GRADO INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS DE TELECOMUNICACIÓN
GRADO INGENIERÍA DE SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN
GRADO INGENIERÍA TELEMÁTICA

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

PRIMERA PARTE

Análisis Vectorial
Introducción a la Teoría de Funciones de Variable Compleja

FORMULARIO

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

INFORMACIÓN IMPORTANTE sobre la EVALUACIÓN

La evaluación de la primera parte de la asignatura se realiza mediante exámenes escritos en los que se proponen varias cuestiones de respuesta breve y directa. **En la realización de los exámenes se permite únicamente el uso del resumen o formulario que se entrega en el presente documento junto con el formulario entregado en la asignatura de Cálculo del primer cuatrimestre**. El formulario debe ser impreso, obligatoriamente, **a doble cara**, y **encuadernado** mediante grapas, espiral, etc, de manera que en la realización del examen sólo pueden estar sueltas las hojas de enunciados y los folios en blanco que en ese momento se suministren. La falta de observación de estas normas es motivo suficiente para denegar a quien las incumpla la realización de la prueba de evaluación, lo que conlleva su expulsión de la misma.

El formulario es un extracto de los apuntes de la asignatura proporcionados durante el curso; se han suprimido comentarios, ejemplos e ilustraciones, pero contiene todos los resultados de tipo teórico que puedan ser necesarios para la resolución de las cuestiones propuestas en un examen; también se incluyen algunos resultados adicionales interesantes, extraídos de la colección de ejercicios propuestos. Además, se mantiene la numeración utilizada en los apuntes, y a la hora de hacer referencia a un determinado teorema, propiedad o fórmula, bastará con citar el tema donde se relata y su número. Por supuesto, los resultados que tienen un nombre universalmente admitido (p.e. *teorema de Bolzano*, etc.) se pueden citar sin más que aludir a dicho nombre.

Valladolid, febrero de 2011

Los profesores de la asignatura

TEMA 1 CURVAS Y SUPERFICIES

§ 1 CURVAS EN $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.- Una *curva paramétrica* en $\mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 0$) es un par $(I, \boldsymbol{\varphi})$, donde I es un intervalo de la recta real y $\boldsymbol{\varphi}$ es una aplicación definida en I, con valores en $\mathbb{R}^n$, y de clase $\mathcal{C}^k$ en I.

Si I es un intervalo compacto, $I = [a, b]$, los puntos $\boldsymbol{\varphi}(a)$ y $\boldsymbol{\varphi}(b)$ se denominan respectivamente el *origen* y el *extremo* de la curva; si dichos puntos coinciden, se dice que la curva es *cerrada*.

Se llama *soporte* de la curva al conjunto $\boldsymbol{\varphi}(I)$, imagen de I por $\boldsymbol{\varphi}$, denotado usualmente por $\boldsymbol{\varphi}^*$, y se dice entonces que $\boldsymbol{\varphi}$ es una *parametrización* de $\boldsymbol{\varphi}^*$.

Se dice que la curva $(I, \boldsymbol{\varphi})$ es *simple* si la aplicación $\boldsymbol{\varphi}$ es inyectiva (si la curva es cerrada, se pide la inyectividad en $[a, b)$).

Por último, si la curva es de clase $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$, se puede considerar para cada $t \in I$ el vector $\boldsymbol{\varphi}'(t)$, denominado *vector tangente* a la curva en el punto $\boldsymbol{\varphi}(t)$. Se dice que dicho punto es *regular* si $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}$. Cuando todos los puntos de una curva son regulares, la curva se dice *regular*.

Observación 1.2.- También se utilizan los nombres de *arco* o *camino* como sinónimos de curva.

Ejemplos 1.3.-

1.3.1.- Consideremos una función real f definida en un intervalo I y de clase $\mathcal{C}^k$ en I, $k \geq 1$. Entonces, la curva $(I, \boldsymbol{\varphi})$ dada por

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, f(t)), \qquad t \in I\,,$$

es una curva *plana* (es decir, a valores en $\mathbb{R}^2$) de clase $\mathcal{C}^k$, simple, regular, y

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \big(1, f'(t)\big) \neq (0, 0) \quad \text{ para cada } t \in I\,.$$

Su soporte es precisamente el grafo de la función.

1.3.2.- Es familiar la expresión paramétrica de una recta en el plano, conocidos un punto de la misma (a_1, a_2) y un vector director (v_1, v_2) (no nulo):

$$(x(t), y(t)) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2), \qquad t \in \mathbb{R};$$

el par $(\mathbb{R}, \boldsymbol{\varphi})$, donde $\boldsymbol{\varphi}(t) = (x(t), y(t))$, es una curva paramétrica plana de clase $\mathcal{C}^\infty$, simple y regular, cuyo vector tangente en cada punto es el vector director.

1.3.3.- El par $(I, \boldsymbol{\varphi})$, donde I es un intervalo y

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \qquad t \in I,$$

es una curva paramétrica plana de clase $\mathcal{C}^\infty$ y regular, con soporte contenido en la circunferencia centrada en $(0, 0)$ y de radio 1. Es sencillo probar que:

a) la curva es simple si, y sólo si, la longitud de I es menor o igual que 2π;

b) la curva es cerrada si, y sólo si, $I = [a, a + 2n\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.4.- Dados dos intervalos de $\mathbb{R}$, I_1 e I_2, se dice que una aplicación $\theta\colon I_1 \to I_2$ es un *difeomorfismo* entre ambos si es biyectiva y tanto θ como θ^{-1} son de clase $\mathcal{C}^1$ (y, por lo tanto, con derivada no nula en todo punto). Si los intervalos no son abiertos se entiende que las derivadas en los extremos son laterales.

Definición 1.5.- Se dice que dos curvas paramétricas en $\mathbb{R}^n$, $(I_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ e $(I_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$, son *equivalentes* si existe un difeomorfismo θ de I_1 en I_2 de manera que $\boldsymbol{\varphi}_2 \circ \theta = \boldsymbol{\varphi}_1$. En esta situación, θ recibe el nombre de *cambio de parámetro*.

Observación 1.6.- La relación así definida en el conjunto de las curvas paramétricas es de equivalencia en el sentido conjuntista (es decir, verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva), lo que se demuestra sin dificultad a partir del teorema de la función inversa y de la regla de la cadena.

Observación 1.7.- Resulta obvio que curvas paramétricas equivalentes tienen el mismo soporte; ahora bien, el recíproco no es cierto a menos que se impongan condiciones de regularidad, como las que aparecen en el siguiente resultado.

Teorema 1.8.- Dos curvas paramétricas regulares, simples y con el mismo soporte son siempre equivalentes.

Observación 1.9.- Este resultado justifica que en muchos casos se proporcione una curva indicando únicamente su soporte: si se admite que la parametrización con la que se va a representar dicho conjunto es regular y simple, cualquier otra con esas mismas propiedades resultará equivalente a aquella, lo que basta para garantizar la consistencia de los conceptos y resultados relativos a curvas con los que trabajaremos.

Definición 1.10.- Sea $(I, \boldsymbol{\varphi})$ una curva paramétrica y $P = \boldsymbol{\varphi}(t_0)$ un punto regular de su soporte. Se llama *recta tangente* a la curva (o a su soporte) en P a la que pasa por P y cuyo vector director es $\boldsymbol{\varphi}'(t_0)$.

Definición 1.11.- Se dice que las curvas paramétricas equivalentes $(I_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ e $(I_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ corresponden a la *misma orientación* si el cambio de parámetros que pasa de una a otra tiene derivada positiva; se dice que corresponden a *orientaciones opuestas* si la derivada es negativa.

Observación 1.12.- La noción de orientación tiene una fácil interpretación geométrica: vectores tangentes correspondientes a parametrizaciones de la misma orientación tienen el mismo sentido, mientras que al cambiar la orientación cambia el sentido del vector tangente. En otras palabras, un cambio en la orientación se traduce en la inversión del sentido de recorrido de la curva.

Curvas definidas implícitamente 1.13.-

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y F una función real definida y de clase $\mathcal{C}^1$ en U. Consideremos el conjunto

$$S = \{(x, y) \in U \,:\, F(x, y) = 0\}\,.$$

Tomemos $(x_0, y_0) \in S$ tal que $F'(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, y supongamos (sin pérdida de generalidad) que, en concreto, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces, el teorema de las funciones implícitas garantiza la existencia de un intervalo abierto I, con $x_0 \in I$, un entorno abierto V de y_0 en $\mathbb{R}$, y una función $y = y(x)$, de I en V, de clase $\mathcal{C}^1$ en I, de modo que para cada $x \in I$, $y(x)$ es el único punto de V que satisface

$$F\big(x, y(x)\big) = 0\,.$$

Definimos la curva paramétrica (I, φ), donde

$$\varphi(x) = (x, y(x)), \qquad x \in I\,.$$

Por la propiedad anterior, el soporte está contenido en S, por lo que (I, φ) es una parametrización de una porción de S. Es inmediato que además es simple, de clase $\mathcal{C}^1$ y regular, pues el vector tangente es, para un $x \in I$, $\varphi'(x) = \big(1, y'(x)\big) \neq \mathbf{0}$. Recordando la forma en que están relacionadas las derivadas de F y la de y, es sencillo obtener la siguiente ecuación para la recta tangente a la curva en el punto x_0:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) = 0\,.$$

La misma ecuación se obtiene si es la variable x la que se puede despejar localmente en función de la y; el vector $F'(x_0, y_0)$ es un vector ortogonal a la recta tangente a S en el punto (x_0, y_0).

Si Γ es una curva en $\mathbb{R}^3$ que viene dada implícitamente por las ecuaciones

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad g_2(\boldsymbol{x}) = 0,$$

donde las funciones g_1 y g_2 son de clase $\mathcal{C}^k$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ y tales que el rango de la matriz jacobiana de $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$,

$$\Big(D_j g_i\Big)_{\substack{1 \leq i \leq 2\\ 1 \leq j \leq 3}},$$

es 2 en cada punto de U, entonces la recta vectorial tangente a Γ en un punto $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ es precisamente el conjunto de vectores $\boldsymbol{v}$ que satisfacen

$$\nabla g_i(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Es decir, los vectores $\nabla g_1(\boldsymbol{x})$ y $\nabla g_2(\boldsymbol{x})$ engendran un plano vectorial ortogonal en $\mathbb{R}^3$ a la recta vectorial tangente a Γ en dicho punto.

§ 2 SUPERFICIES EN $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.1.- Se dice que un abierto D de $\mathbb{R}^2$ es *conexo* si todo par de puntos de D se puede unir mediante un camino con soporte íntegramente contenido en D, es decir, si para todos $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ de D, existe una aplicación continua $\boldsymbol{\gamma}\colon [0,1] \to D$ tal que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{\gamma}(1) = \boldsymbol{y}$.

Definición 2.2.- Una *superficie paramétrica* de clase $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 0$) en $\mathbb{R}^3$ es un par $(D, \boldsymbol{\varphi})$, donde D es un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{\varphi}$ es una aplicación definida en D, con valores en $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in D\,,$$

de clase $\mathcal{C}^k$ en D, y localmente inyectiva (es decir, inyectiva en un entorno adecuado de cada punto de D).

Se llama *soporte* de la superficie al conjunto $\boldsymbol{\varphi}(D)$, imagen de D por $\boldsymbol{\varphi}$, denotado usualmente por $\boldsymbol{\varphi}^*$, y se dice entonces que $\boldsymbol{\varphi}$ es una *parametrización* de $\boldsymbol{\varphi}^*$.

Se dice que la superficie $(D, \boldsymbol{\varphi})$ es *simple* si la aplicación $\boldsymbol{\varphi}$ es inyectiva (globalmente).

Por último, si la superficie es de clase $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$, se pueden considerar para cada $(u,v) \in D$ los vectores

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\Big) \qquad \text{y}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\Big)\,,$$

denominados *vectores tangentes* a la superficie en el punto $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$ de su soporte. Se dice que dicho punto es *regular* si los vectores tangentes a la superficie en él son linealmente independientes (es decir, la matriz jacobiana de $\boldsymbol{\varphi}$ en el punto (u,v) tiene rango 2), o equivalentemente, si es no nulo su producto vectorial

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v)\,,$$

en cuyo caso dicho vector se denomina *vector normal* a la superficie en el punto $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$.

Cuando todos los puntos de una superficie son regulares, decimos que la superficie es *regular*.

Ejemplos 2.3.-

2.3.1.- Es bien conocida la ecuación paramétrica de un plano: dados un punto (x_0, y_0, z_0) del mismo y dos vectores generadores, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, linealmente independientes, el plano se parametriza por:

$$\boldsymbol{\varphi}(s,t) = (x_0 + s\,u_1 + t\,v_1\,,\ y_0 + s\,u_2 + t\,v_2\,,\ z_0 + s\,u_3 + t\,v_3), \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Los vectores tangentes a la superficie en cada punto son precisamente $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, y el vector normal es $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Así, la superficie es simple, regular y de clase $\mathcal{C}^\infty$.

2.3.2.- Sea f una función real definida y de clase $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) en un abierto D de $\mathbb{R}^2$. Su gráfica, representada en la forma usual en $\mathbb{R}^3$, es el soporte de la superficie paramétrica $(D, \boldsymbol{\varphi})$, donde

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = (u, v, f(u,v)), \qquad (u,v) \in D\,.$$

Es inmediato comprobar que la superficie es simple, regular y de clase $\mathcal{C}^k$. Los vectores tangentes en cada punto $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$ resultan ser

$$\Big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\Big) \qquad \text{y} \qquad \Big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\Big)\,,$$

y el vector normal es

$$\Big(-\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\,,\ -\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\,,\ 1\Big).$$

2.3.3.- Consideremos la superficie paramétrica $(D, \boldsymbol{\varphi})$, donde

$$D = B(\boldsymbol{0}, 1) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2 + v^2 < 1\}\,, \qquad \text{y}$$
$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \Big(u, v, \sqrt{1 - (u^2+v^2)}\Big), \qquad (u,v) \in D\,.$$

Esta superficie, cuyo soporte es el hemisferio superior de la esfera centrada en el origen y de radio 1, es del tipo considerado en el ejemplo anterior y, por tanto, es simple, de clase $\mathcal{C}^\infty$ y regular, siendo su vector normal en cada punto $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$

$$\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\Big)(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}, \frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}, 1\right).$$

Definición 2.4.- Dados dos abiertos de $\mathbb{R}^2$, D_1 y D_2, una aplicación $\boldsymbol{\theta}: D_1 \to D_2$ es un *difeomorfismo* entre ambos si es biyectiva, de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ y tal que el determinante de su matriz jacobiana, $\mathcal{J}\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u})$, es no nulo en todo punto $\boldsymbol{u} \in D_1$.

Equivalentemente, $\boldsymbol{\theta}$ ha de ser biyectiva, y tanto $\boldsymbol{\theta}$ como $\boldsymbol{\theta}^{-1}$ tienen que ser de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ en sus respectivos dominios. Así, $\boldsymbol{\theta}^{-1}: D_2 \to D_1$ también es un difeomorfismo.

Definición 2.5.- Se dice que dos superficies paramétricas, $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$, son *equivalentes* si existe un difeomorfismo $\boldsymbol{\theta}$ de D_1 en D_2 de manera que $\boldsymbol{\varphi}_2 \circ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varphi}_1$. En esta situación, $\boldsymbol{\theta}$ recibe el nombre de *cambio de parámetros*.

Observación 2.6.- La relación así definida en el conjunto de las superficies paramétricas es de equivalencia en el sentido conjuntista.

Observación 2.7.- Es inmediato que superficies paramétricas equivalentes tienen el mismo soporte. Sin embargo, el hecho de que dos parametrizaciones tengan el mismo soporte no implica que sean equivalentes, a menos que se verifiquen propiedades adicionales.

Teorema 2.8.- Dos superficies paramétricas regulares, simples y con el mismo soporte son siempre equivalentes.

Observación 2.9.- Si se admite que las parametrizaciones con las que se va a trabajar serán simples y regulares, es posible establecer conceptos y resultados coherentes para superficies que vengan dadas exclusivamente mediante su soporte. En lo sucesivo seguiremos este convenio.

Definición 2.10.- Sea $(D, \boldsymbol{\varphi})$ una superficie paramétrica y $P = \boldsymbol{\varphi}(u_0, v_0)$ un punto regular de su soporte.

Se llama *plano tangente* a la superficie (o a su soporte) en el punto P al plano afín que pasa por P y tiene a $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u_0, v_0)$ como vectores generadores.

Se llama *recta normal* a la superficie (o a su soporte) en P a la recta afín que pasa por P y tiene al vector normal a la superficie en P como vector director.

