

## Lección 12: Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales

En el tema 10 hemos tratado algunos problemas físicos cuyos correspondientes modelos matemáticos estaban gobernados por ecuaciones diferenciales. Tales modelos requerían que las funciones a determinar dependiesen de una sola variable, bien con significado temporal o bien espacial. Sin embargo, en muchos otros problemas esto no parece muy realista. Por ejemplo, si uno se plantea observar el modo de vibración de una cuerda de una guitarra, parece razonable pensar que la posición de ésta no sea la misma en toda su extensión, ni que en un punto concreto la cuerda siempre esté igual; en otras palabras, para modelizar la vibración de una cuerda necesitaremos una función con al menos dos variables que, para cada lugar de la cuerda y en cada instante de tiempo, mida el desplazamiento de ésta con respecto a su estado inicial.

Por otro lado, si pretendemos que el modelo esté gobernado por una ecuación diferencial, ahora tendremos que tener en cuenta con respecto a qué variable derivamos. Las ecuaciones diferenciales que ahora manejamos se llaman ecuaciones en derivadas parciales (EDPs para abreviar) puesto que incorporan derivación con respecto a más de una variable. Además, para completar el modelo, necesitaremos imponer condiciones previas a la función con respecto a cada una de las variables. Serán condiciones iniciales para la variable que mide la evolución del modelo. Pero también, en cada instante, tendremos condiciones relacionadas con la variable espacial, llamadas condiciones de contorno, que dependerán de aspectos físicos del modelo.

En este tema nos centraremos, a modo de introducción, en dos tipos de EDPs: la ecuación de difusión y la ecuación de ondas. La primera se usa en varios modelos matemáticos, como por ejemplo la distribución de temperaturas en diferentes soportes físicos, en los que una de las dimensiones es muy superior a las demás y por tanto puede asumirse que son unidimensionales (por ejemplo, una barra delgada). La segunda ecuación busca, por ejemplo, una primera aproximación a la evolución de movimientos ondulatorios en diversos fenómenos físicos: vibración de cuerdas, evolución de ondas en canales, etc.

Para poder determinar las soluciones de problemas con valores iniciales y condiciones frontera asociados a estas ecuaciones utilizaremos la llamada técnica de separación de variables. La idea básica de este procedimiento es la siguiente: se trata de buscar la solución  $u(x, t)$  como superposición de soluciones  $u_n(x, t)$  del tipo de variables separadas, es decir, de la forma

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t),$$

para ciertas funciones  $X_n(x)$ ,  $T_n(t)$ . Esta hipótesis, que tiene su motivación física, proporciona ecuaciones diferenciales para las funciones  $X_n(x)$  y  $T_n(t)$ , pero ya de una sola variable. Su resolución, teniendo en cuenta las condiciones iniciales y de frontera impuestas en el problema, lleva a expresar la solución original como suma (probablemente infinita) de funciones con variables separadas. El tema requiere entonces el uso de lo explicado en la lección 11 sobre problemas de Sturm Liouville y desarrollos ortogonales, pues éstos surgirán de manera natural al aplicar este método. la lección se completa con una descripción de los correspondientes problemas de valor inicial, sin condiciones de contorno.

## 1 Ecuación de difusión

### 1.1 Introducción

La ecuación de difusión

$$(1) \quad u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T,$$

se presenta con frecuencia en las aplicaciones: transmisiones eléctricas en líneas, conducción de calor, especies químicas, dinámica de poblaciones, probabilidades, electrónica, óptica, . . . .

Es muy importante señalar que el parámetro  $D$  (que es el llamado coeficiente de difusión) es siempre estrictamente positivo ( $D > 0$ ). Observemos que

$$[D] = [x]^2[t]^{-1} = L^2T^{-1}.$$

La ecuación (1) es el prototipo de las llamadas ecuaciones parabólicas.

Pasamos a explicar algunos fenómenos regidos por la ecuación de difusión.

#### 1.1.1 Ecuación de la telegrafía

Un primer modelo que puede ilustrar la ecuación es el estudio de la evolución del flujo eléctrico en un conductor lineal, como un hilo telefónico o un cable submarino. Llamemos

- $L$  a la inductancia,
- $C$  a la capacitancia,
- $R$  a la resistencia,

- $G$  a la perditancia,

por unidad de longitud, y sean  $i = i(x, t)$ ,  $v = v(x, t)$  la intensidad y el voltaje, respectivamente. Las leyes de Kirchoff llevan al famoso sistema de Lord Kelvin

$$\begin{cases} i_x + Cv_t + Gv = 0, \\ v_x + Li_t + Ri = 0. \end{cases}$$

Derivando respecto de  $t$  y tras algunas manipulaciones elementales se llega a

$$\begin{cases} i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi, \\ v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv. \end{cases}$$

Cuando  $CL$  sea despreciable, encontramos las ecuaciones

$$i_t = Di_{xx} - Ei, \quad v_t = Dv_{xx} - Ev$$

siendo

$$D = \frac{1}{CR + GL}, \quad E = \frac{GR}{CR + GL}.$$

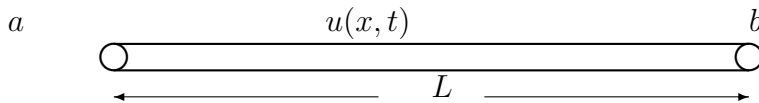
Los sumandos  $-Ei$  y  $-Ev$  corresponden a “términos de reacción”, según la terminología usual de las ecuaciones de difusión (pero no la del electromagnetismo). Es sencillo comprobar que las funciones

$$I(x, t) = i(x, t)e^{Et}, \quad V(x, t) = v(x, t)e^{Et}$$

satisfacen la ecuación de difusión (1), es decir

$$I_t(x, t) = DI_{xx}(x, t), \quad V_t(x, t) = DV_{xx}(x, t).$$

### 1.1.2 Ecuación del calor



La ecuación del calor presenta la ventaja de que permite explicar muy bien las condiciones de contorno. Por otra parte su deducción es sencilla.

Supongamos una barra conductora del calor que ocupa el intervalo  $I = [a, b]$ . En principio la composición de la barra puede ser variable. Se definen las siguientes variables y cantidades:

- $u(x, t)$ : la temperatura (absoluta) en el punto  $x$  de la varilla ( $a \leq x \leq b$ ) y en el instante  $t$ .
- $\sigma(x, t)$ : la densidad de calor por unidad de longitud, en  $x \in I$  y en el instante  $t$ . Esto significa que dado cualquier subintervalo  $[a_0, b_0] \subset I$ , la cantidad de calor contenida en  $[a_0, b_0]$  en el instante  $t$  es

$$\int_{a_0}^{b_0} \sigma(x, t) dx.$$

Por tanto

$$(I) = \frac{d}{dt} \int_{a_0}^{b_0} \sigma(x, t) dx = \int_{a_0}^{b_0} \sigma_t(x, t) dx$$

es la variación por unidad de tiempo de la cantidad de calor contenida en  $[a_0, b_0]$ , en el instante  $t$ . La relación con la temperatura viene dada a partir de la densidad de masa  $\rho = \rho(x)$  y el calor específico  $c = c(x)$  del material de que consta la varilla. Así, se tiene

$$(2) \quad \sigma(x, t) = \rho(x)c(x)u(x, t).$$

Para materiales homogéneos,  $\rho$  y  $c$  son constantes y se tiene por tanto que  $\sigma(x, t) = Ku(x, t)$ , con  $K$  constante.

- $q(x, t)$ : el flujo de calor, esto es, la cantidad de calor que atraviesa  $x \in I$  por unidad de tiempo, en el instante  $t$ . Por convenio, diremos que  $q \geq 0$  cuando atraviere  $x$  de izquierda a derecha y  $q \leq 0$  en el otro caso. Por tanto

$$(II) = q(a, t) - q(x, t)$$

representa la cantidad total de calor que se incorpora a  $[a, x]$  desde el resto del intervalo, por unidad de tiempo, en el instante  $t$ .

- $F(x, t)$ : la cantidad de calor aportada ( $F \geq 0$ ) o retirada ( $F \leq 0$ ) por unidad de longitud y de tiempo desde el exterior. Notemos que la integral

$$(III) = \int_a^x F(y, t) dy$$

representa la cantidad total aportada desde el exterior sobre  $[a, x]$  por unidad de tiempo, en el instante  $t$ .

La deducción de la ecuación está basada en dos principios físicos:

- Conservación de la energía térmica o balance de calor:

$$(I) = (II) + (III),$$

que, aplicada al intervalo  $[a, x]$ , para  $x \in [a, b]$ , se escribe

$$\int_a^x \sigma_t(y, t) dy = q(a, t) - q(x, t) + \int_a^x F(y, t) dy.$$

Esta es la ley de conservación en forma integral. Se debe entender que la ley consiste en la igualdad anterior para todo subintervalo  $[a, x]$  de  $I$  y todo instante  $t$ . Derivando respecto de  $x$ , encontramos

$$(3) \quad \sigma_t(x, t) = -q_x(x, t) + F(x, t),$$

que es la ley de conservación del calor en forma diferencial.

- La ley de Fourier, que establece que el calor fluye de las zonas de más temperatura a las de menos temperatura, de forma proporcional al desnivel de temperaturas, lo que se traduce en la relación

$$(4) \quad q(x, t) = -k(x)u_x(x, t),$$

siendo  $k$  la llamada conductividad térmica.

Ahora, de (2),(3) y (4) se tiene la ecuación del calor

$$\rho(x)c(x)u_t(x, t) = -(-k(x)u_x(x, t))_x = (k(x)u_x(x, t))_x + F(x, t),$$

Cuando el material sea homogéneo,  $\rho$ ,  $c$  y  $k$  son constantes, y aparece la ecuación de difusión

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + f(x, t),$$

siendo

$$D = \frac{k}{\rho c} > 0, \quad f(x, t) = \frac{1}{\rho c}F(x, t).$$

### 1.1.3 Condiciones de contorno

Para centrar ideas nos vamos a situar en el contexto de la ecuación del calor. Supongamos que el ambiente exterior en los puntos  $a$  y  $b$  tiene temperaturas conocidas  $U_a(t)$  y  $U_b(t)$  en cada instante  $t$ . La ley de Newton establece que el flujo calorífico hacia el exterior en un extremo es proporcional a la diferencia de las

temperaturas del extremo y del exterior. Como el flujo es  $q$  (positivo si es hacia la derecha), encontraremos

$$q(a, t) = h_a(U_a(t) - u(a, t)), \quad q(b, t) = h_b(u(b, t) - U_b(t)),$$

para ciertas constantes  $h_a > 0$ ,  $h_b > 0$  que dependerán de las propiedades de transmisión calorífica. Recordando que

$$q(x, t) = -k(x)u_x(x, t),$$

llegamos a las condiciones de contorno

$$h_a u(a, t) - k(a)u_x(a, t) = h_a U_a(t),$$

$$h_b u(b, t) + k(b)u_x(b, t) = h_b U_b(t).$$

Estas son las condiciones de contorno con sentido físico más habituales. Se llaman condiciones de tipo Robin, de tercer tipo o de radiación. Hay dos situaciones límite muy importantes:

- Cuando la transmisión de calor con el exterior es extraordinariamente fácil es porque  $h$  es muy grande. Dividiendo por  $h$  y haciendo tender  $h \rightarrow +\infty$  obtenemos las condiciones de contorno Dirichlet o de primer tipo

$$u(a, t) = U_a(t),$$

$$u(b, t) = U_b(t).$$

- Por el contrario, cuando la transmisión en los extremos es muy difícil es porque  $h$  es muy pequeño. Haciendo  $h \rightarrow 0$  y llegamos a las condiciones Neumann homogéneas o de segundo tipo

$$-k(a)u_x(a, t) = 0,$$

$$k(b)u_x(b, t) = 0.$$

De todas maneras, mediante algún otro mecanismo físico o bien por medición directa, tiene sentido imaginar que los flujos de calor salientes en los extremos  $q_a$  y  $q_b$  son dados

$$-k(a)u_x(a, t) = q_a(t),$$

$$k(b)u_x(b, t) = q_b(t).$$

Estas son las condiciones Neumann no homogéneas.

En resumen, si llamamos  $k_a = k(a)$ ,  $k_b = k(b)$ ,  $g_a(t) = h_a U_a(t)$ ,  $g_b(t) = h_b U_b(t)$  en los casos Robin y Dirichlet, o bien  $g_a(t) = q_a(t)$ ,  $g_b(t) = q_b(t)$  en el caso Neumann, llegamos a que todas las condiciones de contorno (incluyendo situaciones mixtas) se pueden escribir siempre como

$$(5) \quad \begin{cases} h_a u(a, t) - k_a u_x(a, t) = g_a(t), \\ h_b u(b, t) + k_b u_x(b, t) = g_b(t), \end{cases}$$

con  $h_a, k_a, h_b, k_b \geq 0$ ,  $h_a + k_a > 0$ ,  $h_b + k_b > 0$ .

Por otro lado, si imaginamos que la barra se cierra (entonces  $x = a$  es  $x = b$ ), habría que imponer la continuidad de la temperatura y del flujo, lo que conduce a las condiciones periódicas.

