$

De la primera condición de contorno,

$$X'(-\pi) = A\cos(0) + B\,\mathrm{sen}(0) = 0,$$

se sigue que $A = 0$.

De la segunda condición de contorno

$$X'(\pi/2) = -\omega B\sin(\omega(\pi/2+\pi)) = 0,$$

se sigue que $\sin(3\omega\pi/2) = 0$ o lo que es igual $\omega = \frac{2k}{3}$.

Los autovalores del problema son $\lambda_k = -\frac{4k^2}{9}$ $(k \geqslant 0)$. Las autofunciones son 1 y $\cos\left(\frac{2k}{3}(x+\pi)\right)$, y teniendo en cuenta que

$$\int_{-\pi}^{\pi/2} 1 \cdot 1\, dx = \frac{3\pi}{2} \quad \text{y} \quad \int_{-\pi}^{\pi/2} \cos^2\left(\frac{2k}{3}(x+\pi)\right) dx = \frac{\pi/2 - (-\pi)}{2} = \frac{3\pi}{4},$$

las autofunciones normalizadas son $\sqrt{\dfrac{2}{3\pi}} \cdot 1$ y $\dfrac{2}{\sqrt{3\pi}}\cos\left(\dfrac{2k}{3}(x+\pi)\right)$.

1 Dada la función $f(x) = \pi^2$:

i) Hallar su desarrollo en serie de senos el intervalo $[2, 5]$

ii) Hallar su desarrollo en serie de cosenos en el intervalo $[1, 3]$.

Solución

i) El sistema ortogonal correspondiente es $S_k(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{k\pi(x-2)}{3}\right)$,

$$\beta_k = \frac{2}{3}\int_2^5 \pi^2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi(x-2)}{3}\right)\,dx = -\frac{2\pi}{k}\cos\left(\frac{k\pi(x-2)}{3}\right)\Bigg|_2^5 = -\frac{2\pi}{k}[\cos(k\pi) - \cos(0)] = \begin{cases} 0 & (k \text{ par}) \\ \frac{4\pi}{k} & (k \text{ impar}) \end{cases}$$

Podemos escribir entonces que

$$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi}{2k-1} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi(x-2)}{3}\right), \quad x \in [2, 5].$$

ii) El sistema ortogonal correspondiente es $C_k(x) = \cos\left(\dfrac{k\pi(x-1)}{2}\right)$,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\int_1^3 \pi^2\,dx = \pi^2$$

$$\alpha_k = \frac{2}{2}\int_1^3 \pi^2 \cos\left(\frac{k\pi(x-1)}{2}\right)\,dx = \frac{2\pi}{k}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi(x-1)}{2}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{2\pi}{k}[\operatorname{sen}(k\pi) - \operatorname{sen}(0)] = 0 \quad (k \geqslant 1).$$

En este caso

$$\pi^2 = \pi^2 \cos\left(\frac{0\cdot\pi(x-1)}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} 0\cdot\cos\left(\frac{k\pi(x-1)}{2}\right) = \pi^2, \quad x \in [1, 3].$$

2 Dado el siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$X'' = \lambda X, \quad X(-\pi/2) = 0,\ X(\pi) = 0$$

i) Hallar los autovalores

ii) Hallar las autofunciones normalizadas.

Solución

El intervalo problema es $[a, b]$ donde $a = -\pi/2$ y $b = \pi$. Consideramos una solución de la forma

$$X(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega(x + \pi/2)) + B\cos(\omega(x + \pi/2)).$$

De la primera condición de contorno

$$X(-\pi/2) = A\,\mathrm{sen}(0) + B\cos(0) = 0,$$

se sigue que $B = 0$.

De la segunda condición de contorno

$$X(\pi/2) = A\sin(\omega(\pi + \pi/2)) = 0,$$

se sigue que $\sin(3\omega\pi/2) = 0$ o lo que es igual $\omega = \frac{2k}{3}$.

Los autovalores del problema son $\lambda_k = -\frac{4k^2}{9}$ $(k \geqslant 1)$. Las autofunciones $\mathrm{sen}\left(\frac{2k}{3}(x + \pi/2)\right)$, y teniendo en cuenta que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} \sin^2\left(\frac{2k}{3}(x + \pi/2)\right)\,dx = \frac{\pi - (-\pi/2)}{2} = \frac{3\pi}{4},$$

las autofunciones normalizadas son $\dfrac{2}{\sqrt{3\pi}}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{2k}{3}(x + \pi/2)\right)$.