

Lección 11: Problemas de valores en la frontera

1 Sistemas ortogonales y completos

1.1 Productos internos para funciones. Espacio de funciones de energía finita

Por emplear la terminología habitual del ingeniero, diremos que una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ tiene energía finita cuando es continua a trozos (con posibles singularidades) e

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

La integral anterior es en el sentido de Riemann y se entiende que puede ser impropia (algún extremo no acotado o integrando singular en ciertos puntos). La energía de la función es el valor de dicha integral. Denotamos por $\mathcal{E}(a, b)$ al conjunto de todas las funciones con energía finita definidas en (a, b) (se entiende que tomando valores complejos). Matemáticamente, se dice que las funciones de $\mathcal{E}(a, b)$ son cuadrado integrables.

Dadas $f, g \in \mathcal{E}(a, b)$, vamos a definir su producto interno como

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} dx.$$

Notemos que la existencia de la integral está garantizada por la desigualdad elemental

$$|f(x)\overline{g(x)}| \leq (1/2) (|f(x)|^2 + |g(x)|^2), \quad a < x < b.$$

Notemos que el producto interno no se puede definir en general para funciones que sean integrables pero no cuadrado integrables. Precisamente se introduce $\mathcal{E}(a, b)$ para disponer del producto interno.

El producto interno de funciones goza de propiedades análogas a las del producto escalar de vectores (lineal en el primer argumento, antilineal en el segundo y definido positivo). Por ello se dice que $\mathcal{E}(a, b)$ (dotado del producto interno anteriormente definido) es un espacio euclídeo. La norma de una $f \in \mathcal{E}(a, b)$ se define de la manera habitual como

$$\|f\| := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

es decir, como la raíz cuadrada de la energía.

En cuanto al funcional $\|\cdot\|$, comentemos que goza de propiedades análogas a las de la norma euclídea para los vectores (homogénea, subaditiva, definida positiva). Además se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|, \quad f, g \in \mathcal{E}(a, b).$$

1.2 Ortogonalidad

Dos funciones $f, g \in \mathcal{E}(a, b)$ se dice que son ortogonales si

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Como en general tenemos

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\Re\langle f, g \rangle,$$

para funciones ortogonales resulta ser válido el Teorema de Pitágoras:

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Una familia (o sistema) de funciones $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en $\mathcal{E}(a, b)$ se dice que es ortogonal, cuando

$$\langle f_\alpha, f_\beta \rangle = 0, \quad \alpha, \beta \in A, \quad \alpha \neq \beta.$$

Dado un sistema ortogonal como el anterior y dada una familia de escalares $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$, el sistema $\{\mu_\alpha f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es de nuevo ortogonal.

El sistema se dice ortonormal cuando es ortogonal y además

$$\|f_\alpha\| = 1, \quad \alpha \in A.$$

Notemos que dado un sistema ortogonal $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $f_\alpha \neq 0$, $\alpha \in A$, el nuevo sistema $\{f_\alpha/\|f_\alpha\|\}_{\alpha \in A}$ es ortonormal.

Supongamos que la colección de funciones $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es finita, en cuyo caso la vamos a denotar simplemente por $\{f_n\}_{n=1}^N$. En general

$$\left\| \sum_{n=1}^N f_n \right\|^2 = \left\langle \sum_{n=1}^N f_n, \sum_{m=1}^N f_m \right\rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle f_n, f_m \rangle = \sum_{n=1}^N \|f_n\|^2 + 2\Re \sum_{1 \leq n < m \leq N} \langle f_n, f_m \rangle,$$

de suerte que si el sistema $\{f_n\}_{n=1}^N$ es ortogonal es válido el Teorema de Pitágoras

$$\left\| \sum_{n=1}^N f_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \|f_n\|^2.$$