## 1.2 Problema de valores iniciales y de contorno

Conocidos

- una condición inicial  $u_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- un coeficiente de difusión  $D > 0$ ,
- un término complementario  $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- los parámetros  $h_a, k_a, h_b, k_b$  de (5),
- los valores  $g_a, g_b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  en (5),

planteamos el problema de valores iniciales y de contorno

$$(6) \quad \begin{cases} u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + f(x, t), & a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & a \leq x \leq b, \\ h_a u(a, t) - k_a u_x(a, t) = g_a(t), & 0 \leq t \leq T, \\ h_b u(b, t) + k_b u_x(b, t) = g_b(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

En el resto de la sección vamos a estudiar las propiedades de las soluciones y explicaremos la resolución de la misma mediante el método de separación de variables. Las condiciones de contorno de tipo periódico tienen un tratamiento completamente similar, por lo que no las vamos a considerar.

## 1.3 Propiedades

### 1.3.1 Principio del máximo

**Teorema 1** *Supongamos que  $f \leq 0$  en (6). Entonces, para cualquier punto  $a \leq x \leq b$  e instante  $0 \leq t \leq T$  se cumple*

$$u(x, t) \leq \max \left\{ \max_{a \leq \xi \leq b} u_0(\xi), \max_{0 \leq \tau \leq t} u(a, \tau), \max_{0 \leq \tau \leq t} u(b, \tau) \right\}.$$

El significado del principio es muy interesante: permite estimar el comportamiento en el interior del dominio (zona generalmente no accesible) mediante estimaciones de la condición inicial y medidas en la frontera (accesible). Notemos que en particular, si  $u_0 \leq 0$ ,  $g_a \leq 0$ ,  $g_b \leq 0$  y  $f \leq 0$ , se deduce que la solución  $u$  es siempre negativa.

Por descontado, si  $f \geq 0$  entonces tiene lugar el principio del mínimo.

**Ejemplo 1.** Para el problema

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + f(x, t), & 0 \leq x \leq 1, & \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= g_0(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(1, t) &= g_1(t), & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} f(x, t) &= -2t - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), & u_0(x) &= x - 1, \\ g_0(t) &= 0, & g_1(t) &= -t^2, \end{aligned}$$

se tiene que para  $x \in [0, 1]$ ,  $t \geq 0$ , los datos cumplen que  $f(x, t)$ ,  $u_0(x)$ ,  $g_0(t)$ ,  $g_1(t) \leq 0$ . El principio del máximo afirma entonces que la solución satisface

$$u(x, t) \leq \max \left\{ \max_{0 \leq \xi \leq 1} u_0(\xi), \max_{0 \leq \tau \leq t} u(0, \tau), \max_{0 \leq \tau \leq t} u(1, \tau) \right\} = 0.$$

### 1.3.2 Método de la energía

Dada una solución  $u$  de (6), vamos a definir su “energía” en el instante  $t$  como

$$E(t) = (1/2) \|u(\cdot, t)\|^2 = \frac{1}{2} \int_a^b u(x, t)^2 dx.$$



Hay que notar que no se trata de la energía calorífica, pues ésta es

$$\int_a^b c(x)\rho(x)u(x,t) dx,$$

sino que  $E(t)$  es una mera expresión matemática.

**Teorema 2** *Supongamos que  $f$ ,  $g_a$  y  $g_b$  son nulas. Entonces la energía es decreciente en  $0 \leq t \leq T$ .*

**Demostración.** Usando la ecuación (6) e integrando por partes, encontramos

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_a^b u_t(x,t) u(x,t) dx = D \int_a^b u_{xx}(x,t) u(x,t) dx \\ &= Du_x(x,t)u(x,t)|_{x=a}^{x=b} - D \int_a^b u_x(x,t)^2 dx, \end{aligned}$$

una expresión que, por las condiciones de contorno, ya vimos en la lección anterior (al probar la negatividad de los autovalores) que es siempre negativa. Así  $E'(t) \leq 0$ .  $\square$

El teorema anterior permite establecer la unicidad de soluciones en (6), para condiciones de contorno generales, algo elemental para validar la ecuación como modelo matemático. Es importante señalar que la unicidad sólo está garantizada para tiempos futuros.

**Corolario 1** *El problema (6) admite a lo sumo una solución, cualesquiera que sean  $f$ ,  $u_0$ ,  $g_a$  y  $g_b$ .*

**Demostración.** Dadas dos posibles soluciones  $u^I$  y  $u^{II}$  para un mismo sistema de datos, formemos la función diferencia  $\delta = u^{II} - u^I$ , que es solución para los datos homogéneos. La energía  $E(t)$  de  $\delta$  será decreciente, por tanto

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0,$$

luego

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_a^b |\delta(x,t)|^2 dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Entonces  $\delta(x,t) = 0$  (pues al ser el integrando  $\geq 0$  se puede afirmar que integral nula implica integrando nulo) y por lo tanto  $u^I(x,t) = u^{II}(x,t)$ .  $\square$

### 1.3.3 Principio de superposición

La naturaleza lineal del problema se refleja en el llamado principio de superposición. Supongamos que los datos se pueden escribir como “combinación lineal” de otros datos en el sentido de que

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k f_k(x, t), \quad u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k u_{0,k}(x),$$

así como

$$g_a(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k g_{a,k}(t), \quad g_b(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k g_{b,k}(t).$$

Las series anteriores se suponen convergentes para  $a \leq x \leq b$  y  $0 \leq t \leq T$ . Hay que resaltar que los coeficientes escalares  $\mu_k$ ,  $k \geq 1$ , son los mismos en los cuatro desarrollos.

Supongamos ahora que para cada valor de  $k \geq 1$  es posible resolver el problema con datos  $f_k$ ,  $u_{0,k}$ ,  $g_{a,k}$ ,  $g_{b,k}$  y llamemos  $u_k(x, t)$  a la correspondiente solución. Formemos la serie

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k u_k(x, t),$$

que supondremos es convergente para  $a \leq x \leq b$  y  $0 \leq t \leq T$ . Si dicha serie se puede derivar término a término (una vez respecto de  $t$  y hasta dos veces respecto de  $x$ ), encontramos que

$$U_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k (u_k)_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k (D(u_k)_{xx} + f_k) = DU_{xx} + f,$$

así como

$$U(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k u_k(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k u_{0,k}(x) = u_0(x),$$

y sobre los extremos

$$h_a U(a, t) - k_a U_x(a, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k (h_a u_k(a, t) - k_a (u_k)_x(a, t)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k g_{a,k}(t) = g_a(t),$$

y análogamente

$$h_b U(b, t) + k_b U_x(b, t) = g_b(t).$$

En resumen,  $U(x, t)$  sería una solución de la ecuación con los datos de partida. Por la unicidad,  $U(x, t)$  sería la solución del problema.

Por descontado, el principio de superposición se aplica sin más a sumas finitas.

Si la solución se interpreta como la “respuesta” a los datos y éstos como las “entradas”, el principio de superposición afirma que el sistema es lineal: a una combinación lineal de entradas le corresponde la combinación lineal de las respuestas de cada entrada, incluso para combinaciones infinitas. Hay que tener cuidado pues mientras que las respuestas son funciones  $u(x, t)$  las entradas son de la forma

$$[f(x, t), u_0(x), g_a(t), g_b(t)]^T$$

que deben manipularse como los vectores de cuatro componentes.

La aplicación rigurosa del principio pasa por comprobar que las series convergen adecuadamente, lo que puede ser difícil en muchos casos.

## 1.4 Solución por separación de variables

### 1.4.1 Modos propios

Supongamos que  $f = 0$ ,  $g_a = 0$ ,  $g_b = 0$ . El método de separación de variables tiene su origen en la observación de que hay datos iniciales  $X(x)$  especiales para los cuales la solución adopta la forma simple

$$T(t)X(x), \quad t \geq 0, \quad a \leq x \leq b,$$

para cierta función  $T(t)$ , esto es, hay datos iniciales para los cuales la solución es de variables separadas. Hemos de tomar  $T(0) = 1$ , para que  $X(x)$  sea ciertamente el dato inicial. Llevando esta expresión a la ecuación (con  $f = 0$ ,  $g_a = g_b = 0$ ), obtenemos

$$T'(t)X(x) = DT(t)X''(x), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0,$$

o bien, siempre que  $T(t)X(x) \neq 0$ ,

$$\frac{T'(t)}{DT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0.$$

La única posibilidad para que esto se dé es que ambos miembros sean una misma constante  $\lambda \in \mathbb{C}$ , es decir

$$T'(t) = \lambda DT(t), \quad t \geq 0$$

y

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad a \leq x \leq b.$$

En realidad, si  $T(t)$  y  $X(x)$  cumplen estas condiciones, el producto será solución incluso si  $T(t)X(x) = 0$  en ciertos puntos. Buscamos pues parejas de funciones cumpliendo las ecuaciones anteriores para un  $\lambda$  común.

Por otra parte, para que  $T(t)X(x)$  satisfaga las condiciones de contorno, debemos pedir

$$\begin{cases} h_a X(a) - k_a X'(a) &= 0, \\ h_b X(b) + k_b X'(b) &= 0. \end{cases}$$

Nos encontramos pues ante un problema de Sturm-Liouville para  $\lambda$  y  $X(x)$ , ya estudiado, para el operador  $L[X] = X''$  y estos tipos de condiciones de contorno dadas. La discusión anterior se resume diciendo que

$$e^{D\lambda t} \cdot X(x)$$

es solución de (6) siempre que  $\lambda$  sea autovalor y  $X(x)$  una autofunción asociada. Estas soluciones especiales se llaman modos propios (o normales, o de Fourier). Notemos que la presencia de  $D$  hace que la fórmula sea dimensionalmente correcta, pues

$$[D\lambda] = [D] \cdot [\lambda] = [x]^2 [t^{-1}] \cdot [x]^{-2} = [t^{-1}].$$

De acuerdo con la teoría de la lección precedente, existe un sistema ortogonal y completo  $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$  formado por autofunciones del PSL (en la teoría empezamos a numerar por  $n = 1$ , pero en algunos ejemplos puede ser más práctico recurrir a otras numeraciones). Los autovalores correspondientes  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$  son reales, negativos y podemos tomar la ordenación para que formen una sucesión decreciente; dicha sucesión tiende hacia  $-\infty$ .

Por las conclusiones anteriores, lo que hemos encontrado es una sucesión de soluciones de (6): para un dato inicial que sea una autofunción  $u_0(x) = X_n(x)$ , para cierto  $n \geq 1$ , la solución es simplemente el modo propio

$$e^{D\lambda_n t} \cdot X_n(x), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0.$$

Es interesante observar que

- Los modos propios son una amortiguación exponencial de la autofunción inicial. El perfil del modo propio  $n$ -ésimo en el instante  $t > 0$  es una contracción del perfil inicial por el factor  $e^{D\lambda_n t}$  que depende sólo de  $t$ . Dicho perfil será por tanto similar al de  $X_n(x)$ .
- A medida que crece  $n$ ,  $\lambda_n$  se hace más negativo, con lo cual el modo propio se contrae más rápidamente. Esto es físicamente aceptable, pues la autofunción  $X_n(x)$  se hace más oscilante; sus derivadas espaciales, y por ende los flujos, aumentan con lo cual el equilibrio se alcanza más deprisa.

- Un aumento de  $D$  (que conlleva una mayor difusividad) implica una mayor decaimiento del modo propio con el tiempo.
- Para tiempos negativos los modos propios crecen incontroladamente.

#### 1.4.2 Caso $f = 0$ , $g_a = 0$ , $g_b = 0$

Ahora podemos resolver fácilmente problemas con  $u_0$  arbitrario, siempre que  $f = 0$ ,  $g_a = g_b = 0$ . Nos basaremos en el principio de superposición. Basta con desarrollar el dato inicial  $u_0$  en el sistema de autofunciones (pues los demás datos son nulos)

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n X_n(x).$$

Recordemos que esto es posible gracias a que la ortogonalidad permite calcular los coeficientes

$$\alpha_n = \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2}, \quad n \geq 1.$$

Una vez desarrollada  $u_0$ , afirmamos que la solución es simplemente la superposición de modos propios

$$(7) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e^{D\lambda_n t} X_n(x), \quad t \geq 0.$$

Esta serie no presenta problemas de convergencia, siempre que la condición inicial sea cuadrado integrable, pues ya hemos comentado que el parámetro en la exponencial es negativo. El único problema sería la derivación término a término de la serie, pues también es claro que la serie se ajusta a los datos. Ahora bien, ya hemos señalado que  $\lambda_n \rightarrow -\infty$ , lo que permite derivar término a término cuando  $t > 0$ . Para rematar el razonamiento hay que considerar  $t = 0$  y entonces, para garantizar la convergencia, habría que suponer cierta regularidad en  $u_0(x)$ , así como que  $u_0(x)$  cumpla las condiciones de contorno.

Algunas observaciones:

- Si  $t > 0$  las exponenciales se hacen extraordinariamente pequeñas cuando  $n$  aumenta. Entonces se puede probar que la serie en (7) es convergente, incluso puntualmente, así como las series que corresponden a las derivadas de cualquier orden. Insistimos en que para  $t > 0$  se puede justificar rigurosamente el principio de superposición.