Definición 2.11.- Se dice que dos superficies paramétricas equivalentes $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$ tienen la *misma orientación* si el cambio de parámetros que pasa de una a la otra tiene determinante jacobiano positivo; se dice que corresponden a *orientaciones opuestas* si el jacobiano es negativo.

Observación 2.12.- El concepto de orientación de una superficie tiene una fácil interpretación en términos del vector normal: los vectores normales correspondientes a parametrizaciones de la misma orientación tienen el mismo sentido, mientras que si las parametrizaciones tienen orientación distinta, los vectores normales tienen sentidos opuestos.

Superficies definidas implícitamente 2.13.-

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^3$ y F una función real definida y de clase $\mathcal{C}^1$ en U. Consideremos el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in U \; : \; F(x, y, z) = 0\}\,.$$

Tomemos $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ tal que $F'(\boldsymbol{x}_0) \neq \mathbf{0}$, y supongamos (sin pérdida de generalidad) que, en concreto, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$. Entonces, el teorema de las funciones implícitas garantiza la existencia de un entorno abierto conexo D de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de z_0 en $\mathbb{R}$, y una función $z = z(x, y)$, de D en V, de clase $\mathcal{C}^1$ en D, de modo que para cada $(x, y) \in D$, $z(x, y)$ es el único punto de V que satisface

$$F\big(x, y, z(x, y)\big) = 0\,.$$

Definimos la superficie paramétrica $(D, \boldsymbol{\varphi})$, donde

$$\boldsymbol{\varphi}(x, y) = (x, y, z(x, y)), \qquad (x, y) \in D\,.$$

Por la propiedad anterior, el soporte está contenido en S, por lo que $(D, \boldsymbol{\varphi})$ es una parametrización de una porción de S. Es inmediato que además es simple, de clase $\mathcal{C}^1$ y regular, pues los vectores tangentes son, para un $(x, y) \in D$,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(x, y) = \Big(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\Big)\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(x, y) = \Big(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\Big)\,,$$

y el vector normal resulta ser

$$\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}\Big)(x, y) = \Big(-\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\,,\, -\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\,,\, 1\Big) \neq \mathbf{0}\,.$$

Recordando la forma en que están relacionadas las derivadas de F y las de z, es sencillo obtener la siguiente ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto $\boldsymbol{x}_0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)\,(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\,(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0)\,(z-z_0)=0\,.$$

La misma ecuación del plano tangente se obtiene si son las variables x ó y las que se pueden despejar localmente en función de las otras dos; el vector $F'(\boldsymbol{x}_0)$ es un vector ortogonal al plano tangente a S en el punto $\boldsymbol{x}_0$.

Ejemplo 2.14.- Concretando lo anterior en el caso de una esfera en $\mathbb{R}^3$, que por comodidad en la notación tomaremos centrada en el origen, y que vendrá dada por

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2=r^2\}\,,\quad (r>0)\,,$$

se tiene lo siguiente:

El vector normal a esta "superficie" en cada uno de sus puntos $\boldsymbol{x}$ es proporcional a $F'(\boldsymbol{x})=2\,\boldsymbol{x}$, siendo $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2$.

2.15.- Curvas en coordenadas polares:

Es aconsejable a veces expresar una curva paramétrica plana "en polares", mediante una expresión del tipo $\rho=f(\theta)$, que corresponde a la aplicación

$$\theta\mapsto\big(f(\theta)\,\cos(\theta)\,,\,f(\theta)\,\operatorname{sen}(\theta)\big)\,,$$

definida en el intervalo o unión de ellos en los que se verifique que $f(\theta)\geq 0$ (pues dicho valor mide la distancia al origen del punto del soporte de la curva con argumento θ). El estudio de estas parametrizaciones requiere un análisis del comportamiento de la función f, que se puede reducir a los siguientes apartados:

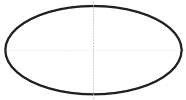
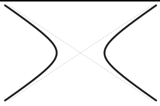
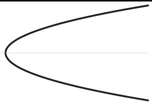
2.15.1.- *Periodicidad*: cuando existe $p>0$ tal que $f(\theta+p)=f(\theta)$ para todo θ, la gráfica de la función se repite tras un giro de amplitud p.

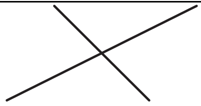
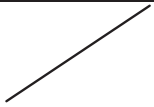
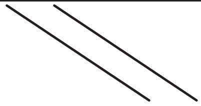
2.15.2.- *Variación de* ρ: el estudio de la monotonía de f informa de la variación de la distancia al origen de los puntos de la curva.

§ 3 CÓNICAS Y CUÁDRICAS.

Definición 3.1.- Una *cónica* es el conjunto C de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que verifican $Q(x, y) = 0$, siendo Q un polinomio de grado 2 con coeficientes reales: $Q(x, y) = a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2 + 2\, b_1\, x + 2\, b_2\, y + c$.

3.2.- **(Clasificación de cónicas)**

Curva	**Ejemplos**	
Elipse	$x^2 + y^2 = r^2$ $x^2 + 2\, y^2 = 4$	
Hipérbola	$x\, y = 1$ $y^2 - x^2 = 1$	
Parábola	$y = x^2$ $x = y^2$	

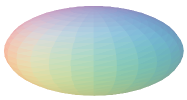
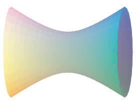
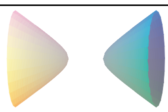
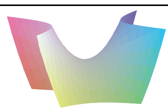
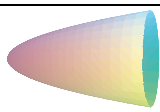
Curva	**Ejemplos**	
Rectas secantes	$x\, y = 0$ $x^2 = y^2$	
Rectas coincidentes	$x^2 = 0$ $(x - y)^2 = 0$	
Rectas paralelas	$x^2 = 1$ $(x - y)^2 = 1$	

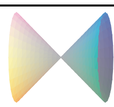
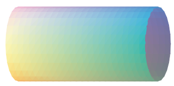
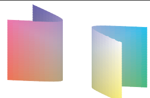
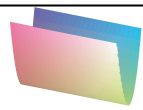
Notas: La únicas cónicas acotadas son las elipses; entre estas se encuentran las circunferencias, que son elipses con excentricidad 0, es decir, igual longitud de sus ejes. Cada una de las dos componentes conexas de una hipérbola se denomina *rama*.

Definición 3.3.- Una *cuádrica* es un conjunto C de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, soluciones de una ecuación $Q(x, y, z) = 0$, siendo Q un polinomio de grado 2 con coeficientes reales:

$$Q(x, y, z) = a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + a_{33}\, z^2 + 2\,(a_{12}\, x\, y + a_{13}\, x\, z + a_{23}\, y\, z) + 2\,(b_1\, x + b_2\, y + b_3\, z) + c\,.$$

3.4.- **(Clasificación de cuádricas)**

Superficie	**Ejemplos**	
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Hiperboloide de una hoja	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + 1$	
Hiperboloide de dos hojas	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$	
Paraboloide hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$	
Paraboloide elíptico	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a}$	

Superficie	**Ejemplos**	
Cono elíptico	$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	
Cilindro elíptico	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Cilindro hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Cilindro parabólico	$z = a\, y^2$	
Planos secantes	$x^2 - y^2 = 0$	
Planos paralelos	$x^2 = 1$	
Planos coincidentes	$z^2 = 0$	

Notas: La únicas cuádricas acotadas son los elipsoides; entre estas se encuentran las esferas. Cada una de las componentes conexas de una cuádrica se denomina *hoja*.

TEMA 2 CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

§ 1 CAMPOS. OPERADORES DIFERENCIALES.

Definición 1.1.- Sea U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

i) Un *campo escalar de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* U es una función $f\colon U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^k$.

ii) Un *campo vectorial de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* U es una aplicación $\boldsymbol{F}\colon U \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$, de clase $\mathcal{C}^k$.

El índice k recorre el conjunto de los números enteros positivos, entendiéndose que las aplicaciones de clase $\mathcal{C}^0$ son las continuas.

Notación: Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Al conjunto de las aplicaciones f de clase $\mathcal{C}^k$ definidas en U con valores en $\mathbb{R}^p$, $f\colon U \to \mathbb{R}^p$, lo denotaremos por $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$.

No es difícil comprobar que estos espacios, dotados de la suma habitual de funciones y el producto de números reales por funciones, son espacios vectoriales. La palabra "operador" se utiliza para designar las aplicaciones lineales entre este tipo de espacios vectoriales, en distinción con el caso de los espacios euclídeos. Cuando la imagen de un campo por un operador se define en términos de las derivadas parciales de sus componentes, se dice que el operador es *diferencial*.

Gradiente de un campo escalar

Definición 1.2.- Sea f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se denomina *gradiente* de f al campo vectorial definido por

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \Big), \quad \boldsymbol{x} \in U .$$

Propiedades 1.3.- Sean f, g campos escalares de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y c un número real. Se verifica:

i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

ii) $\nabla(c\, f) = c\, \nabla f$.

iii) $\nabla(f\, g) = f\, \nabla g + g\, \nabla f$.

iv) Si $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$, $\boldsymbol{x} \in U$, $\nabla\big(f/_g\big) = (g\nabla f - f\nabla g)/_{g^2}$.

Observación 1.4.- De las propiedades i) y ii) se deduce que el gradiente es un operador definido en el espacio de los campos escalares de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U que toma valores en el espacio de los campos vectoriales continuos en U,

$$f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \longmapsto \nabla f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n) .$$

Formalmente escribiremos

$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big) .$$

Definición 1.5.- Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{F}\colon U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Se dice que $\boldsymbol{F}$ es *conservativo* si existe un campo escalar f de clase $\mathcal{C}^1$ en U tal que

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in U .$$

En este caso, se dice que el campo f es una *función potencial* de $\boldsymbol{F}$.

Observación 1.7.- Si $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de un campo escalar f de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, entonces se sigue del lema de Schwarz que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) , \quad 1 \leq i, j \leq n , \quad \boldsymbol{x} \in U .$$

Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto, a no ser que se impongan condiciones adicionales sobre la geometría de U.

Definición 1.8.- Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

i) Se dice que U es *estrellado respecto de un punto* $\boldsymbol{a} \in U$ si para cualquier elemento $\boldsymbol{x}$ de U el segmento de extremos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{x}$, dado por

$$\{t\,\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{a} \,:\, t \in [0,1]\}\,,$$

está contenido en U. Se dice que U es *estrellado* si lo es respecto de alguno de sus puntos.

ii) Se dice que U es *convexo* si para cada par de elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de U el segmento de extremos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, dado por

$$\{t\,\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \,:\, t \in [0,1]\}\,,$$

está contenido en U.

Obviamente un abierto convexo es estrellado respecto de cualquiera de sus puntos.

Proposición 1.9.- (*Lema de Poincaré*)

Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto estrellado U de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de un campo escalar en U si, y sólo si,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{x} \in U\,, \quad i,j = 1,2,\ldots,n\,. \tag{1}$$

Observaciones 1.10.-

i) La demostración teórica de la existencia de potenciales requiere de la noción de integral curvilínea que veremos más adelante, aunque la resolución práctica se reduce en la mayoría de los casos a un cálculo elemental de primitivas. Se puede mostrar que dos potenciales de un mismo campo conservativo (en general, en un abierto conexo) difieren en una constante.

Rotacional de un campo vectorial

Definición 1.11.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$. Se define el *rotacional* de $\boldsymbol{F}$ como el campo vectorial

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial F_1}{\partial z}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial F_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(\boldsymbol{x})\Big)\,, \quad \boldsymbol{x} \in U\,.$$

Observaciones 1.12.-

i) En la terminología anglosajona se denota $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \operatorname{curl}\boldsymbol{F}$.

ii) El siguiente determinante simbólico es útil para recordar la fórmula que define el rotacional:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}\,.$$

Por esta razón el rotacional del campo $\boldsymbol{F}$ también se representa por $\nabla \times \boldsymbol{F}$.

Propiedades 1.13.- Sean $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, G_3)$ dos campos vectoriales y f un campo escalar, todos ellos de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$.

i) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{F} + \operatorname{rot}\boldsymbol{G}\,.$

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\operatorname{rot}(c\,\boldsymbol{F}) = c\,\operatorname{rot}\boldsymbol{F}\,.$

iii) $\operatorname{rot}(f\,\boldsymbol{F}) = f\,\operatorname{rot}\boldsymbol{F} + \nabla f \times \boldsymbol{F}\,.$

Observación 1.14.- De lo anterior se deduce que rot es un operador diferencial de $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^3)$ en $\mathcal{C}^{k-1}(U, \mathbb{R}^3)$.

Proposición 1.15.- Sea f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \boldsymbol{0}\,.$$

Definición 1.16.- Se dice que un campo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ es *irrotacional* si su rotacional es idénticamente nulo en U, es decir,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in U\,.$$

Un campo conservativo de clase $\mathcal{C}^1$ es, en virtud de la proposición anterior, irrotacional. El recíproco viene dado por el lema de Poincaré, que en este caso se escribe:

Proposición 1.17.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto estrellado U de $\mathbb{R}^3$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es conservativo si, y sólo si, es irrotacional.

Divergencia de un campo vectorial

Definición 1.18.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se define la *divergencia* de $\boldsymbol{F}$ como el campo escalar

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in U .$$

Formalmente,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) \cdot (F_1, F_2, \dots, F_n),$$

razón por la cuál también se denota $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}$.

Propiedades 1.19.- Sean $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} \colon U \to \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales y f un campo escalar, todos ellos de clase $\mathcal{C}^1$ en el abierto U de $\mathbb{R}^n$.

i) $\operatorname{div}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{G}$.

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\operatorname{div}(c\,\boldsymbol{F}) = c \operatorname{div} \boldsymbol{F}$.

iii) $\operatorname{div}(f\,\boldsymbol{F}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \nabla f \cdot \boldsymbol{F}$.

Observación 1.20.- De lo anterior se deduce que div es un operador diferencial de $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{C}^{k-1}(U, \mathbb{R})$.

Proposición 1.21.- Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = 0 .$$

Definición 1.22.- Se dice que un campo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ es *solenoidal* o *incompresible* si su divergencia es idénticamente nula en U,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{para cada } \boldsymbol{x} \in U .$$

Según 1.21 el rotacional de un campo vectorial es solenoidal. Recíprocamente:

Proposición 1.23.- Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto estrellado U de $\mathbb{R}^3$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es el rotacional de un campo vectorial $\boldsymbol{G}$ si, y sólo si, $\boldsymbol{F}$ es solenoidal.

Observaciones 1.24.-

i) Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, G_3)$ son campos vectoriales en un abierto de $\mathbb{R}^3$ tales que $\operatorname{rot} \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{G}$ al menos de clase $\mathcal{C}^1$) se dice que $\boldsymbol{G}$ es un *potencial vectorial* de $\boldsymbol{F}$. Nótese la analogía que existe entre los resultados 1.17 y 1.23.

ii) Al igual que sucede con los potenciales escalares, la búsqueda de potenciales vectoriales en el caso de que el abierto U sea conexo se reduce al cálculo de primitivas.

Si el campo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y solenoidal en el intervalo U de $\mathbb{R}^3$, la ecuación $\operatorname{rot} \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$ es el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_3}{\partial y} - \dfrac{\partial G_2}{\partial z} \equiv F_1 \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial z} - \dfrac{\partial G_3}{\partial x} \equiv F_2 \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} - \dfrac{\partial G_1}{\partial y} \equiv F_3 \end{cases}$$

Gracias al resultado 1.15, podemos suponer, por ejemplo, que $G_3 \equiv 0$; entonces, es posible dar unas primeras expresiones para G_1 y G_2 a partir de las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial G_2}{\partial z} \equiv F_1 & \longrightarrow \qquad G_2 = -\displaystyle\int F_1\,dz + C_2(x,y)\,, \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial z} \equiv F_2 & \longrightarrow \qquad G_1 = \displaystyle\int F_2\,dz + C_1(x,y)\,, \end{cases}$$

siendo C_1 y C_2 las correspondientes constantes (respecto de z) de integración. Podemos suponer a continuación, por la misma razón que antes, que $C_2 \equiv 0$, con lo que ya hemos determinado G_3 y G_2. Para concluir, basta determinar C_1 a partir de la tercera ecuación.

Así se ha encontrado un potencial vectorial de $\boldsymbol{F}$; los demás se obtienen sumando a éste gradientes.

TEMA 3 INTEGRALES CURVILÍNEAS

§1 INTEGRACIÓN DE CAMPOS ESCALARES.

