I. TELECOMUNICACIÓN
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA II
Examen extraordinario. 3 de Septiembre de 2009.

Ejercicio 1 (2.7 puntos). Se considera la tabla

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	1	-1	2
0	2	f_1'	
1	7		

(i) Determina los siguientes polinomios:

- Polinomio interpolador de Lagrange de las dos primeras columnas de la tabla. Exprésalo en la forma de Lagrange y en la forma de Newton.
- Polinomio interpolador de Taylor de la primera fila de la tabla.

(ii) Se considera la tabla de diferencias divididas asociada

$$\begin{array}{ccccccc}
-1 & 1 & & & & & \\
0 & 2 & 1 & & & & \\
-1 & 1 & 1 & 2 & & & \\
-1 & 1 & -1 & 2 & 1 & & \\
0 & 2 & 1 & 2 & -3 & -4 & \\
1 & 7 & 5 & 2 & 0 & 3 & 7/2
\end{array}$$

Determina el valor de f_1' a partir de la misma.
(iii) Utilizando sólo la tabla anterior de diferencias divididas, determina el polinomio de Hermite interpolador de toda la tabla, expresado en la base

$$B = \{1, x, x(x+1), x(x+1)^2, x^2(x+1)^2, x^2(x+1)^2(x-1)\}.$$

Ejercicio 2 (2.6 puntos). En el espacio de funciones reales continuas en el intervalo $[-1, 1]$, se considera el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} w(x)f(x)g(x)dx, \quad w(x) = 1 + x^2.$$

(i) Determina, a partir de la base canónica, una base ortogonal $\{q_0, q_1, q_2\}$ del espacio de polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que 2. Comprueba que los ceros de $q_2(x)$ son $x_0 = -\sqrt{2/5}, x_1 = \sqrt{2/5}$.
(ii) Determina los coeficientes α_0, α_1 para que la regla de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} w(x)f(x)dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1),$$

tenga grado de precisión máximo. Determina dicho grado de precisión.

Ejercicio 3 (2.7 puntos). Se considera el sistema lineal de orden n, $Ax = b$, donde los elementos de $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ son nulos excepto en: la diagonal principal, la superdiagonal y subdiagonal inmediatas a ella, la última columna y la última fila.
(i) Escribe en pseudocódigo las fórmulas de los métodos iterativos de Jacobi y de Gauss-Seidel para el sistema $Ax = b$, adaptando las fórmulas generales y almacenando A de forma eficiente, con la mínima cantidad de memoria posible.
(ii) Se considera la familia de matrices $\{A_n : n > 3\}$ de la forma

$$A_n = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & n-1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & n-1 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & n-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

Determina la norma uno de la matriz de iteración asociada al método de Jacobi para A_9 y estudia la convergencia de dicho método.
(iii) Sea $n > 3$. Estudia la convergencia del método de Jacobi para un sistema con matriz A_n.

Ejercicio 4 (2 puntos). Sean $L = b - a > 0$ y $N \geq 1$ entero. Sobre el intervalo $[a, b]$ se toman los nodos equiespaciados $x_j = a + j\frac{L}{N}$, $j = 0, \ldots, N-1$. Conocidos $y_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \ldots, N-1$, se considera la tabla

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_{N-1}
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_{N-1}

Demuestra que hay un único polinomio trigonométrico de la forma

$$P_{N-1}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{L}(x-a)\right),$$

que interpola la tabla.