I. TELECOMUNICACIÓN
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA II
Examen de la asignatura. 13 de Junio de 2009.

Ejercicio 1 (2.5 puntos). Se considera la tabla

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1	2	3	
2	6	7	8

(i) Determina el polinomio de Hermite de grado menor o igual que cuatro que interpola los datos anteriores y represéntalo en las bases:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^2(x-2), (x-1)^2(x-2)^2\} \\ B_2 &= \{1, (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)^2(x-2), (x-1)^2(x-2)^2\} \end{aligned}$$

(ii) Para los valores de interpolación

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1	2	3	α
2	6	7	8

completa la tabla de diferencias divididas

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & & & & & \\ 2 & 6 & 4 & & & & \\ 2 & 6 & \clubsuit & 3 & & & \\ 1 & 2 & 4 & 3 & \clubsuit & & \\ 2 & 6 & 4 & \clubsuit & 1 & -1 & \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & \clubsuit & -1 \end{array}$$

y determina el valor de α.

Ejercicio 2 (2.75 puntos). En el espacio de funciones reales continuas en el intervalo $[-1, 1]$, se considera el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

(i) Determina, a partir de la base canónica, una base ortogonal $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ del espacio de polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que tres. Comprueba que los ceros de $q_3(x)$ son $x_0 = -\sqrt{3/5}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3/5}$.
(ii) Determina los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ para que la regla de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

tenga grado de precisión máximo. Determina dicho grado de precisión.
(iii) Para un intervalo $[a, b]$ cualquiera, calcula la regla de cuadratura basada en la fórmula del apartado (ii), indicando los correspondientes nodos y pesos.

Ejercicio 3 (2.75 puntos). Se considera el sistema lineal de orden n, $Ax = b$, donde A es una matriz de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_{2n} \\
0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n.n-1} & a_{n,n}
\end{pmatrix}$$

Es decir, los elementos de A son nulos excepto en: la diagonal principal, la superdiagonal y subdiagonal inmediatas a ella, la última columna y la última fila.

(i) Explica cómo almacenar la matriz A de una forma eficiente.

(ii) Utilizando el apartado anterior, escribe un pseudocódigo de resolución del sistema (factorización, sustitución progresiva y sustitución regresiva) adaptando el algoritmo general de eliminación gaussiana sin pivotaje. Calcula el número de operaciones (productos + divisiones) en función de n.

Ejercicio 4 (2 puntos). Supongamos que g es de clase C^1 en un intervalo $(r-\epsilon, r+\epsilon), \epsilon > 0$. Si $|g'(r)| < 1$, demuestra que existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que si $x_0 \in [r-\delta, r+\delta]$ se puede construir la sucesión $x_n = g(x_{n-1})$, con $x_n \in [r-\delta, r+\delta]$ y convergente a r. Además, si los errores $e_n = x_n - r$ son no nulos, comprueba que los cocientes verifican

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \to g'(r), \quad n \to \infty.$$