Definición 1.1.- Sean $I = [a, b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e $(I, \boldsymbol{\gamma})$ una curva paramétrica continua. Se dice que la curva es *de clase* $\mathcal{C}^k$ *a trozos* si existe una partición del intervalo I,

$$P = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{m-1} < \xi_m = b\} ,$$

tal que $\boldsymbol{\gamma}$ es de clase $\mathcal{C}^k$ en cada intervalo $[\xi_{j-1}, \xi_j]$, $j = 1, 2, \ldots, m$ (recordemos que ser de clase $\mathcal{C}^k$ en un intervalo cerrado exige la existencia de las derivadas laterales correspondientes en los extremos del mismo).

Es sencillo comprobar que si una curva paramétrica es de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, también lo es cualquier otra curva paramétrica equivalente a ella.

Definición 1.2.- Sea $(I, \boldsymbol{\gamma})$ una curva paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, parametrizada en el intervalo compacto $I = [a, b]$ y con valores en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ son sus componentes, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Entonces, se define la *longitud* de la curva $(I, \boldsymbol{\gamma})$ como

$$\operatorname{long}(\boldsymbol{\gamma}) = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \cdots + \gamma_n'(t)^2} \, dt .$$

Observaciones 1.3.-

i) La integral que aparece arriba se debe entender como la suma

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, dt$$

cuando la aplicación $\boldsymbol{\gamma}$ no sea de clase $\mathcal{C}^1$ en todo el intervalo $[a, b]$, sino en cada uno de los subintervalos $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ asociados a la partición P.

ii) Como consecuencia del teorema del cambio de variable, la longitud de curvas paramétricas equivalentes es la misma. En consecuencia, tiene sentido asignar dicha cantidad al conjunto soporte, siempre que se suponga parametrizado de forma simple y regular. El mismo argumento se utiliza para demostrar el siguiente lema.

Lema 1.4.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, f un campo escalar continuo definido en U, y $([a, b], \boldsymbol{\gamma})$ y $([c, d], \boldsymbol{\varphi})$ curvas paramétricas equivalentes de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y con soporte contenido en U. Entonces

$$\int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \, \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, dt = \int_c^d f\big(\boldsymbol{\varphi}(s)\big) \, \|\boldsymbol{\varphi}'(s)\| \, ds .$$

Definición 1.5.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, f un campo escalar continuo definido en U y $([a, b], \boldsymbol{\gamma})$ una curva paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos con soporte contenido en U. Se define la *integral del campo* f *a lo largo de la curva* $\boldsymbol{\gamma}$ por

$$\int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \, \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \, dt ,$$

y se representa por

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f \, dr \qquad \text{o simplemente} \qquad \int_{\boldsymbol{\gamma}} f .$$

Observación 1.6.- El lema previo permite considerar el valor que acabamos de definir como asociado al soporte Γ de la curva paramétrica, siempre que se suponga que su parametrización es regular y simple. Así, es usual denotar dicho valor por

$$\int_{\Gamma} f \, dr.$$

Propiedades 1.8.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, f, g campos escalares continuos en U y $([a, b], \boldsymbol{\gamma})$ una curva paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos con soporte Γ contenido en U. Se verifican:

i) $\displaystyle\int_{\Gamma} (f + g) \, dr = \int_{\Gamma} f \, dr + \int_{\Gamma} g \, dr .$

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_\Gamma (c\,f)\,dr = c\int_\Gamma f\,dr$.

iii) $\displaystyle\Big|\int_\Gamma f\,dr\Big| \le \int_\Gamma |f|\,dr \le \sup\{|f(\boldsymbol{x})| : \boldsymbol{x}\in\Gamma\}\ \mathrm{long}(\Gamma)$.

§ 2 INTEGRACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES.

Definición 2.1.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial continuo en U, y $\Gamma\subset U$ (el soporte de) una curva orientada parametrizada por la curva paramétrica $([a,b],\boldsymbol{\gamma})$ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y compatible con la orientación de Γ. Se define la *integral del campo* $\boldsymbol{F}$ *a lo largo de* $\boldsymbol{\gamma}$ (*o de* Γ) por

$$\int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\cdot\boldsymbol{\gamma}'(t)\,dt = \int_a^b \Big(F_1\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,\gamma_1'(t) + F_2\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,\gamma_2'(t) + \ldots + F_n\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,\gamma_n'(t)\Big)\,dt\,,$$

y se representa por

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad \text{o} \qquad \int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad \text{o} \qquad \int_{\boldsymbol{\gamma}} F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \ldots + F_n\,dx_n\,.$$

Si la curva es cerrada, la integral anterior se denomina también *circulación del campo* $\boldsymbol{F}$ *a lo largo de* $\boldsymbol{\gamma}$.

Proposición 2.3.- Sean $(I,\boldsymbol{\gamma})$, $(J,\boldsymbol{\varphi})$ dos parametrizaciones equivalentes de una curva Γ que definen orientaciones opuestas en dicha curva. Entonces, si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial continuo en un abierto que contiene al soporte de la curva,

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

Observaciones 2.4.-

i) En la práctica, cuando una curva viene dada de forma paramétrica, si la parametrización $\boldsymbol{\gamma}$ no define la orientación deseada no es necesario determinar una nueva parametrización congruente con la orientación, basta calcular la integral del campo según la expresión dada en 2.1 y cambiar el resultado de signo.

Propiedades 2.5.- Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$ dos campos vectoriales continuos en U y una curva orientada Γ en U y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Se verifica:

i) $\displaystyle\int_\Gamma (\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_\Gamma \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{r}$.

ii) Si $c\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_\Gamma (c\,\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{r} = c\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$.

iii) $\displaystyle\Big|\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\Big| \le \sup\{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| : \boldsymbol{x}\in\Gamma\}\ \mathrm{long}(\Gamma)$.

Proposición 2.6.- (*Regla de Barrow*)

Sean f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\gamma}\colon[a,b]\to U$ una parametrización de una curva orientada de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \nabla f\cdot d\boldsymbol{r} = f\big(\boldsymbol{\gamma}(b)\big) - f\big(\boldsymbol{\gamma}(a)\big)\,.$$

Corolario 2.7.- Sean $\boldsymbol{\gamma}_1\colon[a,b]\to U$ y $\boldsymbol{\gamma}_2\colon[c,d]\to U$ parametrizaciones de dos curvas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, con $\boldsymbol{\gamma}_1(a)=\boldsymbol{\gamma}_2(c)$ y $\boldsymbol{\gamma}_1(b)=\boldsymbol{\gamma}_2(d)$, entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \nabla f\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{\gamma}_2} \nabla f\cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

Corolario 2.8.- Si $\boldsymbol{\gamma}\colon[a,b]\to U$ es una parametrización de una curva orientada y cerrada ($\boldsymbol{\gamma}(a)=\boldsymbol{\gamma}(b)$) y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \nabla f\cdot d\boldsymbol{r} = 0\,.$$

§ 3 FÓRMULA DE RIEMANN-GREEN.

Cuando un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es tal que su frontera, $\mathrm{Fr}(U)$, puede ser parametrizada localmente como una curva, el conjunto $\mathrm{Fr}(U)$ se denomina también *borde* de U y se denota por ∂U. Las siguientes definiciones describen con más precisión este tipo de conjuntos, que son los que se contemplan en la teoría que trata este apartado.

Definición 3.1.- Un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ se dice que es un *abierto de Jordan* si es abierto, acotado y su frontera es una unión finita de soportes de curvas paramétricas cerradas, simples y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos.

En el caso de que ∂D sea el soporte de una sola curva del tipo anterior se dice que D es un *dominio de Jordan*.

Lema 3.2.- Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto de Jordan y $\boldsymbol{x}_0$ un punto frontera de D que es regular para la curva correspondiente de ∂D. Sean $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1$ los dos vectores unitarios ortogonales a la recta tangente a ∂D en el punto $\boldsymbol{x}_0$. Entonces uno sólo de estos dos vectores, que denotaremos por $\boldsymbol{n}_e$, verifica la siguiente propiedad:

"Existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \varepsilon)$ se tiene que

$$\boldsymbol{x}_0 + \lambda\, \boldsymbol{n}_e \notin D\text{''}.$$

Definición 3.3.- En las condiciones del lema anterior, al vector $\boldsymbol{n}_e$ que verifica dicha propiedad lo denominaremos *normal exterior a D en el punto $\boldsymbol{x}_0$*.

La *orientación natural* o *inducida en ∂D por D* es la que corresponde en los puntos regulares de ∂D al vector tangente unitario $\boldsymbol{t}$ que forma un ángulo de amplitud $\frac{\pi}{2}$ con la normal exterior $\boldsymbol{n}_e$, esto es:

$$(\widehat{\boldsymbol{n}_e, \boldsymbol{t}}) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{o bien} \qquad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{n}_e\,.$$

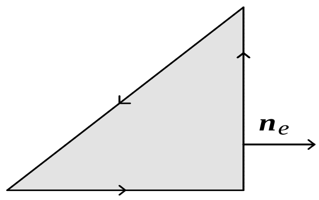
Ejemplos:

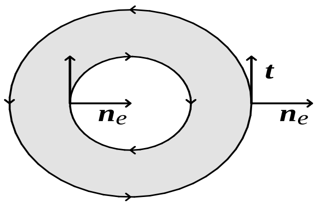
i) La orientación inducida en una circunferencia por el círculo que delimita es la que corresponde a parametrizaciones que la recorren en sentido antihorario (contrario al de las agujas del reloj). Lo mismo ocurre, en general, para los dominios de Jordan.

ii) Si se considera la corona circular

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2 + y^2 < 4\},$$

la orientación inducida en $\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 4\}$ corresponde al sentido antihorario, pero en $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$ la orientación inducida por C es la que corresponde al sentido contrario (el de las agujas del reloj).





Definición 3.4.- Sea D un abierto de Jordan de $\mathbb{R}^2$ tal que su borde ∂D se escribe

$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m\,,$$

siendo cada Γ_j una curva cerrada simple y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en la que se considera la orientación inducida por D. Si $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial continuo en un abierto que contiene a ∂D, se define la *circulación* de $\boldsymbol{F}$ en el borde de D como

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} P\, dx + Q\, dy = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\,,$$

que se denota por

$$\int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy \qquad \text{o} \qquad \int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

Teorema 3.5.- (*Fórmula de Riemann-Green*)

Sea D un abierto de Jordan de $\mathbb{R}^2$. Si $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^2$ que contiene a $\overline{D} = D \cup \partial D$, entonces

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dx\, dy\,,$$

considerándose en ∂D la orientación inducida por D.

Corolario 3.6.- En las condiciones del teorema anterior, si además el campo $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ es tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1 \quad \text{para cada } (x, y) \in D\,,$$

entonces el área de D resulta ser

$$m(D) = \int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy\,.$$

TEMA 4 INTEGRACIÓN EN SUPERFICIES

§ 1 ÁREA DE UNA SUPERFICIE.

En adelante, al igual que se hizo en el caso de las curvas, se identificará con frecuencia una superficie paramétrica simple y regular con su soporte, teniendo en cuenta que dos parametrizaciones de este tipo de un mismo conjunto son siempre equivalentes.

Definición 1.1.- Sea $(D, \boldsymbol{\varphi})$ una parametrización de clase $\mathcal{C}^1$ y regular de una superficie S en $\mathbb{R}^3$. Se define el *área* de S por

$$A(S) = \iint_D \left\| \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \Big)(u,v) \right\| du\, dv .$$

Observaciones 1.2.-

i) La integral anterior tiene perfecto sentido como integral impropia ya que el integrando es una función continua y positiva; en el caso de que esta integral no sea convergente se asignará al área el valor $+\infty$.

§ 2 INTEGRACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES.

Definición 2.1.- Sean S (el soporte de) una superficie regular y orientada en $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $(D, \boldsymbol{\varphi})$ (coherentemente con su orientación), y $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial definido y continuo en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Se define la *integral de* $\boldsymbol{F}$ *en* S o el *flujo de* $\boldsymbol{F}$ *a través de* S por

$$\iint_D \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\varphi}(u,v)\big) \cdot \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \Big)(u,v)\, du\, dv,$$

en el caso de que esta integral sea convergente, y se representa por

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\; d\sigma \qquad \text{ó} \qquad \int_S F_1\, dy\wedge dz + F_2\, dz\wedge dx + F_3\, dx\wedge dy .$$

Proposición 2.3.- Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y denotemos por S^+ y S^- a las dos superficies orientadas asociadas a S. Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial definido y continuo en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S, entonces

$$\int_{S^-} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\; d\sigma = -\int_{S^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\; d\sigma .$$

Propiedades 2.4.- Sean S una superficie regular orientada en $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ dos campos vectoriales continuos en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Se verifica:

i) $\displaystyle\int_S (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_S \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma .$

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_S (c\,\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = c \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma .$

iii) $\displaystyle\left| \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \right| \leq \sup\{ \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| : \boldsymbol{x} \in S^* \}\; A(S) .$

§ 3 SUPERFICIES CON BORDE. TEOREMA DE STOKES.

Consideremos una superficie regular M en $\mathbb{R}^3$, representada por la parametrización $(V, \boldsymbol{\varphi})$ (donde V es un abierto conexo de $\mathbb{R}^2$), y dotada de la orientación dada en ella por esta parametrización.

Si D es un abierto conexo y de Jordan en $\mathbb{R}^2$ con $\overline{D} = D \cup \partial D \subset V$, la restricción de $\boldsymbol{\varphi}$ a D, que seguiremos denotando igual por comodidad, proporciona una nueva superficie S representada paramétricamente por $(D, \boldsymbol{\varphi})$ y contenida en M; además, la orientación fijada en M se traslada a S de forma inmediata (el vector normal unitario considerado es el mismo). Si el borde de D se escribe

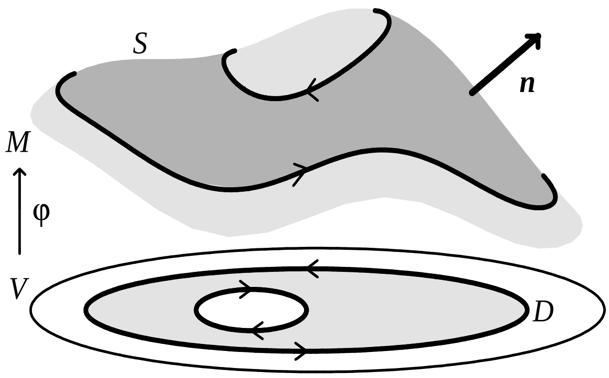
$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m ,$$

siendo cada Γ_j una curva cerrada, simple y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, su imagen

$$\boldsymbol{\varphi}(\partial D) = \boldsymbol{\varphi}(\Gamma_1) \cup \boldsymbol{\varphi}(\Gamma_2) \cup \ldots \cup \boldsymbol{\varphi}(\Gamma_m) ,$$

es la unión de m curvas del mismo tipo en $\mathbb{R}^3$, concretamente, si $\boldsymbol{\gamma}_j : [a_j, b_j] \to V$ es una parametrización de Γ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, que da la orientación inducida en Γ_j por D, entonces $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\gamma}_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^3$ proporciona una parametrización de $\boldsymbol{\varphi}(\Gamma_j)$.

Definición 3.1.- En las condiciones anteriores se dice que S es una *superficie orientada* (*elemental*) *con borde*. El conjunto $\boldsymbol{\varphi}(\partial D)$ se denomina *borde de* S y se denota por ∂S. Por último, la orientación dada en cada una de las curvas $\boldsymbol{\varphi}(\Gamma_j)$ por $([a_j, b_j], \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\gamma}_j)$ se denomina *orientación inducida* en el borde por la orientación de S.



Observación 3.2.- El concepto de borde tiene un significado similar al dado para abiertos de Jordan en el plano: el borde de S es lo que separa a $S \cup \partial S$ de su complementario en M, esto es, su frontera en la superficie M.

La orientación inducida por S en su borde corresponde a la familiar *regla del sacacorchos*, es decir, sobre los puntos de ∂S (que son puntos regulares de M) el producto vectorial de la "normal exterior" con el vector tangente asociado a esta orientación es un vector en la misma dirección y sentido que el vector normal unitario a M en estos puntos para la orientación original.

Teorema 3.4.- (*Teorema de Stokes para superficies elementales*).

Sea S una superficie elemental con borde. Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $S \cup \partial S$, entonces

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma = \int_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \,,$$

cuando en ∂S se considera la orientación inducida por la de S.

Observaciones 3.5.-

ii) Cuando se considera una superficie contenida en el plano $\{z = 0\}$ dada por $\boldsymbol{\varphi}(x, y) = (x, y, 0)\,, (x, y) \in D$, y un campo plano $\boldsymbol{F} = (P, Q, 0)$, la fórmula de Stokes no es otra cosa que la fórmula de Green.

