I. TELECOMUNICACIÓN
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA II
Examen extraordinario de la asignatura. 19 de Julio de 2010.

Ejercicio 1 (2.75 puntos) (i) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

y sea $p(z) = det(zI - A)$ su polinomio característico, del cual se conocen los valores $p(0) = -20, p(1) = -119, p(2) = -308, p(3) = -575, p(4) = -884$. Sin desarrollar el determinante, calcula $p(z)$.
(ii) Sea $L > 0$. Representa los datos de la tabla

x	0	$L/4$	$L/2$	$3L/4$
y	1	2	-1	-1

con el correspondiente polinomio trigonométrico interpolador y escríbelo de tres formas:

$$(1) \quad P_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi ikx/L}, \quad (2) \quad T_M(x) = \sum_{k=-M}^{M-1} d_k e^{2\pi ikx/L},$$

$$(3) \quad Q_M(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{M} a_k \cos\frac{2\pi kx}{L} + b_k \sin\frac{2\pi kx}{L},$$

con a_k, b_k reales.
(iii) A partir de la tercera representación, determina los valores de γ_k, x_k para reescribir el polinomio en la forma

$$Q_M(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{M} \gamma_k \sin\frac{2\pi k(x - x_k)}{L}.$$

Ejercicio 2 (2.75 puntos). Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, el siguiente pseudocódigo genera dos matrices $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ y $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ del siguiente modo:

Datos de entrada: n, a_{ij}
Valores iniciales: $b_{ij} = 0, c_{ij} = 0$
Para $i = 1, \ldots n$
  $b_{i1} = a_{i1}$
$c_{11} = 1$
Para $j = 2, \ldots, n$
  $c_{ij} = a_{1j}/b_{11}$
Para $k = 2, \ldots, n$
  $c_{kk} = 1$
  Para $i = k, \ldots, n$
    $b_{ik} = a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} b_{ip}c_{pk}$

Para $j = k+1, \ldots, n$
$c_{kj} = \left(a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} b_{kp} c_{pj} \right) / b_{kk}$

(i) Determina la relación entre las matrices A, B y C, la forma que tienen B y C y la expresión de las mismas para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

(ii) Modifica el algoritmo anterior para optimizar el almacenamiento.
(iii) Escribe la versión del pseudocódigo anterior para el caso de una matriz A tridiagonal.

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Se considera la regla de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{3} \left(f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) + f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right). \tag{1}$$

(i) Determina el grado de precisión de (1) y su fórmula asociada para un intervalo $[a, b]$ cualquiera.
(ii) Calcula el núcleo de Peano del error para (1).
(iii) Se considera la regla general

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{N} \alpha_j f(x_j), \tag{2}$$

donde la elección de abscisas x_j está determinada por las condiciones

- Los coeficientes α_j son todos iguales.
- La regla (2) es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que N.

Calcula el valor de los coeficientes α_j y el sistema de ecuaciones que satisfacen las abscisas x_j.

Ejercicio 4 (2 puntos). Supongamos que g es de clase C^1 en un intervalo $(r-\epsilon, r+\epsilon), \epsilon > 0$. Si $|g'(r)| < 1$, demuestra que existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que si $x_0 \in [r-\delta, r+\delta]$ se puede construir la sucesión $x_n = g(x_{n-1})$, con $x_n \in [r-\delta, r+\delta]$ y convergente a r. Además, si los errores $e_n = x_n - r$ son no nulos, comprueba que los cocientes verifican

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \to g'(r), \quad n \to \infty.$$