- En realidad, para  $t > 0$  la solución pasa a ser de clase  $C^\infty$ , aunque  $u_0$  sea meramente integrable y no cumpla las condiciones de contorno (puede ser discontinua y con singularidades).
- La expresión (7) define lo que se llama solución generalizada, que tiene sentido incluso para datos iniciales irregulares.
- Se puede justificar rigurosamente que si  $u_0$  es dos veces derivable con continuidad y cumple las condiciones de contorno, entonces (7) es una solución genuina de la ecuación.
- Para  $t > 0$  los términos de la serie (7) decaen tan deprisa que en muchas aplicaciones basta tomar sólo los primeros para obtener aproximaciones útiles.
- En cambio, si  $t < 0$  las exponenciales crecen incontroladamente y la serie pasa a ser divergente en general. De nuevo encontramos el carácter irreversible de la ecuación de difusión.

En resumen, para problemas de la forma

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= Du_{xx}(x, t), & a \leq x \leq b, & \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & a \leq x \leq b, \\ h_a u(a, t) - k_a u_x(a, t) &= 0, & 0 \leq t \leq T, \\ h_b u(b, t) + k_b u_x(b, t) &= 0, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

la resolución consta de los siguientes pasos.

- (i) Obtener un sistema ortogonal y completo de autofunciones  $\{X_n\}_n$  y los autovalores correspondientes del PSL asociado

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x), & a \leq x \leq b, \\ h_a X(a) - k_a X'(a) &= 0, \\ h_b X(b) + k_b X'(b) &= 0. \end{aligned}$$

- (ii) Desarrollar el dato inicial

$$u_0(x) = \sum_n \alpha_n X_n(x), \quad \alpha_n = \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2}.$$

(iii) Aplicar superposición: el modo propio  $u_n(x, t) = e^{\lambda_n Dt} X_n(x)$  es solución del problema con dato inicial dado por la autofunción  $X_n$ . Por tanto, la solución con dato inicial  $u_0$  se obtiene del desarrollo de (ii):

$$u(x, t) = \sum_n \alpha_n u_n(x, t) = \sum_n \alpha_n e^{\lambda_n Dt} X_n(x).$$

**Ejemplo 2.** Buscamos la solución del problema

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= Du_{xx}(x, t), & -\pi \leq x \leq \pi, & \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x) = \cos^2(x + \pi), & -\pi \leq x \leq \pi, \\ u_x(-\pi, t) &= 0, u_x(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

con  $D > 0$  conocido. La longitud del intervalo es  $L = 2\pi$  y el PSL asociado

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x), & -\pi \leq x \leq \pi, \\ X'(-\pi) &= 0, X'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

tiene por autovalores

$$\lambda_k = -\omega_k^2 = -\left(\frac{k}{2}\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

y un sistema ortogonal y completo de autofunciones de la forma

$$X_0(x) = 1, \quad X_k(x) = \cos\left(\frac{k}{2}(x + \pi)\right), \quad k \geq 1.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la fórmula trigonométrica

$$\cos^2(x + \pi) = \frac{1 + \cos(2(x + \pi))}{2},$$

se tiene el desarrollo del dato inicial

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k X_k(x), \\ \alpha_0 &= \frac{\langle u_0, X_0 \rangle}{\|X_0\|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) dx = \frac{1}{2} \\ \alpha_k &= \frac{\langle u_0, X_k \rangle}{\|X_k\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) X_k(x) dx = \begin{cases} 1/2 & k = 4 \\ 0 & k \neq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Por superposición, la solución del problema es

$$u(x, t) = \alpha_0 u_0(x, t) + \alpha_4 u_4(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-4Dt} \cos(2(x + \pi)).$$

### 1.4.3 Caso $g_a = g_b = 0$

Con más generalidad, por superposición, podemos resolver problemas con  $u_0$  y  $f$  arbitrarios, pero con  $g_a = g_b = 0$ . En efecto, la solución  $u(x, t)$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq t \leq T$ , de (6) se va a interpretar como una secuencia continua (una película): en cada instante  $0 \leq t \leq T$  tenemos una función de la variable  $x$ , que denotamos por  $u(\cdot, t)$  (un fotograma). Esta función es simplemente

$$a \leq x \leq b \quad \rightarrow \quad u(x, t).$$

Supondremos que la solución existe. En realidad, elaborando un poco más las ideas, se puede probar que la solución realmente existe, siempre que los datos cumplan unas mínimas condiciones de regularidad y  $u_0(x)$  satisfaga las condiciones de contorno.

Fijado  $0 \leq t \leq T$ , la función  $u(\cdot, t)$  admitirá un desarrollo en el sistema ortogonal de autofunciones (cuyos coeficientes dependen, por descontado, de  $t$ )

$$(8) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(t) X_n(x),$$

y precisamente nuestro objetivo es obtener  $U_n(t)$ ,  $n \geq 1$ .

Notemos que

$$(9) \quad U_n(t) = \frac{\langle u(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b u(x, t) X_n(x) dx, \quad n \geq 1,$$

pero esta expresión no nos servirá para nuestro propósito directamente, pues  $u(x, t)$  es desconocida.

Para calcular  $U_n(t)$ ,  $n \geq 1$ , comenzamos desarrollando el dato inicial y el término complementario en el sistema de autofunciones. Así encontramos

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n X_n(x), \quad a \leq x \leq b,$$

donde

$$\alpha_n = \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b u_0(x) X_n(x) dx, \quad n \geq 1,$$

y

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t) X_n(x), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T,$$



con

$$F_n(t) = \frac{\langle f(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b f(x, t) X_n(x) dx, \quad n \geq 1.$$

(En los desarrollos anteriores debemos entender que las series convergen en media cuadrática).

Fijemos  $n \geq 1$ . Vamos a demostrar que  $U_n(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , es solución del problema de Cauchy

$$(10) \quad \begin{cases} U_n'(t) = D\lambda_n U_n(t) + F_n(t), & 0 \leq t \leq T, \\ U_n(0) = \alpha_n. \end{cases}$$

(Tanto  $\alpha_n$  como  $F_n(t)$ ,  $n \geq 1$ , son conocidas.)

Como en principio podemos resolver (10), estaremos en condiciones de ir calculando cada coeficiente  $U_n(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , y por tanto de obtener la solución mediante la serie en (8).

Una justificación formal de la validez de (10) podría hacerse usando el principio de superposición, pero ahora no es tan fácil la justificación rigurosa. Demostramos pues (10) directamente. Tomando la derivada respecto de  $t$  en (9) y usando la ecuación (6), encontramos

$$\begin{aligned} U_n'(t) &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b u_t(x, t) X_n(x) dx \\ &= \frac{D}{\|X_n\|^2} \int_a^b u_{xx}(x, t) X_n(x) dx + \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b f(x, t) X_n(x) dx \\ &= D \frac{\langle u_{xx}(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2} + F_n(t) \end{aligned}$$

Recordemos ahora que el operador  $L[X] = X''$  es simétrico cuando actúa sobre funciones que satisfacen las condiciones de contorno homogéneas y notemos que tanto  $u(x, t)$  como  $X_n(x)$  cumplen realmente las condiciones de contorno homogéneas. Se deduce que

$$\langle u_{xx}(\cdot, t), X_n \rangle = \langle u(\cdot, t), X_n'' \rangle = \lambda_n \langle u(\cdot, t), X_n \rangle$$

y por tanto

$$\frac{\langle u_{xx}(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \lambda_n \frac{\langle u(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \lambda_n U_n(t).$$

Esta expresión, llevada al desarrollo anterior para  $U'_n(t)$ , muestra que

$$U'_n(t) = D\lambda_n U_n(t) + F_n(t),$$

que es precisamente la ecuación diferencial en (10).

Por último, como  $u(0, x) = u_0(x)$ , volviendo a (8) se obtiene

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(0)X_n(x),$$

lo que significa que  $U_n(0)$ ,  $n \geq 1$ , son los coeficientes de  $u_0$  en el sistema de autofunciones, esto es

$$U_n(0) = \alpha_n, \quad n \geq 1.$$

Así hemos probado la validez de (10).

Por otro lado, observemos que si  $f = 0$ , entonces

$$U_n(t) = e^{D\lambda_n t} \alpha_n, \quad n \geq 1,$$

y recaemos en la expresión (7) de la subsección anterior.

Para finalizar, comentemos que la expresión

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(t)X_n(x),$$

donde los coeficientes  $U_n(t)$  vienen definidos por (10), se adopta como solución generalizada del problema, incluso cuando los datos  $f$  y  $u_0$  son irregulares y quizás no exista solución en sentido estricto.

Los argumentos anteriores para la resolución de problemas de la forma

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= Du_{xx}(x, t) + f(x, t), & a \leq x \leq b, & \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & a \leq x \leq b, & \\ h_a u(a, t) - k_a u_x(a, t) &= 0, & 0 \leq t \leq T, & \\ h_b u(b, t) + k_b u_x(b, t) &= 0, & 0 \leq t \leq T. & \end{aligned}$$

se resumen así en los siguientes pasos.

- (i) Obtener un sistema ortogonal y completo de autofunciones  $\{X_n\}_n$  y los autovalores correspondientes del PSL asociado

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x), & a \leq x \leq b, \\ h_a X(a) - k_a X'(a) &= 0, \\ h_b X(b) + k_b X'(b) &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Desarrollar el dato inicial y el término fuente

$$u_0(x) = \sum_n \alpha_n X_n(x), \quad \alpha_n = \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2},$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t) X_n(x), \quad F_n(t) = \frac{\langle f(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2}.$$

(iii) Buscando la solución en la forma

$$u(x, t) = \sum_n U_n(t) X_n(x),$$

entonces el coeficiente  $U_n$  se obtiene resolviendo el problema de valor inicial (10).

**Ejemplo 3.** Buscamos la solución del problema

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + \sin(3\pi(x - t)), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \cos(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

con  $D > 0$  conocido. La longitud del intervalo es  $L = 1$  y el PSL asociado

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$X(0) = 0, X(1) = 0,$$

tiene por autovalores

$$\lambda_k = -\omega_k^2 = -(k\pi)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

y un sistema ortogonal y completo de autofunciones de la forma

$$X_k(x) = \sin(k\pi x), \quad k \geq 1.$$

Por otro lado, se tienen los desarrollos del dato inicial y del término fuente siguientes. Para el primero

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k X_k(x),$$

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{\langle u_0, X_k \rangle}{\|X_k\|^2} = 2 \int_0^1 \cos(\pi x) \sin(k\pi x) dx \\
&= 2 \left( \frac{1}{2} \int_0^1 (\sin((k+1)\pi x) + \sin((k-1)\pi x)) dx \right) \\
&= \begin{cases} -\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} \Big|_0^1 = 0 & k = 1 \\ -\frac{\cos((k+1)\pi x)}{(k+1)\pi} - \frac{\cos((k-1)\pi x)}{(k-1)\pi} \Big|_0^1 = \frac{(1-(-1)^{k+1})}{\pi} \left( \frac{2k}{k^2-1} \right) & k > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & k \text{ impar} \\ \frac{4k}{\pi(k^2-1)} & k \text{ par} \end{cases}
\end{aligned}$$

Por otro lado, el término fuente se puede escribir

$$\begin{aligned}
f(x, t) &= f_1(x, t) - f_2(x, t) \\
f_1(x, t) &= \sin(3\pi x) \cos(3\pi t), \quad f_2(x, t) = \sin(3\pi t) \cos(3\pi x).
\end{aligned}$$

Entonces, desarrollando los dos términos, es claro que el primero satisface

$$\begin{aligned}
f_1(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{(1)}(t) X_k(x) \\
F_k^{(1)}(t) &= \begin{cases} 0 & k \neq 3 \\ \cos(3\pi t) & k = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

De otra parte, si buscamos el desarrollo de

$$\cos(3\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k X_k(x),$$

entonces

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{\langle \cos(3\pi \cdot), X_k \rangle}{\|X_k\|^2} = 2 \int_0^1 \cos(3\pi x) \sin(k\pi x) dx \\
&= 2 \left( \frac{1}{2} \int_0^1 (\sin((k+3)\pi x) + \sin((k-3)\pi x)) dx \right) \\
&= \begin{cases} -\frac{\cos(6\pi x)}{6\pi} \Big|_0^1 = 0 & k = 3 \\ -\frac{\cos((k+3)\pi x)}{(k+3)\pi} - \frac{\cos((k-3)\pi x)}{(k-3)\pi} \Big|_0^1 = \frac{(1-(-1)^{k+3})}{\pi} \left( \frac{2k}{k^2-9} \right) & k \neq 3 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & k \text{ impar} \\ \frac{4k}{\pi(k^2-9)} & k \text{ par} \end{cases}
\end{aligned}$$

De este modo,

$$f_2(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{(2)}(t) X_k(x)$$

$$F_k^{(2)}(t) = \begin{cases} 0 & k \text{ impar} \\ \frac{4k}{\pi(k^2-9)} \sin(3\pi t) & k \text{ par} \end{cases}$$

Y, por tanto

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) X_k(x)$$

$$F_k(t) = F_k^{(1)}(t) - F_k^{(2)}(t).$$

El último paso busca la solución en la forma

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) X_k(x),$$

con  $U_k(t)$  solución de

$$U_k'(t) = D\lambda_k U_k(t) + F_k(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$U_k(0) = \alpha_k.$$

Según los coeficientes calculados, tenemos que distinguir tres casos:

1.  $k$  impar,  $k \neq 3$ . El problema es de la forma

$$U_k'(t) = D\lambda_k U_k(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$U_k(0) = 0.$$

Entonces  $U_k(t) = 0$ .