Definición 3.6.- Sean S_1 y S_2 dos superficies elementales, regulares y con borde, dadas, según 3.1, por las parametrizaciones $(D_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$ y $(D_2, \boldsymbol{\varphi}_2)$, respectivamente, y con soportes disjuntos, es decir, tales que

$$\boldsymbol{\varphi}_1(D_1) \cap \boldsymbol{\varphi}_2(D_2) = \emptyset \,.$$

Supongamos además que $\partial S_1 \cap \partial S_2$ es unión finita (posiblemente vacía) de curvas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y que el conjunto

$$C = \overline{\partial S_1 \cup \partial S_2 \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)}$$

es unión finita de curvas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. En estas condiciones, se dice que

$$S = \boldsymbol{\varphi}_1(\overline{D}_1) \cup \boldsymbol{\varphi}_2(\overline{D}_2) \setminus C$$

es la *superficie suma* de las superficies S_1 y S_2, o que es la *cadena* compuesta por las superficies S_1 y S_2, y se la denota por $S = S_1 + S_2$ ó $S = S_1 \uplus S_2$. También se dice que C es el *borde* de S, denotado por $C = \partial S$.

De forma similar se define recurrentemente la *suma* o *cadena* de k superficies elementales con borde $S_1 \uplus S_2 \uplus \ldots \uplus S_k$.

Definición 3.7.- Sea $S = S_1 \uplus S_2 \uplus \cdots \uplus S_k$ la superficie suma de k superficies elementales con borde, considerando en cada una de ellas una de las dos orientaciones posibles. Si para cada par de índices $1 \leq i, j \leq k$, con $i \neq j$ y tales que $\partial S_i \cap \partial S_j \neq \emptyset$, se tiene que las orientaciones inducidas en $\partial S_i \cap \partial S_j$ por S_i y S_j son opuestas una de la otra, se dice que S es *orientable*, y la orientación resultante en ∂S, el borde de la cadena S, se denomina *orientación inducida* por S.

Ejemplos 3.8.-

3.8.1.- Denotemos por S_1 y S_2 a los dos hemisferios de la esfera unidad

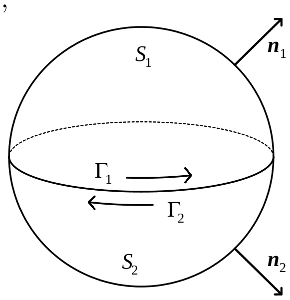
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

dados por $S_1 = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ y $S_2 = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$. Resulta que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y $\partial S_1 = \partial S_2$ (ver 3.3), así que

$$\overline{\partial S_1 \cup \partial S_2 \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)} = \emptyset\,,$$

resultando que $S_1 \uplus S_2 = S$. Si S_1 y S_2 se orientan según los vectores normales $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$, respectivamente, dados ambos por

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}(x, y, z) = (x, y, z)\,, \qquad \boldsymbol{x} \in S_1 \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{x} \in S_2\,,$$



la orientación que induce S_1 en su borde, Γ_1, es la que corresponde a recorrer la circunferencia $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\,,\ z = 0\}$ en sentido antihorario, y la que induce S_2 en el suyo, Γ_2, es la opuesta (véase la gráfica de la derecha).

Hemos obtenido así S como suma de superficies elementales que resulta ser una cadena orientable sin borde; a este tipo de cadenas se las denomina *cerradas* y, de una manera puramente coloquial, podemos decir que son frontera de abiertos de $\mathbb{R}^3$.

3.8.2.- Consideremos las superficies S_1 y S_2 dadas por

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\ 0 < z < 1\}\,,$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\,,\ z = 0\}$$

(una porción de cilindro y un disco abierto en el plano $\{z = 0\}$). Resulta evidente que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$; el borde de S_1 es la unión de dos circunferencias Γ_0 y Γ_1, de radio 1 y situadas en los planos $\{z = 0\}$ y $\{z = 1\}$, respectivamente, y el borde de S_2 es $\Gamma_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 0\}$. Entonces

$$\overline{\partial S_1 \cup \partial S_2 \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)} = \Gamma_1\,.$$

La suma $S = S_1 + S_2$ es una cadena de superficies cuyo aspecto es el de un vaso; si S_1 se orienta según el vector normal $\boldsymbol{n}_1(x, y, z) = (x, y, 0)$ y S_2 según el vector normal $\boldsymbol{n}_2(x, y, z) = (0, 0, -1)$, entonces, la orientación que induce S_1 en Γ_0 es la que corresponde a recorrer esta circunferencia en sentido antihorario, y la que induce S_2 es la opuesta, resultando que S es orientable, y que la orientación inducida en su borde $\partial S = \Gamma_1$ es la que se obtiene al recorrer esta circunferencia en sentido horario.

Definición 3.9.- Sean $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_k$ una cadena orientable de superficies y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Se define la *integral* de $\boldsymbol{F}$ en S o el *flujo* de $\boldsymbol{F}$ a través de S por

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_j\, d\sigma\,,$$

donde para cada $j = 1, 2, \ldots, k$, $\boldsymbol{n}_j$ es el vector normal unitario asociado a la orientación correspondiente en cada S_j.

Teorema 3.10.- (*Teorema de Stokes*).

Sean S una cadena orientable de superficies y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\,,$$

cuando en ∂S, el borde de S, se considera la orientación inducida por S.

Corolario 3.11.- En las condiciones del teorema anterior, si S es una superficie cerrada (es decir, $\partial S = \emptyset$), entonces

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0\,.$$

§4 ABIERTOS CON FRONTERA REGULAR A TROZOS. TEOREMA DE LA DIVERGENCIA.

Definición 4.1.- Sea V un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. Se dice que su frontera es *regular a trozos* si el conjunto $\mathrm{Fr}(V)$ es el soporte de una cadena orientable de superficies. En estas condiciones $\mathrm{Fr}(V)$ se denomina también *borde* de V y se denota por ∂V.

Lema 4.2.- Sean V un abierto de $\mathbb{R}^3$ con frontera regular a trozos y $\boldsymbol{x}_0$ un punto de la frontera de V que es regular para la superficie a la que pertenece. Sean $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1$ los dos vectores unitarios normales a ∂V en el punto $\boldsymbol{x}_0$. Entonces, uno sólo de estos dos vectores, que denotaremos por $\boldsymbol{n}_e$, verifica la siguiente propiedad:

"Existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \varepsilon)$ se tiene que

$$\boldsymbol{x}_0 + \lambda\, \boldsymbol{n}_e \notin V\text{''}.$$

Definición 4.3.- En las condiciones del lema anterior, al vector $\boldsymbol{n}_e$ que verifica dicha propiedad se le denomina *normal exterior* a V en el punto $\boldsymbol{x}_0$. La *orientación natural* o *inducida en ∂V por V* es la que corresponde a este vector normal en cada uno de los puntos regulares.

Observación 4.4.- No es difícil probar que, en esta situación, la cadena de superficies ∂V es orientable y sin borde (los bordes de las superfices que constituyen dicha cadena se orientan en sentidos opuestos respecto de superficies adyacentes).

Teorema 4.5.- (*Teorema de la divergencia o de Gauss-Ostrogradsky*)

Sean V un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera regular a trozos y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $\overline{V}$, entonces

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} \;\; dx\, dy\, dz = \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,,$$

cuando en ∂V se considera la orientación dada por la normal exterior.

§1 EL CUERPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Se consideran en el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ las operaciones suma "+" y producto " $\cdot$ " definidas como sigue:

i) $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

ii) $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1\cdot a_2 - b_1\cdot b_2, a_1\cdot b_2 + b_1\cdot a_2)$.

Señalemos que los signos de suma y producto a la derecha de las igualdades corresponden a las operaciones definidas en $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.- La terna $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se denomina *cuerpo de los números complejos* y se denota por $\mathbb{C}$. Sus elementos son los *números complejos*.

Observación 1.2.- Cada número complejo (a, b) se puede escribir como

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)\cdot (b, 0)\,.$$

Denotando por i al número $(0, 1)$, denominado *unidad imaginaria*, e identificando $(a, 0)$ y $(b, 0)$ con los números reales a y b, el número (a, b) se representa por $a+i\,b$, representación que recibe el nombre de *expresión binómica* del número (a, b).

Definición 1.3.- Sea $z = a+i\,b$ un número complejo. Los números reales a y b reciben el nombre de *parte real* y *parte imaginaria* de z, respectivamente, y se denotan por $a = \mathrm{Re}(z)$ y $b = \mathrm{Im}(z)$.

Observación 1.4.- En virtud de lo anterior, es lícito considerar $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{C}$. Los números reales son aquéllos que tienen parte imaginaria nula.

Proposición 1.5.- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo; es decir, se cumplen las siguientes propiedades:

$(\mathbb{C}, +)$ es un grupo conmutativo, es decir:
S1: Para cualesquiera $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ se verifica $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (propiedad asociativa).
S2: Para cada $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se verifica $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (propiedad conmutativa).
S3: Existe un elemento en $\mathbb{C}$ denotado por 0 tal que $z + 0 = z$ para cada $z \in \mathbb{R}$ (existencia de elemento neutro).
S4: Para cada $z \in \mathbb{C}$ existe un elemento $-z \in \mathbb{C}$ tal que $z + -z = 0$ (existencia de elemento simétrico).

$(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot\,)$ es un grupo conmutativo, es decir:
P1: Para cualesquiera $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ se verifica $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3 = z_1\cdot (z_2\cdot z_3)$.
P2: Para cada $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se verifica $z_1\cdot z_2 = z_2\cdot z_1$.
P3: Existe un elemento en $\mathbb{C}$ denotado por 1 tal que $z\cdot 1 = z$ para cada $z \in \mathbb{R}$ (existencia de elemento unidad).
P4: Para cada $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ existe un elemento $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z\cdot z^{-1} = 1$ (existencia de elemento inverso).

El producto es distributivo respecto de la suma:
D: Para cualesquiera $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ se verifica $(z_1 + z_2)\cdot z_3 = z_1\cdot z_3 + z_2\cdot z_3$.

Definición 1.6.- Sea $z = a + i\,b$ un número complejo.

i) El número complejo $a - i\,b$ se denomina *conjugado* de z y se denota $\overline{z}$.

ii) El número real positivo $\sqrt{a^2 + b^2}$ se denomina *módulo* de z y se denota $|z|$.

Observaciones 1.7.-

i) Un número complejo z es real si, y sólo si, $z = \overline{z}$.

ii) Si $z \in \mathbb{C}$ es real, el módulo de z es el valor absoluto de z.

Propiedades 1.8.- Sean z y w números complejos. Se verifican:

1.8.1.- $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$ y $\overline{w\,z} = \overline{w}\;\overline{z}$.

1.8.2.- $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ e $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\,i}$.

1.8.3.- $z\cdot \overline{z} = |z|^2$.

1.8.4.- Si $z \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

1.8.5.- $|z| = |\overline{z}|$.

1.8.6.- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

1.8.7.- $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.

1.8.8.- $|z\cdot w| = |z|\cdot |w|$.

1.8.9.- Si $w \neq 0$, entonces $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

1.8.10.- $|z+w| \leq |z| + |w|$.

1.8.11.- $\big||z| - |w|\big| \leq |z-w|$.

Definición 1.9.- Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, un *argumento* de z es un número real θ tal que

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\ \operatorname{sen}(\theta).$$

Si $\theta \in [-\pi, \pi)$ se dice que θ es el *argumento principal* de z.

Observación 1.10.- Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y se denota por $\operatorname{Arg}(z)$ al conjunto de todos los argumentos de z, dado un argumento θ_0 de z, entonces $\operatorname{Arg}(z) = \{\theta_0 + 2\,k\,\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposición 1.11.- Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Si α es un argumento de a y β es un argumento de b, entonces:

i) $\alpha + \beta$ es un argumento de $a\,b$.

ii) $\alpha - \beta$ es un argumento de a/b.

iii) $-\alpha$ es un argumento de $\overline{a}$ y de $1/a$.

Observación 1.12.- Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $\theta \in \operatorname{Arg}(z)$, entonces

$$z = |z|\,\big(\cos(\theta) + i\ \operatorname{sen}(\theta)\big)\,.$$

Esta representación se conoce con el nombre de *expresión polar* del número complejo z. En estas condiciones, es obvio que

$$\operatorname{Re}(z) = |z|\,\cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Im}(z) = |z|\ \operatorname{sen}(\theta)\,.$$

Recíprocamente, si $z = x + i\,y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ se escribe

$$z = \rho\,\big(\cos(\theta) + i\ \operatorname{sen}(\theta)\big)\,, \quad \rho > 0\,,$$

entonces

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad \theta \in \operatorname{Arg}(z)\,.$$

Fórmula de De Moivre 1.13.- Si $n \in \mathbb{Z}$ y $z = \rho\,\big(\cos(\theta) + i\ \operatorname{sen}(\theta)\big) \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, entonces

$$z^n = \rho^n\,\big(\cos(n\,\theta) + i\ \operatorname{sen}(n\,\theta)\big)\,.$$

Definición 1.14.- Sea $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ $(x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z))$. Se define la *exponencial de* z, denotada por $\exp(z)$, como

$$\exp(z) = e^x\,\big(\cos(y) + i\ \operatorname{sen}(y)\big)\,.$$

Propiedades 1.15.-

i) Si $z \in \mathbb{R}$, entonces $\exp(z) = e^z$.

ii) $|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

iii) $\operatorname{Im}(z) \in \operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big)$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

iv) $\exp(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

v) Si $t \in \mathbb{R}$, entonces $\exp(it) = \cos(t) + i\ \operatorname{sen}(t)$.

vi) $\exp(z) = 1$ si, y sólo si, $z = 2\,k\,\pi\,i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

vii) $\exp(z+w) = \exp(z)\,\exp(w)$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$.

viii) $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

ix) $\exp(z) = \exp(w)$ si, y sólo si, $z = w + 2\,k\,\pi\,i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

x) Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $\theta \in \mathrm{Arg}(z)$, entonces $z = |z|\,\exp(i\,\theta)$.

Observación 1.16.- Es habitual representar $\exp(z) = e^z$, también cuando $z \notin \mathbb{R}$.

Definición 1.17.- La aplicación inversa de $\exp : B_c = \{z \in \mathbb{C} : c \leq \mathrm{Im}(z) < c + 2\,\pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se denota $\log_c$ y se denomina *rama* o *determinación del logaritmo con rango* B_c; cuando $c = -\pi$ recibe el nombre particular de *rama principal del logaritmo*.

Observaciones 1.18.-

i) Un sencillo cálculo muestra que si $c \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces

$$\log_c(z) = \ln(|z|) + i\,\arg(z)\,,$$

donde $\arg(z)$ es el único argumento de z que pertenece al intervalo $[c, c+2\,\pi)$. En particular, si se toma la rama principal del logaritmo, resulta que

$$\log_{-\pi}(x) = \ln(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

ii) Para un número complejo $z \neq 0$, la expresión '$\log(z)$' representa el conjunto de todos los valores de las ramas del logaritmo en el punto z. Es decir, fijado un argumento de z, $\arg(z)$,

$$\log(z) = \big\{ \ln(|z|) + \arg(z)\,i + 2\,k\,\pi\,i : k \in \mathbb{Z} \big\}\,.$$

Definición 1.19.- Sea z un número complejo, $z \neq 0$. Fijada una rama del logaritmo con rango B_c, se define para $w \in \mathbb{C}$ la *potencia* de base z y exponente w por

$$z^w = \exp\big(w \log_c(z)\big)\,.$$

En caso de que no se especifique una rama concreta del logaritmo, la expresión z^w denotará todos los valores posibles de las potencias en las distintas determinaciones.

Proposición 1.20.- Sean $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $n \in \mathbb{Z}$. Para cualquier determinación del logaritmo se tiene:

i) Si $n > 0$, entonces $z^n = z \cdot z \overset{n \text{ veces}}{\cdots} z\,.$ **ii)** Si $n < 0$, entonces $z^n = \dfrac{1}{z \cdot z \overset{-n \text{ veces}}{\cdots} z}\,.$

Proposición 1.21.- Sean $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$. Existen exactamente n números complejos distintos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ tales que

$$w_k{}^n = z\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Estos números son todos los valores de $z^{1/n}$ en las distintas determinaciones, reciben el nombre de *raíces n-ésimas de z* y se representan de forma genérica por $\sqrt[n]{z}$. Fijado un argumento de z, $\arg(z)$, se obtienen de la siguiente forma:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\,\exp\Big(i\,\frac{\arg(z) + 2\,\pi\,(k-1)}{n}\Big)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Definición 1.22.- Si $z \in \mathbb{C}$, se definen

$$\cos(z) = \frac{\exp(i\,z) + \exp(-i\,z)}{2}\,, \qquad \mathrm{sen}(z) = \frac{\exp(i\,z) - \exp(-i\,z)}{2\,i}\,,$$

denominadas *coseno* y *seno* de z, respectivamente.

