**I. TELECOMUNICACIÓN**
**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA II**
Examen de la asignatura. 16 de Junio de 2009.

**Ejercicio 1** (2.5 puntos). Se quiere estimar el valor de una función $f$ en el punto $x = 3/2$. De la función $f$ se conocen las relaciones

- $f(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$
- $f'(n) = f(n-1) + (n-1)f'(n-1), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2, f'(1) = \gamma$, con $\gamma$ una constante real.

(i) Construye, en su forma de Newton, el polinomio interpolador de Lagrange de grado tres de $f$ en los nodos $x_n = n \geq 1$ más cercanos a $x = 3/2$. Determina una expresión para el error cometido, en función de alguna derivada de $f$.
(ii) Construye el polinomio interpolador de Hermite de grado tres de $f$ en los nodos $x_n = n \geq 1$ más cercanos a $x = 3/2$. Determina una expresión para el error cometido, en función de alguna derivada de $f$.
(iii) Especifica cuál de los dos polinomios aproxima a priori mejor el valor $f(3/2)$.

**Ejercicio 2** (2.75 puntos). Para $h \in [0,1]$, se considera la regla de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f'(h),$$

(i) Determina:

1. Valores de $h$ para los que la regla tiene grado de precisión uno.
2. Valores de $h$ para los que la regla tiene grado de precisión dos y pesos correspondientes.
3. Valores de $h$ para los que la regla tiene grado de precisión al menos tres.

(ii) Para $h = 1$, calcula el correspondiente núcleo de Peano del error.
(iii) Para $h = 1$ generaliza, con un conveniente cambio de variable, la regla anterior a un intervalo $[a,b]$ cualquiera.

**Ejercicio 3** (2.75 puntos). (i) Calcula la factorización de Cholesky ($A = GG^T$, con $G$ triangular inferior, con elementos diagonales positivos) de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

(ii) Se considera un sistema lineal de orden $n$, $Ax = b$, con $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ tridiagonal, simétrica y definida positiva. Escribe un pseudocódigo de factorización de Cholesky de $A$ con el mínimo coste de almacenamiento.
(iii) Bajo las condiciones del apartado anterior, escribe un pseudocódigo de resolución del sistema (con factorización de Cholesky, sustitución progresiva y sustitución regresiva) y calcula el número de operaciones (raíces cuadradas, productos y divisiones) en función de $n$.

**Ejercicio 4** (2 puntos). Demuestra que la iteración

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} + c,$$

es convergente para cualquier vector inicial $x^{(0)}$ si y sólo si el radio espectral de $M$ es menor que uno.