2.  $k$  par. En este caso, el problema tiene a forma

$$U_k'(t) = D\lambda_k U_k(t) + \frac{4k}{\pi(k^2-9)} \sin(3\pi t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$U_k(0) = \frac{4k}{\pi(k^2-1)}.$$

Resolviendo (lección 10), se obtiene que

$$U_k(t) = \frac{4k}{\pi(k^2-1)} e^{\lambda_k D t} + \int_0^t e^{\lambda_k D(t-s)} \frac{4k}{\pi(k^2-9)} \sin(3\pi s) ds.$$

3.  $k = 3$ . En este caso, el problema tiene a forma

$$\begin{aligned} U_3'(t) &= D\lambda_3 U_3(t) + \cos(3\pi t), & 0 \leq t \leq T, \\ U_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo, se obtiene que

$$U_3(t) = \int_0^t e^{\lambda_3 D(t-s)} \cos(3\pi s) ds.$$

En todos los casos, recordemos que  $\lambda_k = -(k\pi)^2$ .

#### 1.4.4 Datos generales

Supongamos por último que  $g_a$  y  $g_b$  puedan ser no nulos. Destaquemos que el paso fundamental que dimos en la subsección anterior

$$\langle u_{xx}(\cdot, t), X_n \rangle = \langle u(\cdot, t), X_n'' \rangle, \quad n \geq 1,$$

ya no es legítimo, pues  $u(\cdot, t)$  no cumple las condiciones de contorno homogéneas.

Lo que hacemos en esta situación es construir primero una función  $w(x, t)$  que cumpla las condiciones de contorno dadas, es decir tal que

$$\begin{cases} h_a w(a, t) - k_a w_x(a, t) &= g_a(t), \\ h_b w(b, t) + k_b w_x(b, t) &= g_b(t). \end{cases}$$

Hay libertad en la construcción de  $w$  y procuraremos tomar la función más sencilla posible. Una vez calculada  $w$ , escribimos

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

y nos centramos en  $v$ .

Por una parte

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= u_t(x, t) - w_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + f(x, t) - w_t(x, t) \\ &= Dv_{xx}(x, t) + f(x, t) + Dw_{xx}(x, t) - w_t(x, t), \end{aligned}$$

es decir,  $v$  cumple un problema (6) con nuevo término fuente corregido

$$f(x, t) + Dw_{xx}(x, t) - w_t(x, t).$$

El dato inicial para  $v$  es

$$v(x, 0) = u(x, 0) - w(x, 0) = u_0(x) - w(x, 0),$$

por tanto también es conocido. Finalmente, por su construcción,  $v$  satisface las condiciones de contorno homogéneas. Ahora podemos obtener  $v(x, t)$  en forma de serie

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} V_n(t) X_n(x),$$

donde las funciones  $V_n(t)$ ,  $n \geq 1$ , se determinan resolviendo problemas de Cauchy, según explicamos antes.

Distintas elecciones de  $w$  llevan a distintas  $v$ , pero la suma  $u = v + w$  es siempre la solución  $u$ .

Los pasos a seguir entonces, en este caso general, son los siguientes:

- (i) Buscar  $w(x, t)$  que verifique las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} h_a w(a, t) - k_a w_x(a, t) &= g_a(t), \\ h_b w(b, t) + k_b w_x(b, t) &= g_b(t). \end{aligned}$$

- (ii) Escribir  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ . Entonces,  $v(x, t)$  es solución del problema

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= Dv_{xx}(x, t) + f(x, t) + Dw_{xx}(x, t) - w_t(x, t), \\ v(x, 0) &= u_0(x) - w(x, 0) \\ h_a v(a, t) - k_a v_x(a, t) &= 0, \\ h_b v(b, t) + k_b v_x(b, t) &= 0. \end{aligned}$$

- (iii) Resolver para  $v(x, t)$ , según lo descrito en el caso previo y despejar  $u = v + w$ .

**Ejemplo 4.** Planteamos la resolución del problema

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= 3u_{xx}(x, t), & 0 \leq x \leq \pi, & \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x) = 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) &= e^{-3t}, u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

Buscamos primero una función  $w(x, t)$  que satisfaga las condiciones de contorno. Vista como función de  $x$  para cada  $t$  fijo, la más sencilla puede ser una recta

$w(x, t) = A(t)x + B(t)$ . Imponiendo las condiciones de contorno  $w(0, t) = e^{-3t}$ ,  $w(\pi, t) = 0$ , se tiene  $A(t) = -e^{-3t}/\pi$ ,  $B(t) = e^{-3t}$  y, por tanto

$$w(x, t) = e^{-3t} \left( 1 - \frac{x}{\pi} \right).$$

Con esta función, el problema para  $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$  tiene la forma

$$v_t(x, t) = 3v_{xx}(x, t) + 3w_{xx}(x, t) - w_t(x, t) = 3v_{xx}(x, t) + f(x, t),$$

$$v(x, 0) = u_0(x) - w(x, 0) = v_0(x)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0$$

con  $f(x, t) = 3e^{-3t} \left( 1 - \frac{x}{\pi} \right)$ ,  $v_0(x) = x/\pi$ . Este problema se resuelve como en el ejemplo previo, pues las condiciones de contorno son homogéneas. Se puede comprobar que se tiene:

- Autovalores y autofunciones:

$$\lambda_k = -k^2, \quad X_k(x) = \sin(kx), \quad k = 1, 2, \dots$$

- Desarrollos de los datos en el sistema ortogonal y completo de autofunciones:

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k X_k(x),$$

$$\alpha_k = \frac{\langle u_0, X_k \rangle}{\|X_k\|^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin(kx) dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi},$$

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) X_k(x)$$

$$F_k(t) = \frac{\langle f(\cdot, t), X_k \rangle}{\|X_k\|^2} = \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-3t} \left( 1 - \frac{x}{\pi} \right) \sin(kx) dx = \frac{6}{k\pi} e^{-3t}$$

- La solución  $v(x, t)$  tiene la forma

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) X_k(x),$$

con

$$V_k'(t) = 3\lambda_k V_k(t) + F_k(t)$$

$$V_k(0) = \alpha_k.$$

En este caso,

$$V_k(t) = \begin{cases} \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} e^{3\lambda_k t} - \frac{2e^{3\lambda_k t}}{\pi k(1+\lambda_k)} (e^{-3(\lambda_k+1)t} - 1) & k \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} (1 + 3t) e^{-3t} & k = 1 \end{cases}$$



## 2 Ecuación de ondas

La ecuación de ondas

$$(11) \quad u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T,$$

aparece en relación con el electromagnetismo. Por ejemplo, en la sección anterior ya comentamos que el sistema de Lord Kelvin se transformaba en

$$\begin{cases} i_{xx} &= CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi, \\ v_{xx} &= CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv. \end{cases}$$

La ecuación de ondas en su formato simple (11) corresponde a la situación en la que tanto  $CR + GL$  como  $GR$  son despreciables frente a  $CL$ .

La ecuación de ondas también es de interés al estudiar las propagaciones del sonido en un tubo o al estudiar el movimiento de una cuerda elástica tensa.

El parámetro  $c$  se toma siempre positivo. Sus dimensiones son

$$[c] = [x][t]^{-1} = LT^{-1},$$

es decir,  $c$  típicamente es una velocidad, denominada velocidad característica de la ecuación.

### Condiciones de contorno

Por otra parte, la ecuación de ondas en intervalos acotados siempre se presenta con condiciones de contorno

$$(12) \quad \begin{cases} h_a u(a, t) - k_a u_x(a, t) &= g_a(t), \\ h_b u(b, t) + k_b u_x(b, t) &= g_b(t), \end{cases}$$

con  $h_a, k_a, h_b, k_b \geq 0$ ,  $h_a + k_a > 0$ ,  $h_b + k_b > 0$ . Estas condiciones incluyen como casos particulares las Dirichlet ( $k_a = k_b = 0$ ) y las Neumann ( $h_a = h_b = 0$ ). Cuando  $h_a k_a > 0$  y  $h_b k_b > 0$  hablamos de condiciones de tipo Robin. Por descontado, son recurrentes situaciones mixtas (en cada extremo de un tipo distinto). Las condiciones de contorno de tipo periódico tiene un tratamiento completamente similar, por lo que no las vamos a considerar en el resto de la sección, aunque sí pueden analizarse como ejercicio.

## 2.1 Problema de valores iniciales y de contorno

Conocidos

- las condiciones iniciales de posición  $u_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y velocidad  $v_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- la velocidad característica  $c > 0$ ,
- un término complementario  $f : \Omega \times J \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- los parámetros  $h_a, k_a, h_b, k_b$  de (12),
- los valores  $g_a, g_b : J \rightarrow \mathbb{R}$  en (12),

siendo  $J$  un intervalo temporal con  $0 \in J$ , planteamos el problema de valores iniciales y de contorno

$$(13) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), & a \leq x \leq b, \quad t \in J, \\ u(x, 0) = u_0(x), & a \leq x \leq b, \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & a \leq x \leq b, \\ h_a u(a, t) - k_a u_x(a, t) = g_a(t), & t \in J, \\ h_b u(b, t) + k_b u_x(b, t) = g_b(t), & t \in J. \end{cases}$$

La ecuación (13) es el prototipo de las llamadas ecuaciones hiperbólicas. Pasamos a estudiar la unicidad y luego explicaremos la resolución de la misma mediante el método de separación de variables.

## 2.2 Propiedades

### 2.2.1 Método de la energía y unicidad de soluciones

La energía de una solución de (13) se define como

$$E(t) = E^*(t) + E_a^{**}(t) + E_b^{**}(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

siendo

$$E^*(t) = \frac{1}{2} \int_a^b u_t(x, t)^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_a^b u_x(x, t)^2 dx,$$

$$E_a^{**}(t) = \begin{cases} 0, & \text{para condiciones D o N en } a, \\ (1/2)(c^2 h_a / k_a) u(a, t)^2, & \text{para una condición R en } a, \end{cases}$$

y

$$E_b^{**}(t) = \begin{cases} 0, & \text{para condiciones D o N en } b, \\ (1/2)(c^2 h_b/k_b)u(b,t)^2, & \text{para una condición R en } b. \end{cases}$$

Salvo un factor de normalización,  $E^*(t)$  corresponde a la energía física del sistema sobre el intervalo  $(a, b)$ , mientras que  $E_a^{**}(t)$  y  $E_b^{**}(t)$  dan cuenta de la energía en los extremos.

**Teorema 3** *Supongamos que  $f$ ,  $g_a$  y  $g_b$  son nulas. Entonces la energía  $E(t)$  se conserva a lo largo del intervalo temporal en el que esté definida la solución.*

**Demostración.** Usando el teorema de Schwarz sobre las derivadas mixtas y (13), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E^*(t) &= \int_a^b u_t(x,t) u_{tt}(x,t) dx + c^2 \int_a^b u_{xt}(x,t) u_x(x,t) dx \\ &= c^2 \int_a^b u_t(x,t) u_{xx}(x,t) dx + c^2 \int_a^b u_{tx}(x,t) u_x(x,t) dx \end{aligned}$$

El primer sumando anterior se transforma, integrando por partes, en

$$c^2 u_t(x,t) u_x(x,t) \Big|_{x=a}^{x=b} - c^2 \int_a^b u_{tx}(x,t) u_x(x,t) dx$$

y por tanto

$$\frac{d}{dt}E^*(t) = c^2 u_t(b,t) u_x(b,t) - c^2 u_t(a,t) u_x(a,t).$$

Observamos que si las condiciones fueran Neumann, claramente

$$\frac{d}{dt}E^*(t) = 0.$$

Del mismo modo, para condiciones Dirichlet, al ser

$$u(a,t) = u(b,t) = 0,$$

tendremos que también

$$u_t(a,t) = u_t(b,t) = 0,$$

y por lo tanto que

$$\frac{d}{dt}E^*(t) = 0.$$

Como para estas condiciones  $E_a^{**}(t) = E_a^{**}(t) = 0$ , se deduce que  $E(t)$  permanece constante.

El razonamiento anterior permanece válido cuando tengamos una condición Dirichlet en un extremo y una Neumann en el otro. Veamos que pasaría para una condición Robin, por ejemplo en  $a$ ,

$$h_a u(a, t) - k_a u_x(a, t) = 0, \quad h_a, k_a > 0.$$

Despejando,

$$u_x(a, t) = (h_a/k_a)u(a, t)$$

y en consecuencia

$$c^2 u_t(a, t) u_x(a, t) = (c^2 h_a/k_a) u_t(a, t) u(a, t) = \frac{d}{dt} E_a^{**}(t).$$

Del mismo modo, para una condición Robin en  $b$ , la igualdad

$$h_b u(a, t) + k_b u_x(a, t) = 0, \quad h_a, k_a > 0.$$

conduce a

$$u_x(b, t) = -(h_b/k_b)u(b, t)$$

y así

$$c^2 u_t(b, t) u_x(b, t) = -(c^2 h_b/k_b) u_t(b, t) u(b, t) = -\frac{d}{dt} E_b^{**}(t).$$

Para condiciones Robin se cumple pues que

$$\frac{d}{dt}E^*(t) = -\frac{d}{dt}E_b^{**}(t) - \frac{d}{dt}E_a^{**}(t)$$

y por tanto de nuevo

$$E(t) = E^*(t) + E_a^{**}(t) + E_b^{**}(t)$$

permanece constante.