Proposición 1.23.- Si $x \in \mathbb{R}$ se verifica:

i) $\exp(-i\,x) = \overline{\exp(i\,x)}\,.$

ii) $|\exp(i\,x)| = 1\,.$

iii) $\cos(x) = \mathrm{Re}\big(\exp(i\,x)\big)$.

iv) $\mathrm{sen}(x) = \mathrm{Im}\big(\exp(i\,x)\big)$.

v) $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\mathrm{sen}(x)| \leq 1$.

Proposición 1.24.- $\text{sen} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son funciones periódicas, de periodo 2π, es decir,

$$\cos(z + 2\pi) = \cos(z) \quad \text{y} \quad \text{sen}(z + 2\pi) = \text{sen}(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Propiedades 1.25.- Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica:

1.25.1.- $\exp(iz) = \cos(z) + i\,\text{sen}(z)$ y $\exp(-iz) = \cos(z) - i\,\text{sen}(z)$.

1.25.2.- $\text{sen}(z) = -\,\text{sen}(-z)$ y $\cos(z) = \cos(-z)$.

1.25.3.- $\cos^2(z) + \text{sen}^2(z) = 1$.

1.25.4.- $\text{sen}(z + w) = \text{sen}(z)\cos(w) + \cos(z)\,\text{sen}(w)$.

1.25.5.- $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \text{sen}(z)\,\text{sen}(w)$.

1.25.6.- $\text{sen}(2z) = 2\,\text{sen}(z)\cos(z)$ y $\cos(2z) = \cos^2(z) - \text{sen}^2(z)$.

1.25.7.- $\text{sen}^2(z) = \dfrac{1 - \cos(2z)}{2}$ y $\cos^2(z) = \dfrac{1 + \cos(2z)}{2}$.

1.25.8.- $\text{sen}(z)\,\text{sen}(w) = \dfrac{\cos(z - w) - \cos(z + w)}{2}$

1.25.9.- $\cos(z)\cos(w) = \dfrac{\cos(z - w) + \cos(z + w)}{2}$.

1.25.10.- $\text{sen}(z)\cos(w) = \dfrac{\text{sen}(z + w) + \text{sen}(z - w)}{2}$.

1.25.11.- $\text{sen}(z) + \text{sen}(w) = 2\,\text{sen}\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\cos\left(\dfrac{z - w}{2}\right)$.

1.25.12.- $\text{sen}(z) - \text{sen}(w) = 2\cos\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{z - w}{2}\right)$.

1.25.13.- $\cos(z) + \cos(w) = 2\cos\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\cos\left(\dfrac{z - w}{2}\right)$.

1.25.14.- $\cos(z) - \cos(w) = -2\,\text{sen}\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{z - w}{2}\right)$.

Propiedades 1.26.-

1.26.1.- $\cos(0) = 1$ y $\text{sen}(0) = 0$.

1.26.2.- $\cos\left(\pi/2\right) = 0$ y $\text{sen}\left(\pi/2\right) = 1$.

1.26.3.- $\cos(\pi) = -1$ y $\text{sen}(\pi) = 0$.

1.26.4.- $\text{sen}(z + \pi) = -\,\text{sen}(z)$ y $\cos(z + \pi) = -\cos(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

1.26.5.- $\text{sen}\left(\pi/2 - z\right) = \cos(z)$ y $\cos\left(\pi/2 - z\right) = \text{sen}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

1.26.6.- $\text{sen}(z) = 0$ si, y sólo si, $z = k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

1.26.7.- $\cos(z) = 0$ si, y sólo si, $z = \pi/2 + k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.27.- Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq k\pi + \pi/2$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\text{tg}(z) = \frac{\text{sen}(z)}{\cos(z)} = -i\,\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{\exp(iz) + \exp(-iz)},$$

que recibe el nombre de *tangente* de z. Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\text{cotg}(z) = \frac{\cos(z)}{\text{sen}(z)} = i\,\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{\exp(iz) - \exp(-iz)},$$

denominada *cotangente* de z.

Definición 1.28.- Si $z \in \mathbb{C}$, se definen

$$\text{Ch}(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}, \qquad \text{Sh}(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2},$$

denominadas *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* de z, respectivamente.

Proposición 1.29.- $\text{Sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $\text{Ch} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son funciones periódicas, de periodo $2\pi i$, es decir

$$\text{Ch}(z + 2\pi i) = \text{Ch}(z) \quad \text{y} \quad \text{Sh}(z + 2\pi i) = \text{Sh}(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Propiedades 1.30.- Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica:

1.30.1.- $\mathrm{Sh}(z) = -\mathrm{Sh}(-z)$ y $\mathrm{Ch}(z) = \mathrm{Ch}(-z)$.

1.30.2.- $\mathrm{Ch}^2(z) - \mathrm{Sh}^2(z) = 1$.

1.30.3.- $\mathrm{Sh}(z) = -i\,\mathrm{sen}(i\,z)$, $\mathrm{sen}(z) = -i\,\mathrm{Sh}(i\,z)$.

1.30.4.- $\mathrm{Ch}(z) = \cos(i\,z)$, $\cos(z) = \mathrm{Ch}(i\,z)$.

1.30.5.- $\mathrm{Sh}(z+w) = \mathrm{Sh}(z)\,\mathrm{Ch}(w) + \mathrm{Ch}(z)\,\mathrm{Sh}(w)$.

1.30.6.- $\mathrm{Ch}(z+w) = \mathrm{Ch}(z)\,\mathrm{Ch}(w) + \mathrm{Sh}(z)\,\mathrm{Sh}(w)$.

1.30.7.- $\mathrm{Sh}(2\,z) = 2\,\mathrm{Sh}(z)\,\mathrm{Ch}(z)$ y $\mathrm{Ch}(2\,z) = \mathrm{Ch}^2(z) + \mathrm{Sh}^2(z)$.

1.30.8.- $\mathrm{Sh}^2(z) = \dfrac{\mathrm{Ch}(2\,z) - 1}{2}$ y $\mathrm{Ch}^2(z) = \dfrac{\mathrm{Ch}(2\,z) + 1}{2}$.

Propiedades 1.31.- Si $z \in \mathbb{C}$ y $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$, se verifica:

1.31.1.- $\mathrm{Sh}(z) = \mathrm{Sh}(x)\cos(y) + i\,\mathrm{Ch}(x)\,\mathrm{sen}(y)$.

1.31.2.- $\mathrm{Ch}(z) = \mathrm{Ch}(x)\cos(y) + i\,\mathrm{Sh}(x)\,\mathrm{sen}(y)$.

1.31.3.- $\mathrm{sen}(z) = \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{Ch}(y) + i\,\cos(x)\,\mathrm{Sh}(y)$.

1.31.4.- $\cos(z) = \cos(x)\,\mathrm{Ch}(y) - i\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{Sh}(y)$.

1.31.5.- $\mathrm{Sh}(z) = 0$ si, y sólo si, $z = i\,k\,\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

1.31.6.- $\mathrm{Ch}(z) = 0$ si, y sólo si, $z = i\left(\pi/2 + k\,\pi\right)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.32.- Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i\left(k\,\pi + \pi/2\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\mathrm{Tgh}(z) = \frac{\mathrm{Sh}(z)}{\mathrm{Ch}(z)} = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{\exp(z) + \exp(-z)}\,,$$

que recibe el nombre de *tangente hiperbólica* de z. Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i\,k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\mathrm{Cotgh}(z) = \frac{\mathrm{Ch}(z)}{\mathrm{Sh}(z)} = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{\exp(z) - \exp(-z)}\,,$$

denominada *cotangente hiperbólica* de z.

§ 2 TOPOLOGÍA, LÍMITES Y CONTINUIDAD.

Como conjunto, el cuerpo de los números complejos es $\mathbb{R}^2$, pero además, el hecho de que el módulo de un número complejo $z = x + i\,y$ sea la norma euclídea del punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ permite trasladar todos los conceptos topológicos ya conocidos en este último espacio a $\mathbb{C}$. Esto es el objeto de este epígrafe.

Notación: En lo que sigue, si z es un número complejo, la expresión $z = x + i\,y$ significará que

$$x = \mathrm{Re}(z) \qquad \text{e} \qquad y = \mathrm{Im}(z)\,.$$

Si $f : A \to \mathbb{C}$ es una función compleja definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{C}$, las expresiones

$$f = u + i\,v \qquad \text{o} \qquad f(z) = u(z) + i\,v(z)$$

se utilizarán para significar que

$$u = \mathrm{Re}(f) \qquad \text{y} \qquad v = \mathrm{Im}(f)\,.$$

Definición 2.1.- Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

se denomina *bola* o *disco abierto* centrado en z_0 y de radio r. Análogamente se define el *disco cerrado* centrado en z_0 y de radio r,

$$\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}\,.$$

Definición 2.2.- Sea U un subconjunto de $\mathbb{C}$.

i) Se dice que un punto $z_0 \in U$ es *interior* a U si existe un disco abierto centrado en dicho punto y totalmente contenido en U.

ii) Se dice que un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es *adherente* a U si cada disco abierto centrado en z_0 tiene intersección no vacía con U.

iii) Se dice que un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es de *acumulación* de U si para cada disco $B(z_0, r)$ se tiene que

$$\big(B(z_0, r) \setminus \{z_0\}\big) \cap U \neq \emptyset\,.$$

Observación 2.3.- Si se identifica cada punto $z = x + i\,y$ de $\mathbb{C}$ con el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y cada subconjunto U de $\mathbb{C}$ se considera como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, resulta que los discos abiertos en $\mathbb{C}$ son las bolas abiertas en $\mathbb{R}^2$ para la norma euclídea:

$$B(z_0, r) \simeq \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\big\} = B\big((x_0, y_0), r\big);$$

así, un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ es interior al conjunto $U \subset \mathbb{C}$ si, y sólo si, el punto (x_0, y_0) es interior al conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$. De esta forma, para subconjuntos de $\mathbb{C}$, la noción de ser abierto (todos sus puntos son interiores) coincide con la referida a subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Lo mismo se puede decir respecto a los conceptos de cerrado, acotado, compacto o conexo, que se enuncian exactamente igual que en $\mathbb{R}^2$ sustituyendo la norma de los vectores por el módulo complejo.

Otro tanto sucede con las ideas de límite y continuidad, las cuales exponemos a continuación.

Definición 2.4.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{C}$, $f\colon A \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de acumulación de A. Se dice que f *tiene límite* $\ell \in \mathbb{C}$ en el punto z_0 si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que

$$|f(z) - \ell| < \varepsilon \quad \text{si} \quad z \in A\,,\; 0 < |z - z_0| < \delta\,.$$

Proposición 2.5.- Con la notación de la definición anterior, la función $f = u + i\,v$ tiene límite ℓ en el punto z_0 si, y sólo si, las funciones reales u y v tienen límites $\operatorname{Re}(\ell)$ e $\operatorname{Im}(\ell)$, respectivamente, en dicho punto.

En otras palabras, f tiene límite ℓ en z_0 si, y sólo si, la aplicación

$$z \in A \longmapsto \big(u(z), v(z)\big) \in \mathbb{R}^2$$

tiene límite $\big(\operatorname{Re}(\ell), \operatorname{Im}(\ell)\big)$ en z_0.

Observación 2.6.- Según la proposición anterior, todos los resultados sobre límites que se verifiquen para aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se verifican para funciones complejas de variable compleja.

Definición 2.7.- Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{C}$, $f\colon A \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de A. Se dice que f es *continua* en el punto z_0 si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad z \in A\,,\; |z - z_0| < \delta\,.$$

Se dice que f es *continua en A* si es continua en cada punto de A.

Proposición 2.8.- Con la notación anterior, la función $f = u + i\,v$ es continua en z_0 si, y sólo si, las funciones reales u y v son continuas en dicho punto; es decir, si, y sólo si, la aplicación

$$z \in A \longmapsto \big(u(z), v(z)\big) \in \mathbb{R}^2$$

es continua en z_0.

Observación 2.9.- De nuevo, los resultados sobre aplicaciones continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se verifican para funciones complejas de variable compleja y por esta razón no se exponen.

§ 3 DERIVABILIDAD.

Definición 3.1.- Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de U. Se dice que f es *derivable* en z_0 si existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}\,. \tag{1}$$

El límite anterior se denomina *derivada* de f en z_0 y se denota $f'(z_0)$.

La función f es *holomorfa* en el punto z_0 si existe un disco $B(z_0, r) \subset U$ tal que f es derivable en cada punto $z \in B(z_0, r)$. Se dice que f es *holomorfa en U* si es holomorfa en cada punto de U, es decir, si es derivable en cada punto de U.

Proposición 3.2.- Si $f = u + i\,v\colon U \to \mathbb{C}$ es derivable en el punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$, entonces las funciones reales $u, v\colon U \to \mathbb{R}$ son diferenciables en (x_0, y_0).

El resultado anterior da condiciones necesarias sobre las partes real e imaginaria de una función para que sea derivable en un punto, pero se puede decir todavía más: si existe el límite (1) deben existir todos los límites siguiendo subespacios y coincidir con él; en particular

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0) = \lim_{\substack{k\to 0\\ k\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+i\,k)-f(z_0)}{i\,k}\,,$$

y al escribir la igualdad anterior en términos de las funciones u y v, identificando la parte real e imaginaria de los dos límites, se obtienen las siguientes condiciones sobre las derivadas parciales de u y v, denominadas *condiciones de Cauchy-Riemann*:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\,; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,.} \tag{3}$$

Recíprocamente, el hecho de que se verifiquen estas condiciones y la diferenciabilidad de u y v equivalen a la derivabilidad de la función:

Teorema 3.3.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f = u + i\,v$ una función compleja definida en U. Es condición necesaria y suficiente para que f sea derivable en un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ de U que las funciones u, v sean diferenciables en el punto (x_0, y_0) y verifiquen las *condiciones de Cauchy-Riemann*:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\,; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,.} \tag{3}$$

Corolario 3.4.- Sea $f = u + i\,v$ una función compleja en un abierto U tal que u, v son de clase $\mathcal{C}^1$ en U y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en cada punto de U. Entonces la función f es holomorfa en U.

Observación 3.5.- Si f derivable en el punto z_0 se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - i\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

Proposición 3.6.- Sea f una función compleja definida en un abierto U de $\mathbb{C}$. Si f es derivable en el punto $z_0 \in U$, entonces f es continua en z_0. Como consecuencia, si f es holomorfa en U, entonces f es continua en U.

Propiedades 3.7.- Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, y f, g dos funciones complejas definidas en U.

3.7.1.- Si f y g son derivables en z_0 y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha\,f + \beta\,g$ es derivable en z_0, y además

$$(\alpha\,f + \beta\,g)'(z_0) = \alpha\,f'(z_0) + \beta\,g'(z_0)\,.$$

3.7.2.- Si f y g son derivables en z_0, entonces $f\,g$ es derivable en z_0, y además

$$(f\,g)'(z_0) = f'(z_0)\,g(z_0) + f(z_0)\,g'(z_0)\,.$$

3.7.3.- Si f y g son derivables en z_0 y $g(z_0) \neq 0$, entonces $f/_g$ (que está definida en un entorno adecuado de z_0) es derivable en z_0, y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\,g(z_0) - f(z_0)\,g'(z_0)}{g(z_0)^2}\,.$$

Teorema 3.8.- (*Derivación de la función compuesta*)

Sean U y V abiertos de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to V$ y $g\colon V \to \mathbb{C}$ funciones tales que:

i) f es derivable en $z_0 \in U$.

ii) g es derivable en $w_0 = f(z_0) \in V$.

Entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en z_0. Además,

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0) = g'(w_0)\, f'(z_0)\,.$$

Seguidamente nos dedicamos a proporcionar ejemplos de funciones holomorfas. La derivabilidad de estas funciones se obtiene en unos casos directamente de la definición y en otros de los resultados anteriores.

