EJERCICIO COMPUTACIONAL Nº 4. MÉTODOS ITERATIVOS

Ángel Durán

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid

23 de abril de 2011

Contenidos

Métodos de descomposición

$$A = Q - (Q - A)$$

$$Ax = b \Rightarrow Qx = (Q - A)x + b \tag{1}$$

$$Qx^{(\nu)} = (Q - A)x^{(\nu-1)} + b, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

$x^{(0)}$ arbitrario

Elección de Q: la resolución de los sistemas (2) debe ser más sencillo que resolver (1)

Técnicas clásicas

$$A = D - E - F,$$

$$\begin{aligned}
D &= diag(a_{11}, \ldots, a_{nn}), \\
E &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \\
F &= D - E - A.
\end{aligned}$$

Técnicas clásicas

- Jacobi: $Q = D$,

$$Dx^{(\nu)} = b + Ex^{(\nu-1)} + Fx^{(\nu-1)}.$$

- Gauss-Seidel: $Q = D - E$,

$$Dx^{(\nu)} = b + Ex^{(\nu)} + Fx^{(\nu-1)}.$$

- SOR(ω): $Q = \frac{1}{\omega}(D - \omega E)$,

$$(D - \omega E)x^{(\nu)} = ((1 - \omega)D + \omega F)x^{(\nu-1)} + \omega b,$$

Estructura general de la programación

- Control de iteración: *maxit*, *tol*
- En general, almacenamiento de sólo dos iterantes consecutivos
- $XV = x^{(0)}, NITER = 0, ERRORC = 1$

```
function [XN]=método(A,b,XV)
XV = x^(0), NITER = 0, ERRORC = 1
while (NITER < maxit)&(ERRORC > tol)
  RESOLVER QXN = (Q − A)XV + b
  ACTUALIZAR NITER = NITER + 1
    ERRORC = ||XN − XV||/||XN||
    XV ← XN
end
endfunction
```

Resultado general

Los errores $e^\nu = x^{(\nu)} - x$ satisfacen la recurrencia

$$e^{(\nu)} = Me^{(\nu-1)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

$M = Q^{-1}(Q - A)$: matriz de iteración del método

$$\begin{aligned} M &= D^{-1}(E+F) \quad \text{(Jacobi)} \\ M &= (D-E)^{-1}F \quad \text{(Gauss-Seidel)} \\ M &= (D-\omega E)^{-1}((1-\omega)D+\omega F). \quad \text{(SOR)} \end{aligned}$$

Teorema: La iteración (2) converge para cualquier vector inicial $x^{(0)}$ si y sólo si $\rho(M) < 1$.

Casos particulares

- si $||M|| < 1$ para alguna norma matricial, entonces la iteración (2) converge.
- Si A es estrictamente diagonalmente dominante, entonces A es invertible y además:
  - El método de Jacobi converge para cualquier elección del iterante inicial.
  - Si $0 < \omega \leq 1$, el método SOR con parámetro ω converge para cualquier elección del iterante inicial. En particular, el método de Gauss-Seidel ($\omega = 1$) converge.
- Si A es simétrica y definida positiva, entonces:
  - El método de Gauss-Seidel converge para cualquier elección del iterante inicial.
  - El método SOR con parámetro ω converge para cualquier elección del iterante inicial si y sólo si $0 < \omega < 2$.

Velocidad de convergencia

$$||e^{(\nu)}|| \approx \rho(M)^{\nu}||e^{(0)}||.$$

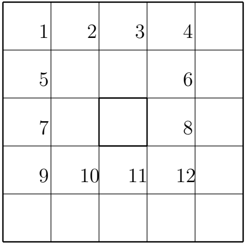
$R_\infty(M) = -\log \rho(M) > 0$ se llama velocidad asintótica de convergencia y controla la rapidez con la que converge la iteración.

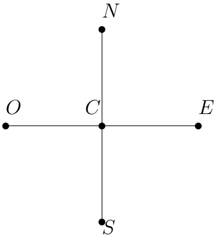
Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Jacobi: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(M) = 1/2$
- Gauss-Seidel: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(M) = 1/4$

Un solo paso del método G-S equivale a dos del método de Jacobi

Estudio comparativo.distribución del potencial en un condensador





$$V_C = \frac{1}{4}(V_N + V_S + V_E + V_O).$$

Estudio comparativo

La aplicación de esta fórmula lleva a un sistema con matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

El término independiente contiene valores del potencial en los puntos de la malla que caen en las placas.