1.2.1 Coeficientes de Fourier

Sea ahora $\{v\}_{n=1}^N$ un sistema ortogonal con $v_n \neq 0$, $1 \leq n \leq N$, y llamemos V al subespacio vectorial generado por los vectores del sistema. Entonces toda $f \in V$ se escribe como

$$f = \sum_{n=1}^N c_n v_n$$

para ciertos $c_n \in \mathbb{C}$, $1 \leq n \leq N$. Multiplicando escalarmente el desarrollo anterior por v_m , $1 \leq m \leq N$, encontramos

$$\langle f, v_m \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^N c_n v_n, v_m \right\rangle = \sum_{n=1}^N c_n \langle v_n, v_m \rangle = c_m \|v_m\|^2,$$

luego

$$(1) \quad c_m = \frac{\langle f, v_m \rangle}{\|v_m\|^2}, \quad 1 \leq m \leq N.$$

Se deduce que el sistema es linealmente independiente (pues si $f = 0$ los coeficientes resultan ser nulos) y se pone de manifiesto la gran ventaja de los sistemas ortogonales: para expresar un vector $f \in V$ como combinación lineal del sistema ortogonal $\{v_n\}_{n=1}^N$ no hay que resolver un sistema de N ecuaciones lineales sino que simplemente, usando la ortogonalidad, los coeficientes se calculan directamente por la expresión (1).

Ejemplo 1. Para $[a, b] = [0, 2\pi]$, el sistema $\{v_1(x), v_2(x), v_3(x)\}$ con

$$v_1(x) = 1, v_2(x) = \sin x, v_3(x) = \cos x,$$

es ortogonal, porque

$$\begin{aligned} \langle 1, \sin x \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = 0, \\ \langle 1, \cos x \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{2\pi} = 0, \\ \langle \sin x, \cos x \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Así, cualquier $f \in V$, espacio generado por las tres funciones v_1, v_2, v_3 , se puede escribir

$$f = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 + \frac{\langle f, \sin x \rangle}{\langle \sin x, \sin x \rangle} \sin x + \frac{\langle f, \cos x \rangle}{\langle \cos x, \cos x \rangle} \cos x$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_0^{2\pi} f(x) dx}{\int_0^{2\pi} 1 dx} + \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx}{\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx} \sin x + \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx}{\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx} \cos x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx \right) \sin x + \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx \right) \cos x.
\end{aligned}$$

1.2.2 Proyección ortogonal

Tomemos ahora una función $f \in \mathcal{E}(a, b)$. Como $\dim V = N$, es patente que $V \neq \mathcal{E}(a, b)$ y por tanto puede suceder (con toda probabilidad) que $f \notin V$. Aun con todo, formemos la combinación lineal

$$f^* = \sum_{n=1}^N c_n v_n,$$

donde los coeficientes se calculan por (1). Notemos que $f^* \in V$ y que $f^* \neq f$, salvo en la situación excepcional $f \in V$. Nos preguntamos por el significado de f^* .

En primer lugar, observemos que (de nuevo por la ortogonalidad)

$$\langle f^*, v_n \rangle = c_n \|v_n\|^2 = \langle f, v_n \rangle, \quad 1 \leq n \leq N,$$

o bien

$$\langle f - f^*, v_n \rangle = 0, \quad 1 \leq n \leq N,$$

es decir, la diferencia $f - f^*$ es ortogonal a V (al ser ortogonal a los generadores lo será a todo elemento de V). Por tanto, dada cualquier otra función $g \in V$, la diferencia $f^* - g \in V$ será ortogonal a $f - f^*$ y entonces, por el Teorema de Pitágoras,

$$\|f - g\|^2 = \|(f - f^*) + (f^* - g)\|^2 = \|f - f^*\|^2 + \|f^* - g\|^2.$$

Así pues, dada $g \in V$, de la desigualdad anterior se deducen dos cosas:

- a) $\|f - g\| \geq \|f - f^*\|$ y
- b) si $\|f - g\| = \|f - f^*\|$ entonces $g = f^*$.