El mismo razonamiento se aplica cuando la condición Robin aparece sólo en un extremo, mientras que el otro está sujeto a una condición de tipo Dirichlet o Neumann.  $\square$

Es importante notar que la conservación tiene lugar para tiempos  $t \geq 0$  y  $t \leq 0$ . Esto da cuenta del carácter reversible de la ecuación de ondas (compárese con el caso de la ecuación de difusión).

**Corolario 2** *El problema (13) admite a lo sumo una solución, cualesquiera que sean  $f$ ,  $u_0$ ,  $g_a$  y  $g_b$ .*

**Demostración.** Dadas dos posibles soluciones  $u^I$  y  $u^{II}$  para un mismo sistema de datos, formemos la función diferencia  $\delta = u^{II} - u^I$ , que es solución para los datos homogéneos. La energía  $E(t)$  de  $\delta$  será constante,

$$E(t) = E(0) = 0, \quad t \in J.$$

Entonces  $\delta_t(x, t) = \delta_x(x, t) = 0$ . Esto implica que  $\delta(x, t)$  es constante, pero como inicialmente (en  $t = 0$ ) es nula, se deduce que  $\delta(x, t) = 0$  y por lo tanto que  $u^I(x, t) = u^{II}(x, t)$ .  $\square$

Notemos de nuevo que la unicidad es tanto para tiempos futuros como para tiempos pasados.

### 2.2.2 Principio de superposición

Al igual que la ecuación del calor, la ecuación de ondas es lineal. Esto se va a reflejar en el principio de superposición. Supongamos que los datos del problema se pueden escribir como “combinación lineal” de otros datos en el sentido de que

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k f_k(x, t), \\ u_0(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k u_{0,k}(x), \\ v_0(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k v_{0,k}(x), \\ g_a(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k g_{a,k}(t), \\ g_b(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k g_{b,k}(t). \end{aligned}$$

Las series anteriores se suponen convergentes para  $a \leq x \leq b$  y  $t \in J$ . Hay que resaltar que los coeficientes escalares  $\mu_k$ ,  $k \geq 1$ , son los mismos en los cinco desarrollos.

Supongamos ahora que para cada valor de  $k \geq 1$  es posible resolver el problema con datos  $f_k$ ,  $u_{0,k}$ ,  $v_{0,k}$ ,  $g_{a,k}$ ,  $g_{b,k}$  y llamemos  $u_k(x, t)$  a la correspondiente solución. Formemos la serie

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k u_k(x, t),$$

que supondremos es convergente para  $a \leq x \leq b$  y  $t \in J$ . Si dicha serie se puede derivar término a término (dos veces respecto de  $t$  y dos veces respecto de  $x$ ), encontramos que

$$U_{tt} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k (u_k)_{tt} = \sum_{k=1}^{+\infty} c^2 \mu_k ((u_k)_{xx} + f_k) = c^2 U_{xx} + f,$$

así como

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k u_k(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k u_{0,k}(x) = u_0(x), \\ U_t(x, 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k (u_k)_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k v_{0,k}(x) = v_0(x) \end{aligned}$$

y sobre los extremos

$$h_a U(a, t) - k_a U_x(a, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k (h_a u_k(a, t) - k_a (u_k)_x(a, t)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k g_{a,k}(t) = g_a(t).$$

Análogamente

$$h_b U(b, t) + k_b U_x(b, t) = g_b(t).$$

En resumen,  $U(x, t)$  sería una solución de la ecuación con los datos de partida. Por la unicidad,  $U(x, t)$  sería la solución del problema.

Por descontado, el principio de superposición se aplica sin más a sumas finitas.

Si la solución se interpreta como la “respuesta” a los datos y éstos como las “entradas”, el principio de superposición afirma que el sistema es lineal: a una combinación lineal de entradas le corresponde la combinación lineal de las respuestas de cada entrada, incluso para combinaciones infinitas. Hay que tener cuidado pues mientras que las respuestas son funciones  $u(x, t)$  las entradas son de la forma

$$[f(x, t), u_0(x), v_0(x), g_a(t), g_b(t)]^T$$

que deben manipularse como los vectores de cinco componentes.

La aplicación rigurosa del principio pasa por comprobar que las series convergen adecuadamente, lo que puede ser difícil en muchos casos.

## 2.3 Solución por separación de variables

### 2.3.1 Modos propios

Comenzamos buscando soluciones de la ecuación de ondas homogénea en variables separadas

$$T(t)X(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \leq x \leq b.$$

Estas soluciones tiene por posición inicial

$$T(0)X(x), \quad a \leq x \leq b,$$

y por velocidad inicial

$$T'(0)X(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Llevando la expresión  $T(t)X(x)$  a la ecuación de ondas (con  $f = 0$ ,  $g_a = g_b = 0$ ), obtenemos

$$T''(t)X(x) = c^2T(t)X''(x), \quad a \leq x \leq b, \quad t \in \mathbb{R},$$

o bien

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0.$$

Como ya sabemos, la única posibilidad es que ambos miembros sean una misma constante  $\lambda \in \mathbb{C}$ , es decir

$$T''(t) = \lambda c^2T(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

y

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad a \leq x \leq b.$$

El razonamiento anterior supone implícitamente que las funciones no se anulan (pues hemos tenido que dividir). Comprobamos directamente que de todas las maneras la conclusión es cierta: el producto  $T(t)X(x)$  es solución de la ecuación de ondas siempre que  $T(t)$  y  $X(x)$  sean soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden anteriores.

Por otra parte, como  $T(t)X(x)$  ha de cumplir además las condiciones de contorno homogéneas, el factor  $X(x)$  ha de satisfacer

$$\begin{cases} h_a X(a) - k_a X'(a) = 0, \\ h_b X(b) + k_b X'(b) = 0. \end{cases}$$

Tenemos pues un problema de Sturm-Liouville para  $\lambda$  y  $X(x)$ , ya estudiado para el operador  $L[X] = X''$  y las condiciones de contorno dadas. La discusión anterior se resume diciendo que

$$T(t)X(x)$$

es solución de (13) (con  $f = 0$ ,  $g_a = g_b = 0$ ) siempre que  $\lambda$  sea autovalor,  $X(x)$  una autofunción asociada y

$$T''(t) - c^2\lambda T(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vamos a denotar

$$\mathcal{N} = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\},$$

si las condiciones no son Neumann en ambos extremos, y

$$\mathcal{N} = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

si las condiciones son Neumann en ambos extremos. De acuerdo con la teoría de la lección precedente, existe un sistema ortogonal y completo  $\{X_n\}_{n \in \mathcal{N}}$  formado por autofunciones del PSL. Los autovalores correspondientes  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathcal{N}}$  son reales, negativos y podemos suponer que se han ordenado para que formen una sucesión decreciente; dicha sucesión tiende hacia  $-\infty$ . Pongamos

$$\lambda_n = -\omega_n^2, \quad \omega_n \geq 0, \quad n \in \mathcal{N}.$$

Notemos que  $\omega_n > 0$  si  $n \geq 1$ . Para las condiciones Neumann tenemos  $\lambda_0 = 0$  y  $\omega_0 = 0$ .

Para cada valor de  $n \in \mathcal{N}$  resolvemos

$$T_n''(t) + c^2\omega_n^2 T_n(t) = 0.$$

Si  $n \geq 1$ , entonces  $\omega_n > 0$  y la solución general de esta ecuación es

$$T_n(t) = \alpha_n \cos(c\omega_n t) + \beta_n \sin(c\omega_n t).$$

Observemos que  $\alpha_n X_n(x)$  es la posición inicial del modo propio y  $c\omega_n \beta_n X_n(x)$  es su velocidad inicial.

Para las condiciones Neumann  $\omega_0 = 0$  y entonces

$$T_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 t.$$

Ahora  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  son la posición y velocidad iniciales.

Los modos propios con  $n \geq 1$  se pueden escribir alternativamente como

$$a_n \cos(\Omega_n t - \varphi_n) X_n(x),$$

donde

$$a_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}, \quad \varphi_n = \text{arctag}(\beta_n/\alpha_n)$$

y

$$\Omega_n = c\omega_n.$$

Esta expresión significa que cada modo propio es una onda estacionaria armónica, de perfil  $X_n(x)$ , que oscila con una frecuencia  $\Omega_n$  (en rigor se trata de una pulsación, pero es habitual en esta teoría hablar de frecuencias). Esta frecuencia  $\Omega_n$  es independiente de las condiciones iniciales del modo propio y se denomina frecuencia propia  $n$ -ésima.



- Observemos que

$$[\Omega_n] = [c][\omega_n] = [x][t]^{-1}[\lambda_n]^{1/2} = [x][t]^{-1}[x]^{-1} = [t]^{-1},$$

es decir que las frecuencias propias tienen dimensiones de frecuencia.

- A medida que crece  $n$ ,  $\lambda_n$  se hace más negativo, con lo cual la frecuencia propia  $\Omega_n$  aumenta. Los modos propios vibran pues más rápido.
- Un aumento de  $c$  implica un aumento de todas las frecuencias propias en la misma proporción.
- Los modos propios mantienen su amplitud para tiempos positivos y negativos. Este hecho da cuenta del carácter reversible de la ecuación de ondas.

### 2.3.2 Caso $f = 0$ , $g_a = 0$ , $g_b = 0$

Ahora podemos resolver fácilmente problemas con  $u_0$  arbitrario, siempre que  $f = 0$ ,  $g_a = g_b = 0$ . La idea de fondo es el principio de superposición: Toda serie de soluciones es una nueva solución, siempre que la serie converja adecuadamente (hay que poder derivar términos a término en la serie, para todas las derivadas de la ecuación).

Comenzamos desarrollando los datos  $u_0, v_0$  en el sistema de autofunciones

$$u_0(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \alpha_n X_n(x), \quad v_0(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \beta_n X_n(x)$$

Recordemos, de la lección precedente, que esto es posible gracias a que la ortogonalidad permite calcular los coeficientes mediante las expresiones

$$\alpha_n = \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2},$$

$$\beta_n = \frac{\langle v_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2}.$$

Una vez desarrollados  $u_0$  y  $v_0$ , afirmamos que la solución es simplemente la superposición de modos propios

$$(14) \quad u(x, t) = \sum_{n \in \mathcal{N}} T_n(t) X_n(x),$$

siendo

$$T_n(t) = \alpha_n \cos(\Omega_n t) + \frac{\beta_n}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t), \quad n \geq 1$$

y para el caso Neumann

$$T_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 t.$$

La idea es sencilla. La expresión propuesta en (14) es una serie de soluciones. Aceptemos que es convergente, así como las series de las derivadas  $\partial_{tt}$  y  $\partial_{xx}$ . Por una parte, tanto los datos de contorno como el término complementario de cada sumando son nulos, y lo mismo sucederá para la suma. Por otra, cuando  $t = 0$ , la suma se reduce al desarrollo de  $u_0$ , y la serie de las derivadas al de  $v_0$ . Por lo tanto la serie representa una solución que se ajusta a todos los datos. Por la unicidad, la serie propuesta es necesariamente la solución.

- En principio, sin más que tener

$$\int_a^b u_0(x)^2 dx < +\infty, \quad \int_a^b v_0(x)^2 dx < +\infty$$

podemos formar la serie (14), que va ser convergente en el sentido de la media cuadrática. Esto permite hablar de solución incluso para datos iniciales no regulares (son las llamadas soluciones generalizadas, de gran interés en las aplicaciones). Cuando  $u_0$  y  $v_0$  son suficientemente regulares y son compatibles con las condiciones de contorno, entonces la serie converge puntualmente y define la solución punto a punto.

- Podemos imaginar que la ecuación de ondas ( $f = 0$ ,  $g_a = g_b = 0$ ) es un sistema de infinitos osciladores independientes de frecuencias  $\Omega_n$ ,  $n \in \mathcal{N}$ . La solución es la superposición de las oscilaciones de cada uno de ellos, con condiciones iniciales dadas por las proyecciones de las condiciones iniciales de la ecuación de ondas sobre cada oscilador.
- Es interesante comprobar que la energía de  $u$  es la suma de las energías de cada oscilador. Es decir, la energía total se conserva porque se conserva en cada frecuencia.