Estudio comparativo.distribución del potencial en un condensador

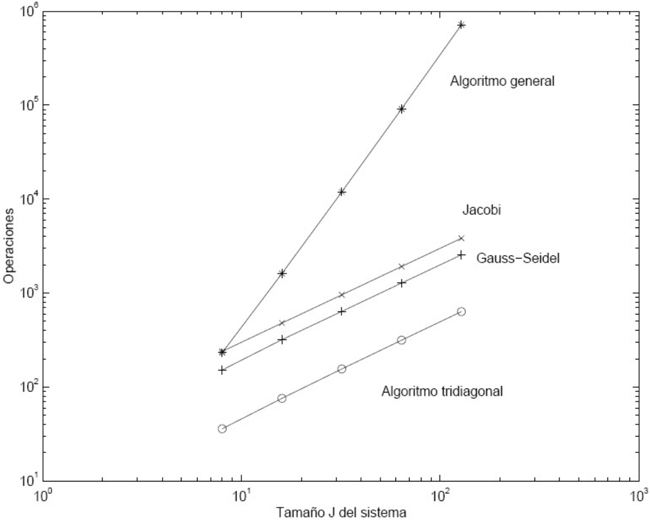
Método de Jacobi

TOL	$NITER$	$\|\|U-u\|\|_\infty$
1E-05	17	7.6294E-06
1E-07	24	5.9605E-08
1E-09	30	4.3132E-10
1E-11	37	7.2759E-12
EPS	52	EPS

Método de Gauss-Seidel

TOL	$NITER$	$\|\|U-u\|\|_\infty$
1E-05	12	1.8992E-06
1E-07	16	2.3291E-08
1E-09	20	2.8701E-10
1E-11	24	3.5415E-12
EPS	34	EPS

Comparación: algoritmos directos/iterativos

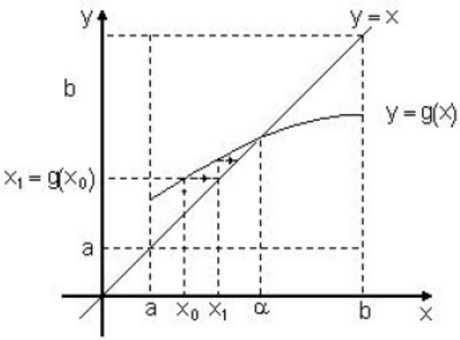


Técnicas clásicas

- Bisección
- Secante
- **Punto fijo**
- **Newton**

Iteración de punto fijo

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$$



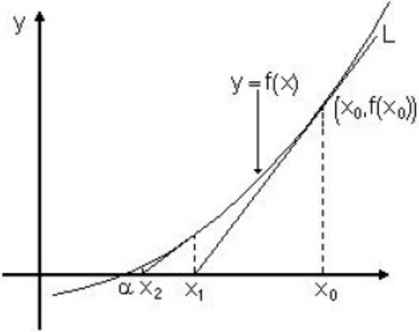
Iteración de punto fijo

Elegida una aproximación inicial x_0

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

- Supongamos que g es de clase $C^1(r-\epsilon, r+\epsilon)$, con $\epsilon > 0$. Si $|g'(r)| < 1 \Rightarrow$ Convergencia local lineal

Método de Newton



Método de Newton

Elegida una aproximación inicial x_0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

- Supongamos que f es de clase C^2 en un entorno de r con $f(r) = 0, f'(r) \neq 0$. Supongamos además que existe $f'''(r)$ $\Rightarrow$ Convergencia local cuadrática.

Estructura general de la programación

- Control de iteración: $maxit$, $tol1$, $tol2$
- En general, almacenamiento de sólo dos iterantes consecutivos
- Evaluaciones de la función (y derivadas) a través de una función externa que contenga su expresión

```
function [f1,f2]=fun(x)
f1 = x**4 - x**3 + 3*(x**2) - 6*x - 1
f2 = 4*(x**3) - 3*(x**2) + 6*x - 6
endfunction
```

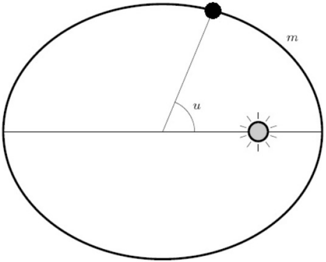
Estructura general de la programación

- Dado $XV = x^{(0)}$ como entrada

function [XN]=método
$NITER = 0, ERC = 1, ERR = 1$
while $(NITER < maxit) \& (ERC > tol1) \& (ERR > tol2)$
  EVALUAR $[F1, F2] = fun(XV)$
  IMPLEMENTAR MÉTODO $XN = \cdots$
  ACTUALIZAR $NITER = NITER + 1$
    $ERRORC = ||XN - XV||/||XN||$
    $ERRORR = ||f(XN)||$
    $XV \leftarrow XN$
end
endfunction

