Dado el problema de valores iniciales

$$xy' + 2y = 4x^2,$$
$$y(1) = 2.$$

1 Hallar la solución general de la ecuación:

i) Por el método de *variación de la constante*.

ii) Mediante un *factor integrante* que la haga exacta.

2 Hallar la solución particular del problema.

Solución

1 i) Suponiendo $x \neq 0$ podemos escribir la ecuación en la forma

$$y' + 2\,\frac{y}{x} = 4x.$$

Hallamos primero la solución general de la ecuación homogénea $y' + 2\,\dfrac{y}{x} = 0$,

$$y' + 2\,\frac{y}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2\,\frac{x}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2\,\frac{dx}{x}$$

Integrando en los dos miembros de la última ecuación se tiene

$$\ln|y| = -2\ln|x| + \ln|C| \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln(|x|^{-2}|C|) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{C}{x^2}.$$

Suponemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{x^2}$$

De manera que

$$y_p'(x) = C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} - C(x)\cdot\frac{2}{x^3} = -2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{C(x)}{x^2} + 4x$$

de donde

$$C'(x) = 4x^3,$$

y por tanto

$$C(x) = x^4 + c_1.$$

Tomando, por comodidad $c_1 = 0$ ya que sólo buscamos una solución particular se llega a que

$$y_p(x) = x^4\cdot\frac{1}{x^2} = x^2.$$

Sumando la solución general de la ecuación homogénea y la solución particular de la ecuación no homogénea obtenemos la solución general buscada

$$y(x) = \frac{C}{x^2} + x^2.$$

1 ii) Escribiendo la ecuación dada en la forma

$$(4x^2 - 2y)dx - xdy = 0$$

y llamando $M(x, y) = 4x^2 - 2y$ y $N(x, y) = -x$ se tiene

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Buscamos un factor integrante $\mu(x)$ mediante la ecuación

$$\mu'(x) = \frac{1}{x}\mu(x),$$

o bien

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{x}, \quad \text{de donde} \quad \mu(x) = Cx.$$

Eligiendo como factor integrante $\mu(x) = x$ se llega a la siguiente ecuación exacta

$$(4x^3 - 2xy)dx - x^2dy = 0$$

Busquemos la función $U(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 4x^3 - 2xy$ y $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -x^2$

De la primera de la ecuciones anteriores se obtiene integrando respecto de la variable x,

$$U(x, y) = x^4 - x^2y + g(y).$$

Derivando esta expresión respecto de la variable y, e igualándola a la segunda de las ecuaciones se tiene

$$-x^2 + g'(y) = -x^2, \quad \text{de donde} \quad g(y) = \text{cte.}$$

Así pues, podemos escribir la solución general de la ecuación en la forma

$$U(x, y) = x^4 - x^2y = C \quad \text{(o bien suponiendo } x \neq 0) \quad y(x) = \frac{\mathcal{C}}{x^2} + x^2 \quad (\mathcal{C}, \text{ cte. arbitraria})$$

2 Si en la solución general de la ecuación hacemos $x = 1, y = 2$ resulta

$$2 = \frac{C}{1} + 1$$

de donde $C = 1$. La solución particular pedida es, por tanto,

$$y = \frac{1}{x^2} + x^2.$$