Resumimos los pasos a seguir para la resolución del problema homogéneo

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), & a \leq x \leq b, & \quad t \in J, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & a \leq x \leq b, \\ u_t(x, 0) &= v_0(x), & a \leq x \leq b, \\ h_a u(a, t) - k_a u_x(a, t) &= 0, & t \in J, \\ h_b u(b, t) + k_b u_x(b, t) &= 0, & t \in J. \end{aligned}$$

- (i) Obtener un sistema ortogonal y completo de autofunciones  $\{X_n\}_n$  y los autovalores correspondientes  $\lambda_n = -\omega_n^2$ , del PSL asociado

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x), & a \leq x \leq b, \\ h_a X(a) - k_a X'(a) &= 0, \\ h_b X(b) + k_b X'(b) &= 0. \end{aligned}$$

- (ii) Desarrollar los datos iniciales

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_n \alpha_n X_n(x), & \alpha_n &= \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2}, \\ v_0(x) &= \sum_n \beta_n X_n(x), & \beta_n &= \frac{\langle v_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2}. \end{aligned}$$

- (iii) Calcular los correspondientes modos propios: para cada  $n$ ,  $u_n(x, t)$  es solución del problema homogéneo con datos iniciales  $u(x, 0) = \alpha_n X_n(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \beta_n X_n(x)$ , y se expresa en la forma  $u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x)$ , con  $T_n(t)$  solución de

$$\begin{aligned} T_n''(t) + c^2 \omega_n^2 T_n(t) &= 0 \\ T_n(0) = \alpha_n, \quad T_n'(0) &= \beta_n. \end{aligned}$$

- (iv) Aplicar superposición para obtener la solución en la forma

$$u(x, t) = \sum_n u_n(x, t).$$

**Ejemplo 5.** Buscamos la solución del problema

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), & 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) &= \begin{cases} x & 0 \leq x \leq L/2 \\ L - x & L/2 \leq x \leq L \end{cases}, & 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

El PSL asociado es de tipo Dirichlet con autovalores/autofunciones

$$\lambda_n = -\omega_n^2, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \geq 1, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

El desarrollo de los datos iniciales

$$u_0(x) = \sum_n \alpha_n X_n(x), \quad v_0(x) = \sum_n \beta_n X_n(x),$$

nos lleva a que  $\beta_n = 0, n \geq 1$  y

$$\alpha_n = \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{4}{L} L_n^2 s_n,$$

con  $L_n = L/(n\pi)$ ,  $s_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ . Así, el modo propio  $u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x)$  tiene por componente  $T_n$

$$T_n(t) = \alpha_n \cos(c\omega_n t) + \frac{\beta_n}{c\omega_n} \sin(c\omega_n t) = \frac{4}{L} L_n^2 s_n \cos(c\omega_n t).$$

Por tanto  $u_n(x, t) = \frac{4}{L} L_n^2 s_n \cos(c\omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  y

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{L} L_n^2 s_n \cos(c\omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

### 2.3.3 Caso $g_a = g_b = 0$

Con más generalidad, por superposición, podemos resolver problemas (13) con  $u_0$ ,  $v_0$  y  $f$  arbitrarios, pero con  $g_a = g_b = 0$ .

Fijado  $t \in J$ , la función  $u(\cdot, t)$  admite un desarrollo en el sistema ortogonal de autofunciones (cuyos coeficientes dependen por descontado de  $t$ )

$$(15) \quad u(x, t) = \sum_{n \in \mathcal{N}} U_n(t) X_n(x)$$

con

$$(16) \quad U_n(t) = \frac{\langle u(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b u(x, t) X_n(x) dx, \quad n \in \mathcal{N}.$$

Del mismo modo

$$f(x, t) = \sum_{n \in \mathcal{N}} F_n(t) X_n(x),$$

siendo

$$F_n(t) = \frac{\langle f(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b f(x, t) X_n(x) dx, \quad n \in \mathcal{N}.$$

(En los desarrollos anteriores debemos entender que las series convergen en media cuadrática).

Fijemos  $n \in \mathcal{N}$ . Vamos a demostrar que  $U_n(t)$ ,  $t \in J$ , es solución del problema de Cauchy

$$(17) \quad \begin{cases} U_n''(t) = c^2 \lambda_n U_n(t) + F_n(t), & 0 \leq t \leq T, \\ U_n(0) = \alpha_n, \\ U_n'(0) = \beta_n, \end{cases}$$

siendo  $\alpha_n$  la componente  $n$ -ésima de la posición inicial

$$\alpha_n = \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b u_0(x) X_n(x) dx$$

y  $\beta_n$  la componente  $n$ -ésima de la velocidad inicial

$$\beta_n = \frac{\langle v_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b v_0(x) X_n(x) dx$$

Como en principio podemos resolver (17), estamos ahora en condiciones de ir calculando cada coeficiente  $U_n(t)$ ,  $t \in J$ , y por tanto de obtener la solución mediante la serie en (15).

Demostremos la validez de (17). Tomando la derivada segunda respecto de  $t$  en (16) y usando la ecuación (13), encontramos

$$\begin{aligned} U_n''(t) &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b u_{tt}(x, t) X_n(x) dx \\ &= \frac{c^2}{\|X_n\|^2} \int_a^b u_{xx}(x, t) X_n(x) dx + \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b f(x, t) X_n(x) dx \\ &= c^2 \frac{\langle u_{xx}(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2} + F_n(t) \end{aligned}$$

Recordemos ahora que el operador  $L[X] = X''$  es simétrico cuando actúa sobre funciones que satisfacen las condiciones de contorno homogéneas y notemos que tanto  $u(x, t)$  como  $X_n(x)$  cumplen realmente dichas condiciones. Se deduce que

$$\langle u_{xx}(\cdot, t), X_n \rangle = \langle u(\cdot, t), X_n'' \rangle = \lambda_n \langle u(\cdot, t), X_n \rangle$$

y por tanto

$$\frac{\langle u_{xx}(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \lambda_n \frac{\langle u(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \lambda_n U_n(t).$$

Esta expresión, llevada al desarrollo anterior para  $U_n''(t)$ , muestra que

$$U_n''(t) = c^2 \lambda_n U_n(t) + F_n(t),$$

que es precisamente la ecuación diferencial en (17).

Además, como  $u(0, x) = u_0(x)$ , volviendo a (15) se obtiene

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(0) X_n(x),$$

luego  $U_n(0)$  es el coeficiente  $n$ -ésimo del desarrollo de  $u_0(x)$  en el sistema de auto-funciones, es decir

$$U_n(0) = \alpha_n.$$

Por último, tomando la derivada respecto de  $t$  en (16), se obtiene

$$U_n'(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b u_t(x, t) X_n(x) dx, \quad 0 \leq t \leq T.$$

En particular, para  $t = 0$ ,

$$U_n'(0) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b u_t(x, 0) X_n(x) dx = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b v_0(x) X_n(x) dx,$$

es decir que  $U_n'(0) = \beta_n$ . Así pues las condiciones iniciales para  $U_n(t)$  son las de (17).

- Observemos que si  $f = 0$ , entonces

$$U_n(t) = \alpha_n \cos(\Omega_n t) + \frac{\beta_n}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t), \quad n \geq 1 \quad \text{con } \Omega_n = c\omega_n,$$

y recaemos en la expresión (14) de las subsección anterior.

- La ecuación de ondas con término complementario (pero con  $g_a = g_b = 0$ ) se comporta como sistema de infinitos osciladores forzados desacoplados. El término fuerza y condiciones iniciales que corresponden al oscilador de frecuencia  $\Omega_n$ ,  $n \in \mathcal{N}$ , son simplemente las proyecciones del término fuerza y condiciones iniciales de la ecuación sobre la función propia  $X_n(x)$ .
- Si  $f(x, t)$  es periódica, de frecuencia  $\Omega$ , y si  $\Omega$  es alguna de las frecuencias propias, entonces tiene lugar la resonancia: la componente resonante puede crecer en amplitud linealmente con  $t$ .

- Notemos que la representación obtenida para  $u(x, t)$  se puede interpretar vía el principio de superposición.

Por tanto, los problemas

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), & a \leq x \leq b, & \quad t \in J, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & a \leq x \leq b, \\ u_t(x, 0) &= v_0(x), & a \leq x \leq b, \\ h_a u(a, t) - k_a u_x(a, t) &= 0, & t \in J, \\ h_b u(b, t) + k_b u_x(b, t) &= 0, & t \in J. \end{aligned}$$

se resuelven a través de los pasos siguientes:

- (i) Obtener un sistema ortogonal y completo de autofunciones  $\{X_n\}_n$  y los autovalores correspondientes  $\lambda_n = -\omega_n^2$ , del PSL asociado

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x), & a \leq x \leq b, \\ h_a X(a) - k_a X'(a) &= 0, \\ h_b X(b) + k_b X'(b) &= 0. \end{aligned}$$

- (ii) Desarrollar los datos iniciales

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_n \alpha_n X_n(x), & \alpha_n &= \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2}, \\ v_0(x) &= \sum_n \beta_n X_n(x), & \beta_n &= \frac{\langle v_0, X_n \rangle}{\|X_n\|^2}. \\ f(x, t) &= \sum_{n \in \mathcal{N}} F_n(t) X_n(x), & F_n(t) &= \frac{\langle f(\cdot, t), X_n \rangle}{\|X_n\|^2}. \end{aligned}$$

- (iii) Buscar la solución en la forma

$$u(x, t) = \sum_n U_n(t) X_n(x),$$

con  $U_n$  solución del PVI

$$\begin{aligned} U_n''(t) + c^2 \omega_n^2 U_n(t) &= F_n(t) \\ U_n(0) &= \alpha_n, \quad U_n'(0) = \beta_n. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.** vamos a discutir, en función de  $\omega \in \mathbb{R}$ , la resolución del problema

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) + \cos(\omega t), & 0 \leq x \leq L, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 1, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Puede comprobarse, como ejercicio, que el PSL asociado

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x), & 0 \leq x \leq L, \\ X'(0) &= X(L) = 0, \end{aligned}$$

proporciona los autovalores y el sistema de autofunciones siguientes:

$$\lambda_k = -\omega_k^2, \quad \omega_k = \frac{(2k-1)\pi}{L}, \quad k \geq 1, \quad X_k(x) = \cos(\omega_k x).$$

Para el desarrollo de los datos

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k X_k(x), \\ v_0(x) &= 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k X_k(x), \\ f(x, t) &= \cos(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) X_k(x), \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{\langle u_0, X_k \rangle}{\|X_k\|^2} = \frac{2}{L} \int_0^L \cos(\omega_k x) dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{\omega_k L}, \\ \beta_k &= \frac{\langle v_0, X_k \rangle}{\|X_k\|^2} = 0, \\ F_k(t) &= \frac{\langle f(\cdot, t), X_k \rangle}{\|X_k\|^2} = \frac{2}{L} \int_0^L \cos(\omega t) \cos(\omega_k x) dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{\omega_k L} \cos(\omega t) \\ &= \alpha_k \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Entonces, la solución es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) X_k(x),$$



con  $U_k$  solución del PVI

$$\begin{aligned} U_k''(t) + c^2 \omega_k^2 U_k(t) &= \alpha_k \cos(\omega t) \\ U_k(0) &= \alpha_k, \quad U_k'(0) = 0. \end{aligned}$$

Como solución general de la ecuación homogénea asociada, se obtiene

$$Y_{k,H}(t) = A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t),$$

con  $A_k, B_k$  constantes. Como solución particular, se tienen dos casos, uno resonante y otro no:

- Si  $\omega \neq \omega_k$  para todo  $k$ , estamos en el caso no resonante. Puede comprobarse (ejercicio) que existe una solución particular de la forma

$$Y_{k,P}(t) = \frac{\alpha_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \cos(\omega t).$$

La solución del problema, para este caso, es

$$U_k(t) = \frac{\alpha_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \cos(\omega t) + A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t),$$

donde  $A_k, B_k$  se obtienen imponiendo los datos iniciales. Así,

$$\begin{aligned} U_k(0) &= \alpha_k = \frac{\alpha_k}{\omega_k^2 - \omega^2} + A_k \Rightarrow A_k = \alpha_k \left( 1 - \frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2} \right) \\ U_k'(0) &= 0 = \omega_k B_k \Rightarrow B_k = 0. \end{aligned}$$

- Si  $\omega = \omega_N$  para algún  $N$ , estamos en el caso resonante. Si  $k \neq N$ , entonces  $U_k(t)$  es la función calculada en el apartado anterior. Para el caso resonante  $k = N$ , puede comprobarse (ejercicio) que existe una solución particular de la forma

$$Y_{N,P}(t) = \frac{\alpha_N t}{2\omega_N} \sin(\omega_N t).$$

La solución del problema, para este caso, es

$$U_N(t) = \frac{\alpha_N t}{2\omega_N} \sin(\omega_N t) + A_N \cos(\omega_N t) + B_N \sin(\omega_N t),$$

donde  $A_N, B_N$  se obtienen imponiendo los datos iniciales. Por tanto

$$\begin{aligned} U_N(0) &= \alpha_N = A_N \Rightarrow A_N = \alpha_N \\ U_N'(0) &= 0 = \omega_N B_N \Rightarrow B_N = 0. \end{aligned}$$

### 2.3.4 Datos generales

Supongamos por último que  $g_a$  y  $g_b$  son arbitrarios. Destaquemos que el paso fundamental que dimos en la subsección anterior

$$\langle u_{xx}(\cdot, t), X_n \rangle = \langle u(\cdot, t), X_n'' \rangle, \quad n \geq 1,$$

ya no es legítimo, pues  $u(\cdot, t)$  no cumple las condiciones de contorno homogéneas.

Lo que hacemos primero en esta situación es sencillamente construir una función  $w(x, t)$  que cumpla las condiciones de contorno dadas, es decir tal que

$$\begin{cases} h_a w(a, t) - k_a w_x(a, t) = g_a(t), \\ h_b w(b, t) + k_b w_x(b, t) = g_b(t). \end{cases}$$

Hay libertad en la construcción de  $w$  y procuraremos tomar la función más sencilla posible. Una vez calculada  $w$ , escribimos

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

y nos centramos en  $v$ .