Ejemplos 3.9.-

3.9.1.- Si f es una función constante ($f(z) = c \in \mathbb{C}$ para todo z), entonces f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y

$$f'(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

3.9.2.- Si $\mathrm{Id}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ denota la *función identidad* ($\mathrm{Id}(z) = z$ para todo z), Id es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y

$$\mathrm{Id}'(z) = 1 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

3.9.3.- Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la función $p_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $p_n(z) = z^n$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y su derivada es $n\, p_{n-1}$, es decir,

$$p_n{}'(z) = n\, z^{n-1} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

3.9.4.- Si P es un polinomio con coeficientes complejos en la variable z,

$$P(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0\,,$$

entonces la función $z \mapsto P(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y

$$P'(z) = n\, a_n\, z^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, z^{n-2} + \ldots + a_1\,.$$

3.9.5.- Si P y Q son polinomios con coeficientes complejos en la variable z, puesto que Q tiene un número finito de raíces $r_1, r_2, \ldots, r_m$, la función *racional* R dada por $R(z) = {}^{P(z)}/_{Q(z)}$ está bien definida en el abierto $U = \mathbb{C} \setminus \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ y es holomorfa en él; su derivada es a su vez una función racional,

$$R'(z) = \frac{P'(z)\, Q(z) - P(z)\, Q'(z)}{Q(z)^2} \quad \text{para todo } z \in U\,.$$

3.9.6.- La función exponencial $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y

$$\exp'(z) = \exp(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}\,.$$

Es fácil comprobar que esta función, como aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en cada punto.

3.9.7.- Las funciones trigonométricas sen, cos, y las funciones hiperbólicas Sh, Ch son holomorfas en todo $\mathbb{C}$, y para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\mathrm{sen}'(z) = \cos(z)\,, \qquad \cos'(z) = -\,\mathrm{sen}(z)\,,$$
$$\mathrm{Sh}'(z) = \mathrm{Ch}(z)\,, \qquad \mathrm{Ch}'(z) = \mathrm{Sh}(z)\,.$$

Observación 3.10.- Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Cada una de las condiciones siguientes implica que la función f es constante en U.

- **i)** $f'(z) = 0$ para cada $z \in U$.
- **ii)** Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}\big(f(z)\big) = k$ para cada $z \in U$.
- **iii)** Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Im}\big(f(z)\big) = k$ para cada $z \in U$.
- **iv)** Existen $a, b, c \in \mathbb{C}$, con a y b no simultáneamente nulos, y tales que para cada $z \in U$ se tiene que
$$a\,\mathrm{Re}\big(f(z)\big) + b\,\mathrm{Im}\big(f(z)\big) = c\,.$$
- **v)** Existe $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, tal que $|f(z)| = k$ para cada $z \in U$.

Proposición 3.11.- (Regla de L'Hôpital) Sean A un abierto de $\mathbb{C}$, $a \in A$ y f y g dos funciones de A en $\mathbb{C}$ holomorfas en A, con $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(a) \neq 0$.

- **i)** Existe un entorno V de a con $V \subset A$ tal que $g(z) \neq 0$ para cada $z \in V - \{a\}$.
- **ii)** Se verifica que
$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}\,.$$

§ 4 DERIVABILIDAD DE LAS FUNCIONES INVERSAS.

Teorema 4.1.- (*de la función inversa*)

Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa e inyectiva en U. Entonces:

i) $V = f(U)$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

ii) $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in U$.

iii) La función inversa $f^{-1}\colon V \to U$ es holomorfa en V y su derivada viene dada por

$$(f^{-1})'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{para cada } z \in U\,,$$

o lo que es lo mismo

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(w)\big)} \quad \text{para cada } w \in V\,.$$

Ejemplos 4.2.-

4.2.1.- Fijado $c \in \mathbb{R}$, la correspondiente rama del logaritmo,

$$\log_c : W_c = \mathbb{C} \setminus \{r\, e^{i\,c} : r \in \mathbb{R}\,,\, r \geq 0\} \to V_c = \{z \in \mathbb{C} : c < \mathrm{Im}(z) < c + 2\,\pi\}$$

es holomorfa en W_c y su derivada es

$$\log_c'(w) = \frac{1}{\exp'\big(\log_c(w)\big)} = \frac{1}{\exp\big(\log_c(w)\big)} = \frac{1}{w}\,, \quad w \in W_c\,.$$

4.2.2.- Si a es un número complejo y se define, elegida una rama del logaritmo en el abierto W_c correspondiente, la función potencial

$$f(z) = z^a = \exp\big(a \log_c(z)\big)\,, \quad z \in W_c\,,$$

es holomorfa en W_c, y su derivada es

$$f'(z) = \exp\big(a \log_c(z)\big)\,\frac{a}{z} = a\,\frac{z^a}{z}\,.$$

§1 SUCESIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS.

Definición 1.1.- Una *sucesión de números complejos* es una función compleja definida en el conjunto de los números naturales,

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\,.$$

Una sucesión de números complejos se representa de forma más compacta por el símbolo

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\,,$$

donde $z_n = \sigma(n)$; z_n se denomina *término n-ésimo* de la sucesión. El conjunto imagen de la aplicación σ, es decir, $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, se denomina *conjunto de términos* o *rango* de la sucesión.

Definición 1.2.- Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Una *subsucesión* de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la composición de una sucesión estrictamente creciente de números naturales con la sucesión dada:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \to X \\ k &\mapsto n_k \mapsto z_{n_k}. \end{aligned}$$

Una subsucesión vendrá representada, por tanto, como $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Definición 1.3.- Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es *convergente* si existe un número complejo z verificando la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para cada número natural $n \geq n_0$ se tiene que

$$|z_n - z| < \varepsilon.\text{"}$$

El número z se llama *límite* de la sucesión.

Proposición 1.4.- Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, su límite es único.

Notación: Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia z, se escribe

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Proposición 1.5.- Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es convergente si, y sólo si, las dos sucesiones de números reales $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes. En este caso,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

Proposición 1.6.- Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia z, toda subsucesión suya es convergente hacia el mismo límite z.

Corolario 1.7.- Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene dos subsucesiones que convergen hacia distintos límites, o tiene una subsucesión que no converge, entonces no puede ser convergente.

Proposición 1.8.- (**Criterio secuencial**)

Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y f es una función definida de A en $\mathbb{C}$.

a) Si a es un punto de acumulación de A, son equivalentes:

a.i) f tiene límite en a.

a.ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A con $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Además, si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A convergente hacia a.

b) Si A no está acotado superiormente, son equivalentes:

b.i) f tiene límite en $+\infty$.

b.ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A con $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Además, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que tiende a $+\infty$.

c) Si A no está acotado inferiormente, son equivalentes:

c.i) f tiene límite en $-\infty$.

c.ii) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Además, si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que tiende a $-\infty$.

Observación 1.9.- Si A es un intervalo de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente, f una función definida de A en $\mathbb{C}$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \ell$.

Propiedades 1.10.- Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones convergentes de números complejos tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

1.10.1.- La sucesión $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b\,.$$

1.10.2.- La sucesión $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab\,.$$

1.10.3.- Si $b \neq 0$ y $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = a/b\,.$$

Observación 1.11.- Los enunciados en los cuáles aparece el concepto de orden en la recta real (tales como la noción de *límite más o menos infinito* o el *criterio del sandwich*) se pueden adaptar para sucesiones de números reales, pero no admiten generalización al caso complejo.

Definición 1.12.- Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números complejos. Se dice que la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *equivalente* a la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1\,.$$

En este caso se denota $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o simplemente $y_n \sim x_n$.

Proposición 1.13.- Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números complejos. Se verifica que:

i) $x_n \sim x_n$.

ii) Si $y_n \sim x_n$ entonces $x_n \sim y_n$.

iii) Si $x_n \sim y_n$ e $y_n \sim z_n$ entonces $x_n \sim z_n$.

iv) Si $x_n \sim y_n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\, x_n \sim \alpha\, y_n$.

v) Si $x_n \neq 0$ e $y_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $x_n \sim y_n$ entonces $1/x_n \sim 1/y_n$.

vi) Si $x_n \sim y_n$ y $a_n \sim b_n$ entonces $a_n x_n \sim b_n y_n$.

vii) Si $x_n \sim y_n$ ambas sucesiones tienen el mismo carácter. Además si tienen límite, dicho límite es el mismo.

Observaciones 1.14.-

i) De los resultados anteriores se deduce que en un producto de sucesiones, a efectos de cálculo de límites, es lícito sustituir una de las sucesiones factor por otra equivalente.

Sin embargo NO es cierto en general que si $x_n \sim y_n$ y $a_n \sim b_n$ entonces $a_n + x_n \sim b_n + y_n$. Para ilustrar esto basta considerar las sucesiones

$$x_n = 1 \sim y_n = 1 + 1/2^n,$$
$$a_n = -1 \sim b_n = -1 + 1/2^n.$$

ii) La utilidad práctica de las sucesiones equivalentes radica en la resolución de indeterminaciones, es decir, en la manipulación de sucesiones que convergen hacia 0 (comúnmente conocidas como *infinitésimos*) o que tienden hacia infinito (*infinitos*).

Infinitésimos e Infinitos equivalentes 1.15.-

1.15.1.- Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

i) Las siguientes sucesiones son equivalentes a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

1) $\{\text{sen}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **2)** $\{\text{Sh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **3)** $\{\text{tg}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$

4) $\{\text{Tgh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **5)** $\{\text{arcsen}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **6)** $\{\text{ArgSh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$

7) $\{\text{arctg}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **8)** $\{\text{ArgTgh}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **9)** $\{e^{x_n}-1\}_{n=1}^{\infty}$

10) $\{\ln(1+x_n)\}_{n=1}^{\infty}$

La equivalencia 10) también puede ser enunciada como sigue:

"Si $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 1, $\{\ln(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $\{y_n-1\}_{n=1}^{\infty}$".

ii) A partir de 1.17.1.i.9) y 1.17.1.i.10) se deducen:

1) Si $a>0$, $a^{x_n}-1 \sim \ln(a)\, x_n$.

2) Si $p>0$, $(1+x_n)^p - 1 \sim p\, x_n$, o lo que es lo mismo $(y_n)^p - 1 \sim p\,(y_n-1)$, si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

iii) Las sucesiones

1) $\{1-\cos(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **2)** $\{\text{Ch}(x_n)-1\}_{n=1}^{\infty}$

son equivalentes a la sucesión

$$\left\{\frac{x_n^2}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

1.15.2.- Sea $\mathcal{P}(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ un polinomio de grado $k \geq 1$ ($a_k \neq 0$). Entonces la sucesión $\{\mathcal{P}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $\{a_kn^k\}_{n=1}^{\infty}$.

1.15.3.- Fórmula de Stirling

La sucesión $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la sucesión $\{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Observación 1.16.- La mayor parte de las equivalencias enunciadas son válidas también para sucesiones de números complejos, pero cuando aparecen logaritmos, potencias o las inversas de las funciones trigonométricas o hiperbólicas, hay que considerar la rama adecuada.

§ 2 SERIES DE NÚMEROS COMPLEJOS.

Definición 2.1.- Una *serie de números complejos* es un par ordenado de sucesiones de números complejos

$$(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})\,, \tag{1}$$

donde

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j, \quad n = 1, 2, \ldots$$

El número a_n se llama *término n-ésimo* de la serie y el número S_n se denomina *suma parcial n-ésima* de la serie. Tradicionalmente se utiliza la notación

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

para representar la serie (1).

Definición 2.2.- Una serie de números complejos es *convergente* si la sucesión de sumas parciales de la misma es una sucesión convergente. En caso contrario se dice que la serie *no converge*.

Observaciones 2.3.- Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos y designemos por $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de sumas parciales de la misma.

i) Si la serie es convergente, se escribe

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

El número complejo $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ se llama *suma* de la serie.

Nótese que se ha denotado igual a la serie y a su suma en el caso de que sea convergente. La diferencia viene dada por el contexto.

ii) Estudiar la naturaleza o carácter de la serie consiste en determinar su convergencia o su no convergencia.

iii) Si la serie es convergente, el problema de *sumar* la serie es encontrar la suma de la misma, es decir, determinar el número complejo $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Teorema 2.4.- Una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos es convergente si, y sólo si, las series de números reales

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)$$

son convergentes. En este caso se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n) + i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n).$$

Condición necesaria de convergencia 2.5.- Si la serie de números complejos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

El alumno debe ser cuidadoso con el manejo de esta condición, pues aunque necesaria, no es suficiente para garantizar la convergencia de una serie.

Ejemplos 2.6.-

2.6.1.- Si $r \in \mathbb{C}$, la serie (geométrica) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si, y sólo si, $|r| < 1$; en este caso, su suma es el número complejo

$$\frac{1}{1-r}\,.$$

2.6.2.- Una serie telescópica de números complejos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ es convergente si, y sólo si, la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente; en este caso, su suma es el número complejo

$$\lim_{n\to\infty} b_n - b_1\,.$$

2.6.3.- Las series de Riemann,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \text{convergen si, y sólo si, } \alpha > 1\,,$$

y de las series de Bertrand

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln(n)^{\beta}}, \quad \text{convergen si, y sólo si, } \begin{cases} \alpha > 1 & \text{o} \\ \alpha = 1 \text{ y } \beta > 1\,. \end{cases}$$

Proposición 2.7.- Sean $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes de números complejos. Si α y β son números complejos, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente. Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Definición 2.8.- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de números reales se dice *de términos positivos* si para cada $n \geq 1$ se tiene $a_n \geq 0$.

Criterio de comparación 2.9.- Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos. Se supone que existe un número natural n_0, tal que

$$a_n \leq b_n, \text{ para cada } n \geq n_0.$$

Entonces:

i) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge, tampoco converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Corolario 2.10.- Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos. Se supone que $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que existe, finito o infinito, el límite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$. Entonces:

2.10.1.- Si L es finito y no nulo, ambas series tienen el mismo carácter.

2.10.2.- Si $L = \infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no converge, tampoco converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2.10.3.- Si $L = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Criterio de d'Alembert o del cociente 2.11.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Si $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$, y existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \text{ (finito o infinito)},$$

la serie converge si $\lambda < 1$ y no converge si $\lambda > 1$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie.

Criterio de la raíz 2.12.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Si existe

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda \text{ (finito o infinito)},$$

la serie converge si $\lambda < 1$ y no converge si $\lambda > 1$. Si $\lambda = 1$ no puede, a priori, asegurarse nada sobre la naturaleza de la serie.

Definición 2.13.- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos es *absolutamente convergente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Teorema 2.14.- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos es absolutamente convergente si, y sólo si, las series de números reales

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)$$

son absolutamente convergentes.

Proposición 2.15.- Si la serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente. Además,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Definición 2.16.- Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series de números complejos. Se llama *producto de Cauchy* de las series dadas a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, donde

$$c_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, b_1 + a_n\, b_0, \quad n \geq 0.$$

Teorema 2.17.- Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series de números complejos.

i) Criterio de Mertens: Si una es convergente y la otra es absolutamente convergente, el producto de Cauchy de ambas es convergente. Además, su suma es el producto de las sumas de las series factores:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

ii) Si ambas series son absolutamente convergentes, su producto de Cauchy es absolutamente convergente.

§ 3 SERIES DE POTENCIAS.

Una *serie de funciones* definida en un conjunto X vendrá dada asignando a cada punto $x \in X$ una serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

donde $f_n: X \to \mathbb{C}$ es una función para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definición 3.1.- Sea z_0 un número complejo. Si $a_0 \in \mathbb{C}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos, la serie funcional

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

se denomina *serie de potencias centrada en el punto* z_0.

Si, en este contexto, se sigue el convenio de notación $(z - z_0)^0 = 1$ para cada $z \in \mathbb{C}$, la serie de potencias se representa de forma más compacta como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Definición 3.2.- Se considera la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

i) Se dice que la serie *converge en el punto* $w \in \mathbb{C}$ si la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^n$ es convergente. Si la serie de potencias converge en cada punto w de un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ se dice que *converge puntualmente en* X.

ii) Se dice que la serie *converge absolutamente en el punto* $w \in \mathbb{C}$ si la serie de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (w - z_0)^n|$ es convergente. Si la serie de potencias converge absolutamente en cada punto w de un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ se dice que *converge absolutamente en* X.

Proposición 3.3.- Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge en el punto $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, entonces converge absolutamente en cada punto z que verifique

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

Definición 3.4.- Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, se define su *radio de convergencia*, que denotaremos por ϱ, como sigue:

1. Si la serie converge únicamente en el punto z_0, entonces $\varrho = 0$.
2. Si la serie converge en cada punto de $\mathbb{C}$, se dice que $\varrho = \infty$.
3. En otro caso, su radio de convergencia se define como el superior del conjunto de los números reales positivos r tales que la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ es convergente.

Proposición 3.5.- El número real $\varrho \geq 0$ es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ si, y sólo si, la serie converge en todo punto z con $|z - z_0| < \varrho$ y no converge en cada punto z con $|z - z_0| > \varrho$.

Definición 3.6.- Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ con radio de convergencia $\varrho > 0$, el disco abierto $B(z_0, \varrho)$ se denomina *abierto de convergencia* de la serie (en el caso de que $\varrho = \infty$ se entiende que dicho disco coincide con $\mathbb{C}$).

El conjunto de los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde la serie converge se denomina *campo de convergencia* de la serie.