Ecuación de Kepler

$$u = g(u) = m + \epsilon \sin u \Leftrightarrow f(u) = u - m - \epsilon \sin u = 0$$



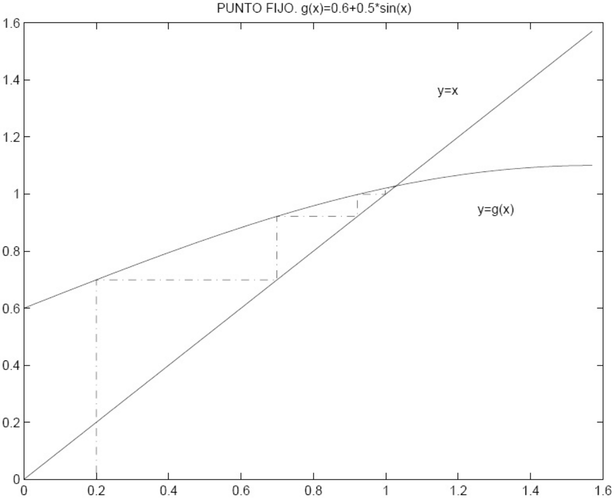
$0 < \epsilon < 1$: excentricidad de la órbita
u: anomalía excéntrica: ángulo formado en el centro de la elipse por el planeta y el eje mayor
m: anomalía media: duración del año planetario

Iteración de punto fijo

n	x_n	e_n	e_{n+1}/e_n
2	0.600	4.2818E-01	
3	0.8823	1.4586E-01	0.3407
4	0.9861	4.2073E-02	0.2884
5	1.0169	1.1238E-02	0.2671
6	1.0253	2.9286E-03	0.2606
7	1.0274	7.5797E-04	0.2588
8	1.0280	1.9582E-04	0.2583
9	1.0281	5.0567E-05	0.2582
10	1.0282	1.3056E-05	0.2582
11	1.0282	3.3711E-06	0.2582
12	1.0282	8.7037E-07	0.2582

Cuadro: Iteración de punto fijo para $f(x) = x - 0{,}5\sin x - 0{,}6 = 0$, con $g(x) = 0{,}5\sin x + 0{,}6$.

Iteración de punto fijo

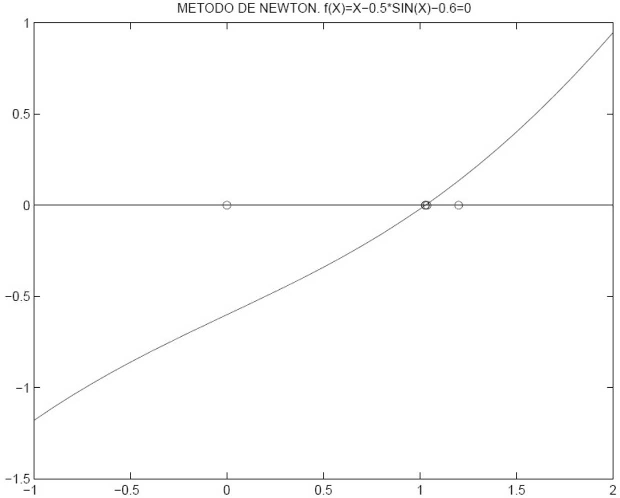


Método de Newton

n	x_n	e_n	e_{n+1}/e_n^2
0	1.2000	1.7182E-01	
1	1.0364	8.1936E-03	0.2775
2	1.0282	1.9347E-05	0.2882
3	1.0282	1.0803E-10	0.2886

Cuadro: Método de Newton para $f(x) = x - 0{,}5\sin x - 0{,}6 = 0$.

Método de Newton



Formulación

Sistema de ecuaciones

$$f(\vec{x}) = 0, \vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$$

o bien

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_m) &= 0, \\ f_2(x_1, \ldots, x_m) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_m) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Métodos

- **Iteración de punto fijo**: Se reescribe el sistema (5) en la forma $\vec{x} = g(\vec{x})$, para cierta $g = (g_1, \dots, g_m)$. Dado un iterante inicial $\vec{x}_0$, se genera la sucesión

$$\vec{x}_n = g(\vec{x}_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

- $||g'(r)|| < 1 \Rightarrow$convergencia local lineal en la norma matricial $||\cdot||$.