Por una parte

$$\begin{aligned} v_{tt}(x, t) &= u_{tt}(x, t) - w_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t) - w_{tt}(x, t) \\ &= c^2 v_{xx}(x, t) + f(x, t) + c^2 w_{xx}(x, t) - w_{tt}(x, t), \end{aligned}$$

es decir,  $v$  cumple un problema (13) con nuevo término fuerza corregido

$$f(x, t) + c^2 w_{xx}(x, t) - w_{tt}(x, t).$$

La posición inicial para  $v$  es

$$v(x, 0) = u(x, 0) - w(x, 0) = u_0(x) - w(x, 0),$$

y su velocidad inicial es

$$v_t(x, 0) = u_t(x, 0) - w_t(x, 0) = v_0(x) - w_t(x, 0),$$

que por tanto también son conocidos. Finalmente, por su construcción,  $v$  satisface las condiciones de contorno homogéneas. Ahora podemos obtener  $v(x, t)$  en forma de serie

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} V_n(t) X_n(x),$$

donde las funciones  $V_n(t)$ ,  $n \in \mathcal{N}$ , se determinan resolviendo problemas de Cauchy, según explicamos antes.

Distintas elecciones de  $w$  llevan a distintas  $v$ , pero la suma  $u = v + w$  es siempre la solución  $u$ .

Un último comentario: si alguna de las  $g$ 's es periódica de frecuencia  $\Omega$  y si  $\Omega$  coincide con alguna frecuencia propia, entonces la parte

$$c^2 w_{xx}(x, t) - w_{tt}(x, t)$$

del término complementario podría dar origen a una resonancia.

En resumen, el problema general (13) se resuelve según los pasos siguientes:

- Buscar  $w(x, t)$  que verifique las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} h_a w(a, t) - k_a w_x(a, t) &= g_a(t), \\ h_b w(b, t) + k_b w_x(b, t) &= g_b(t). \end{aligned}$$

- Escribir  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ . Entonces,  $v(x, t)$  es solución del problema

$$\begin{aligned} v_{tt}(x, t) &= c^2 v_{xx}(x, t) + f(x, t) + c^2 w_{xx}(x, t) - w_{tt}(x, t), \\ v(x, 0) &= u_0(x) - w(x, 0), \quad v_t(x, 0) = v_0(x) - w_t(x, 0), \\ h_a v(a, t) - k_a v_x(a, t) &= 0, \\ h_b v(b, t) + k_b v_x(b, t) &= 0. \end{aligned}$$

- Resolver para  $v(x, t)$ , según lo descrito en el caso previo y despejar  $u = v + w$ .

**Ejemplo 7.** Planteamos la resolución del problema

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) + x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \cos(\pi x) - \cos(2\pi x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 1, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Buscamos primero una función  $w(x, t)$  que satisfaga las condiciones de contorno. Nos fijamos en  $w_x(x, t)$ . Vista como función de  $x$  para cada  $t$  fijo, la más sencilla puede ser una recta  $w_x(x, t) = A(t)x + B(t)$ . Imponiendo las condiciones de contorno  $w_x(0, t) = B(t) = 0$ ,  $w_x(1, t) = A(t) + B(t) = 1$ , se tiene  $A(t) = 1$ ,  $B(t) = 0$  y, por tanto, podemos tomar como  $w$  una primitiva de  $x$ , pro ejemplo

$$w(x, t) = \frac{x^2}{2}.$$

Con esta función, el problema para  $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$  tiene la forma

$$\begin{aligned} v_{tt}(x, t) &= v_{xx}(x, t) + g(x, t), \\ v(x, 0) &= v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \\ v_x(0, t) &= v_x(1, t) = 0 \end{aligned}$$

con  $g(x, t) = x + w_{xx}(x, t) = x + 1$ ,  $v_0(x) = \cos(\pi x) - \cos(2\pi x) - \frac{x^2}{2}$ ,  $v_1(x) = 0$ . El problema para  $v$  se resuelve como en el caso previo, pues las condiciones de contorno son homogéneas. Se puede comprobar que se tiene:

- Autovalores y autofunciones:

$$\lambda_k = -\omega_k^2, \quad \omega_k = k\pi, \quad X_k(x) = \cos(\omega_k x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Desarrollos de los datos en el sistema ortogonal y completo de autofunciones:

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k X_k(x), \\ \alpha_k &= \frac{\langle v(\cdot, 0), X_k \rangle}{\|X_k\|^2} = 2 \int_0^1 (\cos(\pi x) - \cos(2\pi x) - \frac{x^2}{2}) \cos(k\pi x) dx \\ &= \begin{cases} 1 - h_1 & k = 1 \\ -1 - h_2 & k = 2 \\ -h_k & k \neq 1, 2 \end{cases}, \\ v_t(x, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k X_k(x), \quad \beta_k = \frac{\langle v_t(\cdot, 0), X_k \rangle}{\|X_k\|^2} = 0 \\ g(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} G_k(t) X_k(x) \\ G_k(t) &= \frac{\langle f(\cdot, t), X_k \rangle}{\|X_k\|^2} = 2 \int_0^1 (x + 1) \cos(k\pi x) dx = \begin{cases} 3/2 & k = 0 \\ \frac{2((-1)^k - 1)}{(k\pi)^2} & k \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $h_0 = 1/6$ ,  $h_k = 2(-1)^k / (k\pi)^2$ ,  $k \neq 0$ .

- La solución  $v(x, t)$  tiene la forma

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t) X_k(x),$$

con

$$\begin{aligned} V_k''(t) + \omega_k^2 V_k(t) &= G_k(t) \\ V_k(0) &= \alpha_k, \quad V_k'(0) = 0. \end{aligned}$$

En este caso, puede comprobarse (ejercicio) que

$$\begin{aligned} V_0(t) &= \alpha_0 + \frac{3t^2}{4}, \\ V_k(t) &= \frac{2((-1)^k - 1)}{(k\pi)^4} + \alpha_k \cos(k\pi t), \quad k \neq 0. \end{aligned}$$

Finalmente, la solución se escribe como  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ .

### 3 El problema puro de valores iniciales

#### 3.1 Ecuación de difusión

Consideremos el problema

$$(18) \quad \begin{cases} u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Como en la formulación no aparecen condiciones de contorno se dice que (18) es un problema puro de valores iniciales.

Si bien es cierto que no aparecen condiciones de contorno, en realidad vamos a suponer que los datos no crecen demasiado en el infinito, que es una forma de imponerlas. Más concretamente, supondremos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)^2 dx < +\infty$$

y que para todo instante  $0 \leq t \leq T$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)^2 dx < +\infty.$$

Vamos a resolver (18) usando la transformada de Fourier. Denotemos

$$\hat{u}_0(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u_0(x) dx,$$

y para  $0 \leq t \leq T$ ,

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u(x, t) dx,$$

y

$$\hat{f}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x, t) dx.$$

Notemos que

$$\hat{u}_t(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u_t(x, t) dx$$

y es bien sabido que

$$-\xi^2 \hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u_{xx}(x, t) dx.$$

Por tanto, al tomar la transformada de Fourier en ambos miembros de (18), se obtiene

$$\hat{u}_t(\xi, t) = -D\xi^2 \hat{u}(\xi, t) + \hat{f}(\xi, t).$$

Para cada  $\xi$  fijo, ésta es una ecuación lineal, de coeficiente constante, cuya condición inicial es

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi).$$

Por tanto, en virtud de la fórmula de variación de las constantes, se deduce para  $0 \leq t \leq T$  y  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-D\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-D\xi^2(t-s)} \hat{f}(\xi, s) ds$$

El núcleo gaussiano

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} e^{-x^2/(4Dt)}, \quad t > 0$$

(el subíndice  $t$  no denota derivada, sino que es un parámetro) tiene la propiedad de que

$$\hat{G}_t(\xi) = e^{-D\xi^2 t}.$$

Ahora, como la transformada inversa de una multiplicación es la convolución de los originales, se deduce que

$$u(x, t) = G_t * u_0(x) + \int_0^t G_{t-s} * f(x, s) ds,$$

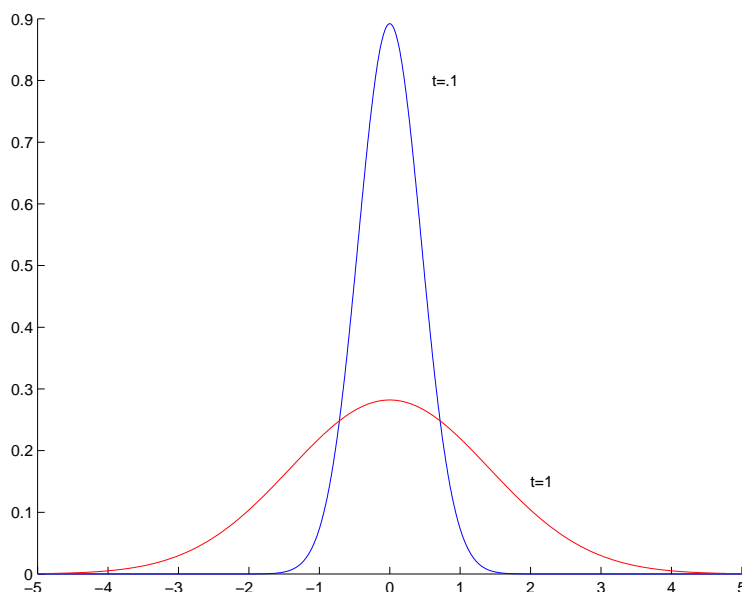


Figura 1: Solución fundamental en  $t = 0.1$  y  $t = 1$ .

siendo

$$G_t * u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x-y)u_0(y) dy,$$

y

$$G_\tau * f(x, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(x-y)f(y, s) dy.$$

(Un buen ejercicio es comprobar que estas fórmulas son dimensionalmente correctas.)

La función  $G_t(x)$  es ella misma una solución de (18), para  $t > 0$  y  $f = 0$ . Se llama la solución fundamental de (18). Esta función es siempre positiva y de área unidad. Cuando  $t \rightarrow 0+$ , tiende a cero fuera del origen. Diríamos que  $G_0(x)$  representa un dato inicial positivo, de integral uno y concentrado en el origen. Físicamente,  $G_t(x)$  sería pues la solución que corresponde al dato inicial “delta de Dirac concentrada en el origen” y  $f = 0$ . Un hecho sorprendente es que para esta condición inicial la solución, que es  $G_t(x)$ , se hace  $> 0$  en todos los puntos en el momento en que  $t > 0$ . Esto implica una propagación a velocidad infinita de la causa, en clara contradicción con la física. La explicación sólo puede ser ésta: cuando los gradientes de temperatura son muy elevados deja de ser válida la ley de Fourier.

Finalmente, comentemos que los problemas en el semieje  $x \geq 0$ , con condición de contorno D ó N homogénea en  $x = 0$ , se reducen, vía el método de las imágenes (reflexiones adecuadas), a un problema puro de valores iniciales. En consecuencia las soluciones de estos problemas también se pueden representar por medio de ciertas convoluciones con el núcleo  $G_t(x)$ . La bibliografía de la asignatura contiene información a este respecto.

### 3.2 Ecuación de ondas. La Solución de D'Alembert

Consideremos el problema

$$(19) \begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Como en la formulación no aparecen condiciones de contorno se dice que (19) es un problema puro de valores iniciales.

Vamos a comenzar estudiando el problema homogéneo, es decir, con  $f = 0$ . Recordemos que dada una función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la expresión

$$\varphi(x \mp ct)$$

representa una onda viajera que desplaza el perfil  $\varphi$  a velocidad  $\pm c$ . Una observación importante es que tales ondas viajeras son siempre soluciones de la ecuación de ondas. En efecto

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x \mp ct) = c^2 \varphi''(x \mp ct) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x \mp ct).$$

Por la linealidad de la ecuación, se deduce que dados dos perfiles definidos por sendas funciones  $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la suma de las ondas viajeras con velocidades  $\pm c$

$$\varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

es también una solución de la ecuación de ondas (recordemos que  $f = 0$ ). En realidad ésta es la solución general de (19), según se explica en el teorema siguiente.

**Teorema 4** *Toda solución de (19) con  $f = 0$  es suma de dos ondas viajeras que se desplazan a velocidades  $\pm c$ , es decir*

$$u(x, t) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct),$$

para ciertas  $\Phi, \Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .



**Demostración.** Introduzcamos las “variables características ”

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

La función del cambio de variable

$$(x, t) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (\xi, \eta) = (x + ct, x - ct) \in \mathbb{R}^2$$

es biyectiva con inversa dada por

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2c}.$$

Es claro entonces que toda función de  $(x, t)$  se puede interpretar como una función de  $(\xi, \eta)$  y viceversa. Denotamos

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right) = u(x, t).$$

Derivando respecto de  $\xi$  obtenemos

$$v_\xi = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2c}u_t,$$

de donde, derivando ahora con respecto de  $\eta$ , resulta

$$v_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{xx} - \frac{1}{2c}u_{xt}\right) + \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{2}u_{xt} - \frac{1}{2c}u_{tt}\right) = \frac{1}{4}\left(u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt}\right) = 0.$$

Se deduce que  $v_\xi$  no depende de la variable  $\eta$ , esto es, que podemos escribir

$$v_\xi(\xi, \eta) = \varphi(\xi),$$

para cierta función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Llamando  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a una primitiva de  $\varphi$ , tendremos

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \Psi(\eta),$$

para otra función  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que ahora sólo depende de la variable  $\eta$ . Deshaciendo finalmente el cambio de variable resulta

$$u(x, t) = v(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct). \quad \square$$

Ahora vamos a ver cómo podemos determinar  $\Phi$  y  $\Psi$  en términos de los datos iniciales de (19).