Proposición 3.7.- Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, se supone que existe el límite, finito o infinito,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda .$$

Entonces, si ϱ es el radio de convergencia de la serie, se tiene que

$$\varrho = \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda = 0; \\ 0 & \text{si } \lambda = \infty; \\ \dfrac{1}{\lambda} & \text{si } 0 < \lambda < \infty. \end{cases} \tag{1}$$

En particular, si todos los coeficientes de la serie son no nulos, al menos a partir de un término en adelante, y existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} ,$$

este límite coincide con ϱ.

§ 4 FUNCIONES DEFINIDAS POR SERIES DE POTENCIAS.

Teorema 4.1.- Sea $\varrho > 0$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Si para cada $z \in B(z_0, \varrho)$ se denota por $f(z)$ a la suma de la serie numérica correspondiente, resulta que f es continua en $B(z_0, \varrho)$ (si $\varrho = \infty$ se entiende que dicho disco es $\mathbb{C}$).

Teorema 4.2.- Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\varrho > 0$, y tal que alguno de sus coeficientes a_n es no nulo. Se denota por f a la función suma de la serie. Existe entonces un número real δ, con $0 < \delta \le \varrho$, tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \big(B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}\big)$.

Dicho de otra forma: si una serie de potencias tiene suma nula en un entorno del punto en el que está centrada, entonces es la serie idénticamente nula.

Corolario 4.3.- (*Principio de identidad*)

Se supone que las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ tienen radios de convergencia no nulos ϱ_1 y ϱ_2, respectivamente, y que existe un número real δ, con $0 < \delta < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$, de manera que las sumas de ambas series coinciden para cada $z \in B(z_0, \delta)$. Entonces las series son iguales, es decir,

$$a_n = b_n \quad \text{para cada } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Lema 4.4.- Sea ϱ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. La *serie derivada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (z-z_0)^n$$

tiene también radio de convergencia ϱ.

Teorema 4.5.- Sea f la función suma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, definida en el abierto de convergencia $B(z_0, \varrho)$. Entonces f es holomorfa en este disco y

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (z-z_0)^n \quad \text{para cada } z \in B(z_0, \varrho) .$$

Corolario 4.6.- En las mismas condiciones del teorema anterior, f admite derivadas de cualquier orden en $B(z_0, \varrho)$. Además, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$f^{m)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)\, a_{n+m}\,(z-z_0)^n\,, \quad z \in B(z_0,\varrho)\,.$$

En particular,

$$f^{m)}(z_0) = m!\, a_m \qquad \text{o} \qquad a_m = \frac{f^{m)}(z_0)}{m!}$$

para cada $m \geq 0$.

Teorema 4.7.- Sea f la función suma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$, definida en el abierto de convergencia $B(z_0,\varrho)$. Si $C \in \mathbb{C}$, la función F, suma de la serie de potencias

$$C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(z-z_0)^{n+1} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}\,(z-z_0)^n\,,$$

es una primitiva de f en $B(z_0,\varrho)$, es decir, $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in B(z_0,\varrho)$.

Definición 4.8.- Dadas las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$, se define la serie *suma* de ambas por

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)\,(z-z_0)^n\,,$$

y la serie *producto de Cauchy* como

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n\,, \quad \text{siendo} \;\; c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\,, \quad n \geq 0\,.$$

Teorema 4.9.- Sean ϱ_1 y ϱ_2 los radios de convergencia de las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$, respectivamente. Entonces las series suma y producto de Cauchy de las anteriores tienen radios de convergencia mayores o iguales que $\varrho_0 = \min\{\varrho_1,\varrho_2\}$.

Definición 4.10.- Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una función compleja definida en A. Se dice que f es *analítica* en un punto $z_0 \in A$ si existen un número $\delta > 0$ tal que $B(z_0,\delta) \subset A$, y una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ convergente en $B(z_0,\delta)$, tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n \quad \text{para cada } z \in B(z_0,\delta)\,.$$

Se dice que f es *analítica en* A si es analítica en cada punto de A.

Observación 4.11.- La suma y el producto de funciones analíticas en un punto z_0 son también funciones analíticas en dicho punto.

Teorema 4.12.- Se supone que la función f es analítica en el punto z_0, esto es, f se representa en un entorno $B(z_0,\delta)$ de dicho punto mediante la suma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$. Entonces f es analítica en $B(z_0,\delta)$

Teorema 4.13.- Sean f y g dos funciones analíticas en el punto z_0. Si $g(z_0) \neq 0$, entonces la función f/g es analítica en z_0.

Observación 4.14.- Supongamos que las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$ representan a las funciones f y g, respectivamente, en un entorno de z_0. Para calcular los coeficientes de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$ que representa a f/g se puede proceder efectuando la división formal de las dos series anteriores en potencias crecientes de $(z-z_0)$, lo cual es posible si $b_0 = g(z_0) \neq 0$.

Otro procedimiento el método de los coeficientes indeterminados, teniendo en cuenta que se debe verificar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\right) ,$$

esto da lugar a un sistema (infinito) de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0\, c_0 \\ a_1 &= b_0\, c_1 + b_1\, c_0 \\ a_2 &= b_0\, c_2 + b_1\, c_1 + b_2\, c_0 \\ &\vdots \\ a_n &= b_0\, c_n + b_1\, c_{n-1} + \ldots + b_n\, c_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

cuyas incógnitas c_n , $n = 0, 1, 2, \ldots$, se despejan recurrentemente.

Teorema 4.15.- Sean g una función analítica en el punto z_0, y f una función analítica en el punto $w_0 = g(z_0)$. Entonces la función $f \circ g$ (que está bien definida en un entorno de z_0 por ser g continua) es analítica en z_0.

Señalaremos que cuando la función g es un polinomio los productos de Cauchy contemplados se reducen a productos de polinomios; por ejemplo, si

$$f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - w_0)^n ; \qquad g(z) = w_0 + b\,(z - z_0)^2$$

entonces

$$f\big(g(z)\big) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b^n (z - z_0)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, b^n (z - z_0)^{2n} .$$

4.16.- Desarrollos en serie de potencias de algunas funciones elementales.

Todos los desarrollos se refieren al punto $z_0 = 0$. En cada caso se relaciona el abierto de convergencia de la correspondiente serie de potencias, donde dicha serie representa a la función.

1.- $e^z = \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$

2.- $\mathrm{sen}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

3.- $\cos(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

4.- $\mathrm{Sh}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

5.- $\mathrm{Ch}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

6.- **i)** $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad z \in B(0,1).$

ii) $\displaystyle\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad z \in B(0,1).$

7.- $\log(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \qquad z \in B(0,1). \qquad$ (*rama principal*)

TEMA 7 INTEGRACIÓN COMPLEJA

§1 FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE REAL.

Definición 1.1.- Sea f una función compleja definida en un intervalo abierto I, y consideremos un punto $a \in I$. Si existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

se dice que f es *derivable en a*. El valor del límite será un número complejo que se denomina *derivada de f en a*, y al que se denota igualmente por $f'(a)$.

Teorema 1.2.- Sean I un intervalo, a un punto de I y f una función definida de I en $\mathbb{C}$. La función f es derivable en el punto a si, y sólo si, las funciones reales $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ son derivables en el punto a. Además, en este caso se tiene que

$$f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + i\ \mathrm{Im}(f)'(a).$$

Observación 1.3.- El teorema anterior permite generalizar las propiedades y las reglas usuales de derivación que se verifican para las funciones reales, exceptuando aquellas situaciones en las que interviene el orden de la recta real, por ejemplo, no es posible en este contexto generalizar los teoremas del valor medio. Nótese que éstos dejan de ser válidos para funciones $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que, al fin y al cabo, son las que estamos considerando.

Definición 1.4.- Sea f una función compleja definida en el intervalo $[a, b]$. Se dice que f es *integrable* en $[a, b]$ si, y sólo si, existe un número complejo $I(f)$ que verifica la siguiente propiedad:
"Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para toda partición P de $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$ y para cada $T \in \mathcal{T}(P)$ se tiene que

$$|I(f) - \sigma(f, P, T)| < \varepsilon."$$

El número $I(f)$ se seguirá denotando $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

Proposición 1.5.- La función f es integrable si, y sólo si, lo son las dos funciones reales $u = \mathrm{Re}(f)$ y $v = \mathrm{Im}(f)$. Además, en caso de ser integrables, se tiene

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b u(x)\, dx + i \int_a^b v(x)\, dx.$$

Proposición 1.6.- Sean f y g funciones complejas definidas e integrables en el intervalo $[a, b]$.

1.6.1.- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, la función $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a, b]$, y se tiene que

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

1.6.2.- La función $|f|$ es integrable en $[a, b]$, y

$$\Big| \int_a^b f \Big| \le \int_a^b |f|.$$

1.6.3.- f^2 y $f\, g$ son integrables en $[a, b]$.

Son válidos también para funciones complejas los siguientes resultados, cuyos enunciados omitimos por ser idénticos a los del caso real: *el teorema fundamental del cálculo*, *la regla de Barrow*, *la fórmula de integración por partes* y *el teorema del cambio de variable*.

§ 2 INTEGRAL COMPLEJA A LO LARGO DE CURVAS.

Dada una curva paramétrica $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, ésta se puede entender también como una curva en $\mathbb{C}$, y viceversa; así, los conceptos de regularidad (continuidad, derivabilidad a trozos, etc.) enunciados para las primeras se trasladan a este otro contexto. Escribiremos habitualmente

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad \text{o} \qquad z(t) = x(t) + i\,y(t)\,,$$

y para los puntos t donde la curva sea derivable se tendrá que

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = x'(t) + i\,y'(t)\,.$$

Otro tanto se puede decir respecto de la noción de curva paramétrica orientada.

Como es habitual, identificaremos las curvas paramétricas regulares y simples $(I, \boldsymbol{\gamma})$ con su soporte γ^*.

Lema 2.1.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$, $\boldsymbol{\varphi}\colon [c,d] \to U$ dos curvas parametricas equivalentes de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces

$$\int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,\boldsymbol{\gamma}'(t)\,dt = \int_c^d f\big(\boldsymbol{\varphi}(s)\big)\,\boldsymbol{\varphi}'(s)\,ds\,.$$

Definición 2.2.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua y $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ una curva paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos cuyo soporte es Γ. Se define la *integral de f a lo largo de la curva* $\boldsymbol{\gamma}$ como

$$\int_a^b f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\,\boldsymbol{\gamma}'(t)\,dt\,, \tag{1}$$

que se denota por

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz \qquad \text{o} \qquad \int_{\Gamma} f(z)\,dz\,.$$

Propiedades 2.3.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, f, g dos funciones complejas y continuas en U y $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ una curva paramétrica de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Se verifica que:

i) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} (f+g)(z)\,dz = \int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz + \int_{\boldsymbol{\gamma}} g(z)\,dz\,.$

ii) Si $c \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} c\,f(z)\,dz = c\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz\,.$

iii) $\displaystyle\left|\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz\right| \le \sup\{|f(z)| : z \in \boldsymbol{\gamma}^*\}\ \mathrm{long}(\boldsymbol{\gamma})\,.$

Proposición 2.4.- Sean $(I, \boldsymbol{\gamma})$, $(J, \boldsymbol{\varphi})$ dos curvas paramétricas equivalentes que definen orientaciones opuestas en la curva geométrica Γ que parametrizan. Si f es una función continua en un abierto que contiene al soporte de la curva, entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz = -\int_{\boldsymbol{\varphi}} f(z)\,dz\,.$$

Definición 2.5.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua en U. Se dice que f tiene una *primitiva* en U si existe una función F definida y holomorfa en todo el abierto U de tal manera que $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in U$.

Proposición 2.6.- Sea f una función continua en el abierto U con primitiva F en dicho conjunto, y sea $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz = F\big(\boldsymbol{\gamma}(b)\big) - F\big(\boldsymbol{\gamma}(a)\big)\,.$$

Teorema 2.7.- Sean U un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua. Son equivalentes los siguientes enunciados:

a) La integral de f a lo largo de una curva con soporte contenido en U sólo depende de los extremos de la curva, es decir, si $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ y $\boldsymbol{\varphi}\colon [c,d] \to U$ son dos curvas de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y con los mismos extremos ($\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\varphi}(c)$, $\boldsymbol{\gamma}(b) = \boldsymbol{\varphi}(d)$), entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\boldsymbol{\varphi}} f(z)\,dz\,.$$

b) La integral de f a lo largo de cualquier curva cerrada con soporte contenido en U es nula, esto es, si $\gamma: [a, b] \to U$ es una curva cerrada de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, entonces

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0\,.$$

c) f tiene una primitiva en U.

§ 3 FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY.

Teorema 3.1.- Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f: U \to \mathbb{C}$ una función continua en U y derivable en todos los puntos de U excepto quizá en una cantidad finita de ellos. Si U es convexo, entonces f tiene primitiva en todo U y por tanto

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

para toda curva Γ cerrada y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos contenida en U.

Teorema 3.2.- Si f es una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$, entonces f es indefinidamente derivable en dicho abierto.

Teorema 3.3.- (*Fórmula integral de Cauchy*)

Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f: U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo U. Si D es un dominio de Jordan tal que su adherencia $D \cup \partial D$ está contenida en U, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \quad \text{para todo } z \in D\,, \tag{3.1}$$

cuando se considera en ∂D la orientación inducida por D. Además, si $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\,\pi\, i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw \quad \text{para todo } z \in D\,. \tag{3.2}$$

Corolario 3.4.- Si f es una función continua en un abierto U de $\mathbb{C}$ y tiene una primitiva en U, entonces es holomorfa en dicho abierto.

Corolario 3.5.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función continua en todo U y derivable en todos los puntos de U excepto quizá en una cantidad finita de ellos. Entonces f es holomorfa en todo U.

§ 4 CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA DE CAUCHY.

Recordemos que toda función analítica (que se puede representar en un entorno de cada punto como la suma de una serie de potencias) es holomorfa; a partir de la fórmula integral de Cauchy se obtiene el recíproco.

Teorema 4.1.- Si f es una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$, entonces f es analítica en U. De hecho, si $z_0 \in U$ y $B(z_0, r) \subset U$, entonces para cada $z \in B(z_0, r)$ se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n\,. \tag{4}$$

Observación 4.2.- La serie (4) se denomina *serie de Taylor de f en el punto z_0*. El teorema anterior implica que, si $B(z_0, R)$ es el mayor disco abierto centrado en z_0 y contenido en U, entonces el radio de convergencia de esta serie es mayor o igual que R; por tanto, si $U = \mathbb{C}$, la serie de Taylor converge en todo $\mathbb{C}$.

Proposición 4.3.- (*Desigualdades de Cauchy para las derivadas*)

Sea f una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$. Si el disco cerrado $\overline{B}(z_0, r)$ está contenido en U, entonces, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, se verifica que

$$|f^{n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n} \sup\{|f(w)| : |w - z_0| = r\}\,.$$

Corolario 4.4.- (*Teorema de Liouville*)

Sea f una función compleja definida y holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Si f es acotada, es decir, si existe $M > 0$ con $|f(z)| \le M$ para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

Observación 4.5.- Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se denominan *funciones enteras*.

Corolario 4.6.- (*Teorema fundamental del álgebra*)

Si P es un polinomio de grado mayor o igual que 1 con coeficientes complejos, P tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. De hecho, si el grado de P es $n \geq 1$, entonces P se escribe

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \ = \ a_n \ (z - r_1)^{m_1} (z - r_2)^{m_2} \cdots (z - r_k)^{m_k} \ ,$$

siendo m_j la multiplicidad de la raíz r_j y $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.

TEMA 8 SINGULARIDADES AISLADAS

§ 1 CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES.

Definición 1.1.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $z_0 \in U$. Si f es una función definida y holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$, se dice que f presenta o tiene una *singularidad aislada* en el punto z_0. En estas condiciones:

i) Si existe y es finito $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, se dice que la singularidad es *evitable*.

ii) Si $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, se dice que la singularidad es *polar* o que z_0 es un *polo* de la función f.

iii) Si la singularidad en el punto z_0 no es evitable ni polar, se dice que es *esencial*.

Teorema 1.2.- (*Caracterización de singularidades evitables*)
Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Son equivalentes:

a) z_0 es una singularidad evitable de f.

b) Existe una función g holomorfa en todo U y tal que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$.

c) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}(z_0, \varepsilon) \subset U$ y f está acotada en $\overline{B}(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$.

d) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z) = 0$.

Teorema 1.3.- (*Caracterización de singularidades polares*)
Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Son equivalentes:

a) z_0 es una singularidad polar de f.

b) Existe una función g holomorfa en todo U con $g(z_0) \neq 0$ y un número natural m tales que $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$.

c) Existe un número natural m tal que el límite $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ existe, es finito y no nulo.