En resumen, se ha probado que f^* es el punto de V más próximo a f y además la unicidad de dicho punto. (Se dice que f^* es la proyección ortogonal de f sobre V). Notemos además que como $f - f^*$ es ortogonal a la propia f^* (pues la diferencia era ortogonal a todo elemento de V y $f^* \in V$), por el Teorema de Pitágoras tenemos

$$\|f^*\|^2 + \|f - f^*\|^2 = \|f\|^2,$$

de donde se obtiene la desigualdad

$$(2) \quad \|f^*\| \leq \|f\|.$$

Ejemplo 2. Para el sistema del ejemplo 1, la proyección ortogonal de $f(x) = x$ sobre V tiene la forma

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx \right) \sin x \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx \right) \cos x = \pi - 2 \sin x. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Consideramos, en $[0, 2\pi]$, el sistema $\{S_n, C_n\}_n$, formado por las funciones

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \cos nx, \quad n = 0, 1, \dots, \\ S_n(x) &= \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

El sistema anterior es ortogonal, porque

$$\begin{aligned} \langle C_j, C_k \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos(jx) \cos(kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(j+k)x + \cos(j-k)x) dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \pi & \text{si } j = k \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } j = k = 0 \end{cases} \\ \langle S_j, S_k \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(jx) \sin(kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(j+k)x - \cos(j-k)x) dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \pi & \text{si } j = k \end{cases} \\ \langle S_j, C_k \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(jx) \cos(kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(j+k)x + \sin(j-k)x) dx = 0. \end{aligned}$$

El espacio V_N , generado por

$$\{C_0, C_1, \dots, C_N, S_1, \dots, S_N\}$$

proporciona la proyección ortogonal, para $f \in \mathcal{E}(0, 2\pi)$

$$f_N(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)),$$

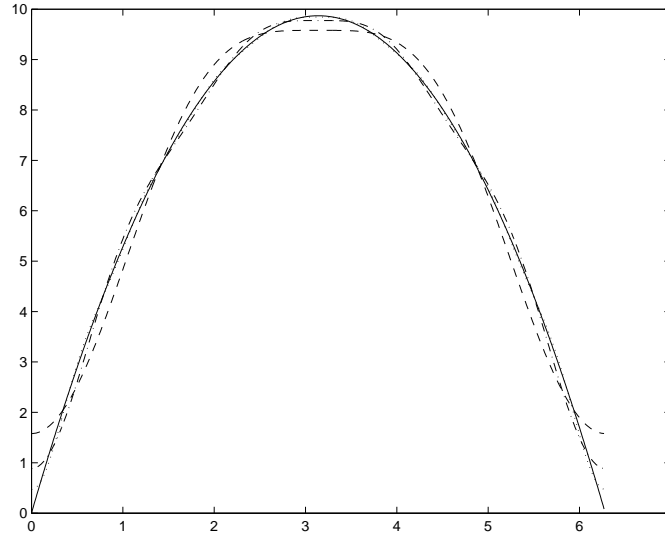


Figura 1: $f(x) = 2\pi x - x^2$ y aproximaciones trigonométricas de orden uno y dos.

donde los coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{\langle f, C_0 \rangle}{\langle C_0, C_0 \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ \alpha_k &= \frac{\langle f, C_k \rangle}{\langle C_k, C_k \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad 1 \leq k \leq N, \\ \beta_k &= \frac{\langle f, S_k \rangle}{\langle S_k, S_k \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad 1 \leq k \leq N.\end{aligned}$$

Para $f(x) = 2\pi x - x^2$, la figura 1 muestra la función así como varias proyecciones ortogonales. Se puede comprobar que, en este caso,

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{2\pi^2}{3} \\ \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx = -\frac{4}{k^2}, \quad k \geq 1, \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0, \quad k \geq 1.\end{aligned}$$

1.2.3 Aproximación por proyecciones ortogonales

Sea ahora $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión ortogonal de elementos de $\mathcal{E}(a, b)$. Para cada $N \geq 1$, sea V_N el subespacio vectorial generado por $\{v_n\}_{n=1}^N$ y llamemos f_N^* a la proyección ortogonal de f sobre V_N .

Denotando de nuevo

$$c_n = \frac{\langle f, v_n \rangle}{\|v_n\|^2}, \quad n \geq 1,$$

encontramos para $N \geq 1$

$$f_{N+1}^* = \sum_{n=1}^{N+1} c_n v_n = \sum_{n=1}^N c_n v_n + c_{N+1} v_{N+1} = f_N^* + c_{N+1} v_{N+1}.$$

Vemos que el paso de f_N^* a f_{N+1}^* consiste en añadir a f_N^* el nuevo término $c_{N+1} v_{N+1}$, que es ortogonal a los previos. Como además

$$f - f_N^* = f - f_{N+1}^* + c_{N+1} v_{N+1},$$

y $f - f_{N+1}^*$ es ortogonal a V_{N+1} , se deduce que

$$\|f - f_N^*\|^2 = \|f - f_{N+1}^*\|^2 + |c_{N+1}|^2 \|v_{N+1}\|^2.$$

Por tanto, obtenemos que $|c_{N+1}|^2 \|v_{N+1}\|^2$ es la mejora conseguida, medida en términos de energía, cuando aproximamos f por su proyección $f_{N+1}^* \in V_{N+1}$ en lugar de por la proyección $f_N^* \in V_N$.