Métodos

- **Método de Newton**: Dado un iterante inicial $\vec{x}_0$,x_{n+1} es solución del sistema

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n),$$

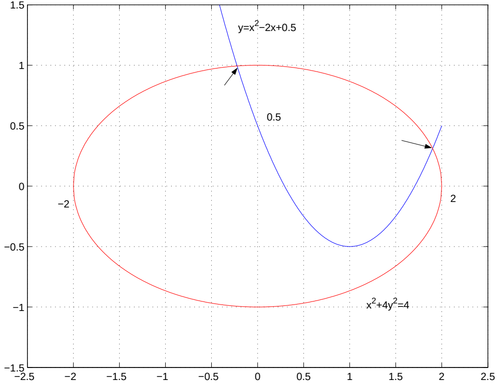
es decir

$$\begin{aligned} f'(x_n)\Delta x_n &= -f(x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + \Delta x_n \end{aligned}$$

- $f \in C^3$ en un entorno de r, $f'(r)$ es invertible $\Rightarrow$ convergencia local cuadrática en la norma matricial $|| \cdot ||$.

Ejemplo

$$f_1(x,y) = x^2 - 2x - y + 0{,}5 = 0, \quad f_2(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$



Ejemplo

Punto fijo:

$$x = g_1(x,y) = \frac{x^2 - y + 0{,}5}{2}, \quad y = g_2(x,y) = \frac{-x^2 - 4y^2 + 8y + 4}{8}$$

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
0	0.00	1.00	0	2.00	0.00
1	-0.25	1.00	1	2.25	0.00
2	-0.21875	0.9921875	2	2.78125	-0.1328125
3	-0.2221680	0.9939880	3	4.184082	-0.6085510
4	-0.2223147	0.9938121	4	9.307547	-2.4820360
5	-0.2221941	0.9938029	5	44.80623	-15.891091
6	-0.2222163	0.9938095	6	1011.995	-392.60426
7	-0.2222147	0.9938083	7	512263.2	-205477.82
8	-0.2222145	0.9938084			
9	-0.2222146	0.9938084			

Ejemplo

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} x & -1/2 \\ -x/4 & -y+1 \end{pmatrix}$$

- Un cero en $(-0{,}5, 0{,}5) \times (0{,}5, 1{,}5)$ y el otro cerca de $(1{,}9, 0{,}3)$.
- Si $(x,y) \in (-0{,}5, 0{,}5) \times (0{,}5, 1{,}5) \Rightarrow ||g'(x,y)||_\infty < 1$
- $||g'(1{,}9, 0{,}3)||_\infty > 1$

Ejemplo

Punto fijo: Nuevo sistema

$$x = \frac{-x^2 + 4x + y - 0{,}5}{2}, \quad y = \frac{-x^2 - 4y^2 + 11y + 4}{11}$$

n	x_n	y_n
0	2.00	0.00
1	1.75	0.00
2	1.71875	0.085227
3	1.753063	0.177668
4	1.808345	0.250441
8	1.903595	0.316078
12	1.900924	0.311227
16	1.900652	0.311199
20	1.900677	0.311220
24	1.900677	0.311219

Ejemplo

Método de Newton

$$f_1(x,y) = x^2 - 2x - y + 0{,}5 = 0$$

$$f_2(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \quad f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 & -1 \\ 2x & 8y \end{pmatrix}$$

$$f'(x_n,y_n)\Delta \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = -f(x_n,y_n)$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$	$\Delta \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2{,}00 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2{,}0 & -1{,}0 \\ 4{,}0 & 2{,}0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}09375 \\ 0{,}0625 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1{,}9063 \\ 0{,}3125 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1{,}9063 \\ 0{,}3125 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1{,}8125 & -1{,}0 \\ 3{,}8125 & 2{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}005559 \\ 0{,}001287 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0{,}008789 \\ 0{,}024414 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1{,}900069 \\ 0{,}311213 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1{,}900069 \\ 0{,}311213 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1{,}80138 & -1{,}0 \\ 3{,}80138 & 2{,}489700 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}000014 \\ 0{,}000006 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0{,}000031 \\ 0{,}000038 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1{,}900068 \\ 0{,}311219 \end{pmatrix}$