**Teorema 5** La solución  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  del problema (19) con posición inicial  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y velocidad inicial  $v_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  viene dada por la fórmula de D’Alambert

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\sigma) d\sigma.$$

Es interesante comprobar que la fórmula de D’Alambert es dimensionalmente correcta.

**Demostración.** Sabemos por el teorema anterior que

$$u(x, t) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct)$$

para ciertas  $\Phi, \Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces

$$u_t(x, t) = c\Phi(x + ct) - c\Psi(x - ct).$$

Particularizando las expresiones de  $u$  y de  $u_t$  en  $t = 0$  obtenemos

$$(20) \quad \Phi(x) + \Psi(x) = u_0(x)$$

y

$$(21) \quad \Phi'(x) - \Psi'(x) = \frac{v_0(x)}{c}.$$

La expresión (21) indica que la función  $\Phi(x) - \Psi(x)$  es una primitiva de  $v_0(x)/c$ , de manera que existe una constante  $K$  tal que

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \frac{1}{c} \int_0^x v(\sigma) d\sigma + K.$$

Sumando y restando a (20) esta última igualdad obtenemos

$$2\Phi(x) = u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x v(\sigma) d\sigma + K, \quad 2\Psi(x) = u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x v(\sigma) d\sigma - K.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct) \\ &= \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} v(\sigma) d\sigma - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} v(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\sigma) d\sigma. \quad \square. \end{aligned}$$

Cuando  $f \neq 0$  debemos añadir la influencia del término complementario. Se puede comprobar que ésta viene dada por el Principio de Duhamel

$$\frac{1}{2c} \int_0^t \left( \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\sigma, s) d\sigma \right) ds.$$

Es decir, habría que añadir la integral anterior a la fórmula de D’Alambert. Así, la solución de (19) puede escribirse como

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2c} \int_0^t \left( \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\sigma, s) d\sigma \right) ds.$$

Dado un punto  $(x, t)$  con  $t > 0$ , se llaman curvas características a las rectas en el plano  $XT$  dadas por

$$X - x = \pm c(T - t).$$

Se observa que  $u(x, t)$  sólo depende de los valores de los datos iniciales y de  $f$  sobre la región triangular limitada por las curvas características y el eje coordenado  $OX$ . Se dice que dicho triángulo es la región o dominio de dependencia del punto  $(x, t)$ .

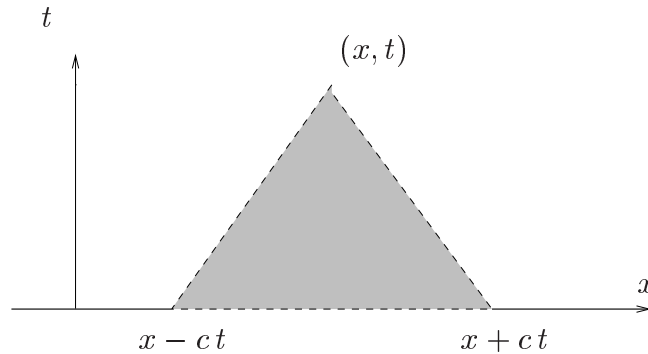


Figura 2: Dominio de dependencia.

Finalmente, señalemos que la fórmula de D’Alambert puede usarse para problemas en el semieje  $x \geq 0$  (con una condición D o N homogénea en  $x = 0$ ) e incluso en intervalos (con condiciones D o N homogéneas). Mediante el método

de las reflexiones (impares para D y pares para N) el problema se interpreta como un problema puro de valores iniciales en  $(-\infty, +\infty)$ . Una vez resuelto éste por la fórmula de D'Alambert, basta con interpretar el resultado sobre la zona donde esté definido el problema original.

### EJERCICIOS

**Ejercicio 1.** Resuelve los siguientes problemas:

- (a)  $u_t = Du_{xx}$ ,  $0 < x < \pi, t > 0$ ,  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = \sin^3(x)$ .  
 (b)  $u_t = Du_{xx}$ ,  $0 < x < \pi, t > 0$ ,  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = x(\pi - x)$ .  
 (c)  $u_t = Du_{xx}$ ,  $0 < x < \pi, t > 0$ ,  $u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = x(\pi - x)$ .  
 (d)  $u_t = Du_{xx}$ ,  $0 < x < \pi, t > 0$ ,  $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = \sin x$ .  
 (e)  $u_t = Du_{xx}$ ,  $a < x < b, t > 0$ ,  $u(a, t) = u(b, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = (x - a)(b - x)$ .  
 (f)  $u_t = 4u_{xx}$ ,  $0 < x < 2, t > 0$ ,  $u(0, t) = u(2, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = 2 \sin \frac{\pi x}{2} - \sin \pi x + 4 \sin 2\pi x$ .  
 (g)  $u_t = Du_{xx}$ ,  $0 < x < L, t > 0$ ,  $u(0, t) = 0, u_x(L, t) + \gamma u(L, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = \cos^3(x)$ .

**Ejercicio 2.** Resuelve los siguientes problemas:

- (a)  $u_t = Du_{xx}$ ,  $0 < x < 1, t > 0$ ,  $u(0, t) = 0, u(1, t) = 1$ ,  $u(x, 0) = x^2$ .  
 (b)  $u_t = Du_{xx} + \sin 3\pi x$ ,  $0 < x < 1, t > 0$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = \sin \pi x$ .  
 (c)  $u_t = Du_{xx}$ ,  $0 < x < 1, t > 0$ ,  $u(0, t) = 0, u(1, t) = \cos t$ ,  $u(x, 0) = x$ .  
 (d)  $u_t = Du_{xx}$ ,  $0 < x < 1, t > 0$ ,  $u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = t$ ,  $u(x, 0) = x$ .  
 (e)  $u_t = Du_{xx}$ ,  $0 < x < 1, t > 0$ ,  $u(0, t) = 1, u_x(1, t) + \gamma u(1, t) = 1$ ,  $u(x, 0) = \sin \pi x$ .

**Ejercicio 3.** Una barra metálica de 20 cm está calentada uniformemente a una temperatura de 20°C. En  $t = 0$  los extremos de la barra se sumergen en un baño de hielo a 0°C y se mantienen a esa temperatura, pero no sale calor por la superficie lateral de la barra. Encuentra el desarrollo en serie de la temperatura de la barra para tiempos posteriores. Usa los dos primeros términos de la serie para determinar aproximadamente la temperatura en el centro de la barra en  $t = 30s$  si la barra está hecha de plata. Misma pregunta para barras de cobre, aluminio o hierro. En la ecuación del calor  $u_t = Du_{xx}$  la constante  $D$  se llama *difusividad térmica*. Para la plata es  $1.71 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ , para el cobre  $1.14 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ , para el aluminio  $0.86 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ , para el hierro  $0.12 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ .

**Ejercicio 4.** Una barra de aluminio de longitud  $L$  está inicialmente a una temperatura uniforme de 25°C. En  $t = 0$  el extremo  $x = 0$  se enfría a 0°C y el otro

extremo se calienta a  $60^\circ\text{C}$ , permaneciendo después ambos a esas temperaturas. Encuentra la distribución de temperaturas. Repite los cálculos con la temperatura del extremo  $x = 0$  fija en  $-10^\circ\text{C}$ .

**Ejercicio 5.** Una barra uniforme de longitud  $L$  está aislada en ambos extremos. Halla la distribución de temperaturas para  $t > 0$  cuando la condición inicial es  $\sin(\pi x/L)$ . Halle el límite de la temperatura para  $t \rightarrow \infty$ .

**Ejercicio 6.** Considera la conducción del calor en una barra de cobre de 100 cm de longitud, cuyos extremos se mantienen a 0 grados C para cada  $t > 0$ . Encuentra la expresión de la temperatura  $u(x, t)$  si la distribución inicial de temperaturas es una de las tres siguientes:

(a)  $u(x, 0) = 50, 0 \leq x \leq 100$ .

(b)  $u(x, 0) = x$  si  $0 \leq x \leq 50$ ;  $u(x, 0) = 100 - x$  si  $50 \leq x \leq 100$ .

(c)  $u(x, 0) = 0$  si  $0 \leq x < 25$ ;  $u(x, 0) = 50$  si  $25 \leq x \leq 75$ ,  $u(x, 0) = 0$  si  $75 < x \leq 100$ .

**Ejercicio 7.** Denotemos por  $v(x, t)$  la temperatura de un alambre de longitud  $L$ . A lo largo del alambre tiene lugar la ley de transferencia de calor entre el alambre y el medio, de modo que, si en éste la temperatura es de cero grados,

$$v_t = Dv_{xx} - bv,$$

con  $b$  constante positiva. Por otra parte, los extremos  $x = 0$  y  $x = L$  del alambre permanecen aislados, de suerte que no hay flujo calorífico, y la distribución de temperaturas inicial es  $f(x)$ . Demuestra que  $v(x, t) = u(x, t) \exp(-bt)$  donde  $u$  verifica la ecuación  $u_t = Du_{xx}$ , con las mismas condiciones iniciales y de contorno que  $v$ .

**Ejercicio 8.** Asume que los extremos del alambre no están aislados, pero permanecen constantemente a temperatura cero. Estudia entonces cómo es ahora la distribución de temperaturas.

**Ejercicio 9.** Encuentra, mediante series de Fourier, el desplazamiento de una cuerda vibrante de longitud  $L$ , con velocidad característica  $c > 0$ , fijada en ambos extremos y sin velocidad inicial, cuando el desplazamiento inicial es  $u(x, 0) = x$  para  $0 \leq x \leq L/4$ ,  $u(x, 0) = L/4$  para  $L/4 \leq x \leq 3L/4$  y  $u(x, 0) = L - x$  para  $3L/4 \leq x \leq L$ .

**Ejercicio 10.** Resuelve el problema anterior con los cambios siguientes. La cuerda sigue fija en ambos extremos, pero ahora el desplazamiento inicial es nulo y la velocidad inicial está dada por el desplazamiento inicial del problema anterior.

**Ejercicio 11.** Explica cómo resolver por separación de variables el problema de la ecuación de ondas en  $0 < x < L$  si la condición frontera en 0 es homogénea Dirichlet y la condición frontera en  $L$  es homogénea Neumann. En el caso de la cuerda vibrante esto corresponde a una cuerda fija en un extremo y libre en el otro. Resuelve el problema para una cuerda libre en los dos extremos.

**Ejercicio 12.** Resuelve el problema puro de valores iniciales para la ecuación de ondas correspondiente al dato inicial:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2, \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \\ 4 - x & \text{si } 3 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{si } 4 \leq x, \end{cases}$$

y velocidad  $u_t(x, 0) = 0$ . Dibuja la solución en tiempos  $t = n$  con  $n$  un número entero. Realiza un esquema de la solución en el plano  $x-t$  estudiando el dominio de dependencia de los puntos  $[x, t]^T$ . ¿En qué tiempos es  $u(0, t) \neq 0$ ? Repite el mismo ejercicio considerando ahora el problema mixto de valores iniciales y condiciones Dirichlet homogéneas en el intervalo  $0 \leq x \leq 6$ .

**Ejercicio 13.** Resuelve el problema puro de valores iniciales para la ecuación de ondas correspondiente al dato inicial  $u(x, 0) = 0$  con velocidad:

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{si } 4 < x, \end{cases}$$

Dibuja la solución en tiempos  $t = n$  con  $n$  un número entero. Realiza un esquema de la solución en el plano  $x-t$  estudiando el dominio de dependencia de los puntos  $[x, t]^T$ . ¿En qué tiempos es  $u(0, t) \neq 0$ ?

**Ejercicio 14.** Resuelve los siguientes problemas:

(a)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) &= 0, u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi x}{L}, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) &= 0, u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= 0, u_t(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{L}, & 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0, \\u(0, t) &= 0, u(L, t) = 0, \\u(x, 0) &= 0, u_t(x, 0) = x(L - x), \quad 0 \leq x \leq L.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx} + \pi^2 t \sin \pi x, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\u(0, t) &= 0, u(1, t) = 0, \\u(x, 0) &= 0, u_t(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx} + x^2, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\u(0, t) &= 0, u(1, t) = 1, \\u(x, 0) &= x, u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

**Ejercicio 15.** Estudia, para los distintos valores de  $\omega$  la solución del problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f_0 \cos \omega t,$$

con  $u(x, 0), u_t(x, 0)$  conocidos y condiciones de contorno homogéneas de tipo Neumann. Repite el problema para un término fuente de la forma  $f(x, t) = g(x) \sin \omega t$ .

**Ejercicio 16.** Una cuerda de longitud  $\pi$ , con los extremos fijos e inicialmente en reposo, es desplazada de su posición inicial  $u = f(x)$ . Su movimiento está frenado por la resistencia del aire, que es proporcional a la velocidad en cada punto, de modo que la ecuación del movimiento puede escribirse

$$u_{tt} = u_{xx} - 2\beta u_t,$$

con  $0 < \beta < 1$ . Comprueba que

$$u(x, t) = \exp(-\beta t) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \cos \alpha_n t + \frac{\beta}{\alpha_n} \sin \alpha_n t \right) \sin nx,$$

donde

$$\alpha_n = \sqrt{n^2 - \beta^2}, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin (nx) dx.$$