Observación 1.4.- El número natural m que se cita en las proposiciones b) y c) del teorema anterior resulta ser el mismo y se denomina *orden del polo* de f en z_0.

Definición 1.5.- Sean f una función holomorfa en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y k un número natural. Se dice que f tiene un *cero de orden* k en el punto z_0 si

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{k-1)}(z_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f^{k)}(z_0) \neq 0\,.$$

Admitiremos también que pueda ser $k = 0$, entendiendo en este caso que $f(z_0) \neq 0$.

Observación 1.6.- Sea f una función holomorfa en un disco $B(z_0, \delta)$. Entonces f tiene en el punto z_0 un cero de orden $k \geq 1$ si, y sólo si, existe una función φ, holomorfa en $B(z_0, \delta)$, con $\varphi(z_0) =\neq 0$ y tal que para cada $z \in B(z_0, \delta)$ se tiene que

$$f(z) = (z - z_0)^k\, \varphi(z)\,.$$

Proposición 1.7.- Sean f y g dos funciones definidas y holomorfas en un disco $B(z_0, \delta)$ tales que f tiene un cero de orden p en z_0 y g tiene un cero de orden q en z_0. Entonces la función f/g tiene una singularidad aislada en el punto z_0 y se verifica que:

i) La singularidad es evitable si, y sólo si, $p \geq q$. En este caso f/g tiene un cero de orden $p - q$ en z_0.

ii) La singularidad es polar si, y sólo si, $p < q$. En este caso f/g tiene un polo de orden $q - p$ en z_0.

Proposición 1.8.- Sean f y g dos funciones holomorfas en $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ tales que f tiene un polo de orden p en z_0 y g tiene un polo de orden q en z_0. Entonces la función f/g tiene una singularidad aislada en el punto z_0 y se verifica que:

i) La singularidad es evitable si, y sólo si, $p \leq q$. En este caso f/g tiene un cero de orden $q - p$ en z_0.

ii) La singularidad es polar si, y sólo si, $p > q$. En este caso f/g tiene un polo de orden $p - q$ en z_0.

§ 2 SERIES DE LAURENT.

Definición 2.1.- Si r y R son dos números reales con $0 < r < R$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, el conjunto dado por

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} = B(z_0, R) \setminus \overline{B}(z_0, r)$$

se denomina *corona* (*abierta*) centrada en z_0 de radios r y R. El concepto de corona se generaliza admitiendo la posibilidad de que $r = 0$ o $R = \infty$. Concretamente:

En el caso particular de que $r = 0$ y $R \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} = B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$$

se representa por $B'(z_0, R)$ y se denomina *disco punteado* de centro z_0 y radio R.

Si $R = \infty$, la corona centrada en z_0 y de radios r e ∞ es

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0|\},$$

el complementario de la bola cerrada $\overline{B}(z_0, r)$ si $r > 0$, o $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ si $r = 0$.

Lema 2.2.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Se supone que $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 \leq r < R \leq \infty$ son tales que la corona $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ está contenida en U. Sean además ϱ_1, ϱ_2 tales que $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ y Γ_1, Γ_2 las circunferencias centradas en z_0 y de radios ϱ_1 y ϱ_2, respectivamente, orientadas ambas en sentido positivo ($\Gamma_j := z_0 + \varrho_j\, e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$).

Entonces, para cada z con $\varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2$ se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,.$$

Teorema 2.3.- (*Desarrollos de Laurent*)

Sea f una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$ que contiene a la corona $C = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$. Entonces existen:

i) una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, (z - z_0)^n$ que converge absolutamente en $B(z_0, R)$ y

ii) una serie de potencias negativas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\, \dfrac{1}{(z - z_0)^n}$ que converge absolutamente en el complementario de $\overline{B}(z_0, r)$,

tales que, para cada $z \in C$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \frac{1}{(z - z_0)^n}\,. \tag{1}$$

Los coeficientes de estas series vienen dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varrho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varrho} f(w)\, (w - z_0)^{n-1}\, dw\,, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

siendo Γ_ϱ cualquier circunferencia centrada en z_0 y de radio ϱ, $r < \varrho < R$, orientada positivamente.

Observaciones 2.4.-

i) La expresión (1) se denomina *desarrollo en serie de Laurent* de f en la corona C; la primera serie es la *parte regular* del desarrollo y la segunda la *parte residual* o *singular*. Las expresiones (2) muestran que el desarollo en serie de Laurent es único.

ii) Es usual denotar, para $n \geq 1$, $b_n = a_{-n}$ y así la expresión (1) se escribe de forma más compacta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, (z - z_0)^n\,,$$

y las fórmulas dadas en (2) se resumen en una:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varrho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Teorema 2.5.- (*Clasificación de singularidades*)

Sean f una función holomorfa en un disco punteado $B'(z_0, R)$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

su desarrollo de Laurent en $B'(z_0, R)$. Entonces:

i) z_0 es una singularidad evitable de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo es nula, es decir, si $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) z_0 es un polo de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo es una suma finita, es decir, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_m \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > m$. En este caso m es el orden del polo.

iii) z_0 es una singularidad esencial de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo tiene infinitos términos no nulos.

§ 3 RESIDUOS.

Definición 3.1.- Sean f una función holomorfa en un disco punteado $B'(z_0, R)$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

su desarrollo de Laurent en $B'(z_0, R)$. El número complejo b_1 se denomina *residuo* de f en z_0 y se denota por

$$\operatorname{Res}(f, z_0) .$$

Proposición 3.2.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$ que tiene una singularidad de tipo evitable en el punto z_0. Entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0 .$$

Corolario 3.3.- Sean f y g dos funciones holomorfas en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que tienen un cero del mismo orden en z_0. Entonces

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = 0 .$$

Lo mismo sucede si el orden del cero de f en z_0 es superior al del cero de g.

Corolario 3.4.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f, g dos funciones holomorfas en $U \setminus \{z_0\}$ que tienen un polo del mismo orden en z_0. Entonces

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = 0 .$$

Lo mismo se puede decir si el orden del polo de g en z_0 es superior al del polo de f.

Proposición 3.5.- Sea g una función holomorfa en un disco $B(z_0, r)$ con $g(z_0) \neq 0$. Si $m \in \mathbb{N}$, la función f definida en el disco punteado $B'(z_0, r)$ por

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

tiene un polo de orden m en el punto z_0 y

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{m-1)}(z_0)}{(m-1)!} .$$

Observación 3.6.- Según 1.5.b) toda función f que tenga un polo de orden m en el punto z_0 se puede escribir como en la proposición anterior, pero puede resultar extremadamente laborioso determinar en situaciones concretas esa función g. Seguidamente se presentan algunos resultados relativos a singularidades polares de orden pequeño, que surgen al considerar cocientes de funciones, y que permiten soslayar ese inconveniente.

Proposición 3.7.- Sean f y g funciones holomorfas en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f no se anula en z_0 y g tiene un cero simple en z_0, es decir,

$$f(z_0) \neq 0 , \qquad g(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad g'(z_0) \neq 0 .$$

Entonces $f/_g$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}\,.$$

Proposición 3.8.- Sean f y g dos funciones holomorfas en un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f tiene un cero de orden m en z_0 y g tiene un cero de orden $m+1$ en z_0. Entonces $f/_g$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = (m+1)\,\frac{f^{m)}(z_0)}{g^{m+1)}(z_0)}\,.$$

Proposición 3.9.- Sean f y g funciones holomorfas en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f no se anula en z_0 y g tiene un cero doble en z_0, es decir,

$$f(z_0) \neq 0\,, \qquad g(z_0) = g'(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad g''(z_0) \neq 0\,.$$

Entonces $f/_g$ tiene un polo doble en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = 2\,\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} - \frac{2}{3}\,\frac{f(z_0)\,g'''(z_0)}{\big[g''(z_0)\big]^2}\,.$$

Proposición 3.10.- Sean f y g funciones holomorfas en un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f tiene un cero simple en z_0 y g tiene un cero de orden 3 en z_0, es decir,

$$f(z_0) = 0\,, \quad f'(z_0) \neq 0\,, \qquad g(z_0) = g'(z_0) = g''(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad g'''(z_0) \neq 0\,.$$

Entonces $f/_g$ tiene un polo doble en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = 3\,\frac{f''(z_0)}{g'''(z_0)} - \frac{3}{2}\,\frac{f'(z_0)\,g^{4)}(z_0)}{\big[g'''(z_0)\big]^2}\,.$$

§ 4 TEOREMA DE LOS RESIDUOS. APLICACIONES.

Teorema 4.1.- (*Teorema de los residuos*)

Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función definida y holomorfa en U salvo quizá en una familia de puntos que son todos ellos singularidades aisladas de f. Supongamos que D es un dominio de Jordan con $D \cup \partial D \subset U$ y tal que ninguna de las singularidades de f está en la curva $\Gamma = \partial D$. Entonces, si $z_1, z_2, \ldots, z_m$ son las singularidades de f en el interior de D, se tiene que

$$\oint_\Gamma f(w)\,dw = 2\,\pi\,i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_j)\,,$$

cuando en Γ se considera la orientación natural inducida por D.

4.2.- Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

4.2.1.- Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano superior

$$\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}\,,$$

y f una función definida y holomorfa en U excepto para un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en el eje real. Si existen constantes $M, R > 0$ y $p > 1$ tales que en Π^+ se tiene que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p} \quad \text{si } |z| \geq R\,, \tag{3}$$

entonces f es integrable en $\mathbb{R}$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(f, a)\,.$$

4.2.2.- Si se verifican las condiciones de 4.3.1 sustituyendo Π^+ por el semiplano inferior

$$\Pi^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \leq 0\}\,,$$

entonces f es integrable en $\mathbb{R}$ y su integral viene dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(f,b)\,.$$

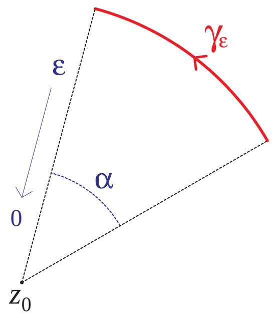
Observación 4.3.- Las funciones racionales $f = {}^{P}\!/_{Q}$, donde P y Q son polinomios tales que grado$(Q) \geq$ grado$(P)+2$ y Q no tiene ceros en la recta real, verifican la condición (3) en ambos semiplanos, concretamente, el exponente p es en este caso

$$p = \operatorname{grado}(Q) - \operatorname{grado}(P) \geq 2 > 1\,.$$

4.4.- Lema de Jordan.

Sea f una función holomorfa en un disco punteado $B'(z_0, r)$ y tal que en el punto z_0 tiene un polo simple. Para cada ε con $0 < \varepsilon < r$, sea γ_ε un arco de circunferencia de centro z_0, ángulo fijo α y radio ε, orientado en sentido antihorario. Entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \alpha\, i \operatorname{Res}(f, z_0)\,.$$



4.5.- Valor Principal de Cauchy.

Definición.- Sea f una función definida y continua en $\mathbb{R}$ excepto en un número finito de puntos $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Si f es integrable en $(-\infty, x_1 - \varepsilon)$ y $(x_n + \varepsilon, \infty)$ para todo $\varepsilon > 0$ (o simplemente, si las correspondientes integrales impropias convergen) y existe y es finito el límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx \right),$$

entonces dicho límite se denomina *valor principal de Cauchy* de la integral de f en $\mathbb{R}$ (o, simplemente, valor principal de Cauchy de f en $\mathbb{R}$) y se denota por

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

4.5.1.- Sean U un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano Π^+ y f una función holomorfa en U excepto en un número finito de singularidades aisladas. Sean $x_1, \ldots, x_m$ las posibles singularidades de f en el eje real y supongamos que todas ellas son polos simples. Si se verifica además la condición (3), entonces existe el valor principal de Cauchy de f en $\mathbb{R}$ y se tiene que

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\,\pi\,i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(f,a) + \pi\,i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, x_j)\,.$$

4.5.2.- Si se sustituye Π^+ por Π^-, y se verifican las restantes condiciones, entonces

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\,\pi i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(f,b) - \pi\,i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, x_j)\,.$$

4.6.- Transformadas de Fourier: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$.

Dada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y un número real ω, si la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$ es convergente, su valor se denomina *transformada de Fourier* de f en el punto ω y se denota por $\widehat{f}(\omega)$. En particular, si f es integrable en $\mathbb{R}$, $\widehat{f}$ está definida para todo $\omega \in \mathbb{R}$ (la función $e^{-i\omega x} f(x)$ es integrable ya que $e^{-i\omega x}$ es continua y de módulo 1).

4.6.1.- Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano Π^+ y f una función definida y holomorfa en U excepto para un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en el eje real. Supongamos también que existen constantes M, $R > 0$ tales que en Π^+ se tiene que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \qquad \text{si } |z| \geq R\,. \tag{4}$$

Entonces, para cada $\omega < 0$ existe $\widehat{f}(\omega)$ y

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = 2\,\pi\,i \sum_{\mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}(e^{-i\omega z} f(z), a)\,.$$

4.6.2.- Si las condiciones anteriores se verifican sustituyendo Π^+ por el semiplano inferior Π^-, entonces existe $\widehat{f}(\omega)$ para cada $\omega > 0$ y

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = -2\,\pi\,i \sum_{\mathrm{Im}(b)<0} \mathrm{Res}(e^{-i\omega z} f(z), b)\,.$$

Observación 4.7.- Las funciones racionales $f = {}^{P}\!/_{Q}$, donde P y Q son polinomios tales que grado$(Q) >$ grado(P) y Q no tiene ceros en la recta real, verifican la condición (4) en ambos semiplanos.

4.8.- Valor Principal de Cauchy de transformadas de Fourier.

4.8.1.- Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano superior Π^+ y f una función definida y holomorfa en U, excepto para un número finito de singularidades aisladas. Sean $x_1, \ldots, x_m$ las posibles singularidades en el eje real y supongamos que todas son polos simples. Si se verifica la condición (4), entonces, para cada $\omega < 0$ existe el valor principal de Cauchy de $e^{-i\omega x} f(x)$ y

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = 2\,\pi\,i \sum_{\mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}(e^{-i\omega z} f(z), a) + \pi\,i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(e^{-i\omega z} f(z), x_j)\,.$$

4.8.2.- Si se sustituye Π^+ por Π^- y se verifican en este semiplano las mismas condiciones, entonces, para cada $\omega > 0$ existe el valor principal de Cauchy de $e^{-i\omega x} f(x)$ y se tiene que

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = -2\,\pi\,i \sum_{\mathrm{Im}(b)<0} \mathrm{Res}(e^{-i\omega z} f(z), b) - \pi\,i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(e^{-i\omega z} f(z), x_j)\,.$$

4.9.- Integrales racionales trigonométricas.

Sea $R(x, y)$ una función racional en las dos variables (x, y) cuyo denominador no se anula en la circunferencia unidad $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Entonces

$$\int_0^{2\,\pi} R\big(\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta)\big)\,d\theta \;=\; 2\,\pi\,i \sum_{|a|<1} \mathrm{Res}(f, a)\,,$$

donde la función f se define por

$$f(z) = \frac{1}{i\,z}\,R\left(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2\,i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\right)\,.$$

4.10.- Transformada de Laplace.

Sea f una función compleja definida en $[0, \infty)$, localmente integrable en $[0, \infty)$. Supongamos que f es *de orden exponencial*, es decir, que existen constantes $A > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$|f(t)| \le A\,e^{\alpha t} \quad \text{para todo } t \in [0, \infty).$$

La integral

$$\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-zt}\,dt$$

converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$, con $\mathrm{Re}(z) > \alpha$, lo que permite dar la siguiente definición.

Definición.- La *transformada de Laplace* de f se define como la función $\mathcal{L}f$ dada por

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^{\infty} f(t)\,e^{-zt}\,dt\,,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, con $\mathrm{Re}(z) > \alpha$.

4.10.1.- La transformada de Laplace de f es una función holomorfa en el semiplano $H_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \alpha\}$.

4.10.2.- Fórmula de inversión compleja.

Sea F una función holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en un conjunto finito P de polos de F. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que F es holomorfa en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \alpha\}$, y supongamos que existen $M > 0$, $R > 0$ y $p > 0$ tales que para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq R$ se tiene que

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}.$$

Entonces, la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(t) = \sum_{a \in P} \operatorname{Res}\big(e^{tz} F(z), a\big)$$

verifica las siguientes propiedades:

1) f es continua en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, con lo que admite transformada de Laplace.

2) Para cada número complejo z con $\operatorname{Re}(z) > \alpha$ se tiene que $F(z) = \mathcal{L}f(z)$.