Por otra parte, el Teorema de Pitágoras y la desigualdad (2) muestran que

$$\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \cdot \|v_n\|^2 = \|f_N^*\|^2 \leq \|f\|^2, \quad N \geq 1.$$

Se deduce que la serie de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \cdot \|v_n\|^2$$

es convergente (pues sus sumas parciales están acotadas superiormente por $\|f\|^2$) y que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \cdot \|v_n\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Esta es la llamada **desigualdad de Bessel**, válida para toda sucesión ortogonal y función (recordemos que los c_n se obtienen como se obtendrían los coeficientes del desarrollo de f en un sistema ortogonal de dimensión finita).

Podemos plantearnos entonces buscar las condiciones bajo las cuales f pueda aproximarse con un grado de precisión prefijado por sus proyecciones ortogonales sobre V_N , para N suficientemente grande; esto es, para que se verifique

$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - f_N^*\| = 0.$$

Como ya sabemos que

$$\|f\|^2 = \|f - f_N^*\|^2 + \|f_N^*\|^2 = \|f - f_N^*\|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \cdot \|v_n\|^2,$$

entonces, tomando límites, se cumplirá (3) si, y sólo si,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \cdot \|v_n\|^2 = \|f\|^2,$$

esto es, cuando la desigualdad de Bessel se convierte en igualdad.

1.3 Convergencia

La idea de fondo entonces es tratar de conseguir algo a lo que pueda darse el nombre de bases ortogonales de $\mathcal{E}(a, b)$. Naturalmente dichos sistemas básicos estarán formados por infinitos vectores y las combinaciones lineales habituales se traducirán en series. Por ello hay que comenzar aclarando el concepto de convergencia.

Diremos que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ de elementos de $\mathcal{E}(a, b)$ es convergente (en media cuadrática o bien en la norma $\|\cdot\|$) cuando existe $f \in \mathcal{E}(a, b)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Se puede demostrar que f es única y se llama el límite de la sucesión. Mientras no se diga lo contrario, en esta asignatura la expresión

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

se interpretará como el límite relativo a la norma euclídea de funciones. Conviene reflexionar sobre el significado de la convergencia respecto de la norma euclídea y compararlo con el significado de la convergencia puntual.

Ejemplo 4. La sucesión de $\mathcal{E}(0, 1)$

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1], \quad n \geq 0,$$

converge puntualmente a la función

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

y hacia $f = 0$ en media cuadrática, pues

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \in \mathcal{E}(a, b)$$

y sea $g \in \mathcal{E}(a, b)$. Como por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle f_n, g \rangle - \langle f, g \rangle| = |\langle f_n - f, g \rangle| \leq \|f_n - f\| \cdot \|g\|,$$

se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, g \rangle = \langle f, g \rangle.$$

Por otra parte

$$\|f_n\|^2 - \|f\|^2 = \|f + (f_n - f)\|^2 - \|f\|^2 = 2\Re\langle f_n - f, f \rangle + \|f_n - f\|^2.$$

Entonces, si $f_n \rightarrow f$, como tanto $\|f_n - f\|^2 \rightarrow 0$ como $\langle f_n - f, f \rangle \rightarrow 0$, se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|^2 = \|f\|^2.$$

Pasemos a la noción de serie convergente. Diremos que una serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

con término general $f_n \in \mathcal{E}(a, b)$ es convergente (en norma o en media cuadrática), cuando lo sea la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{n=1}^N f_n\}_{N=1}^{+\infty}$. El límite de esta última sucesión es lo que se llamará suma de la serie y también se denota por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n.$$

Así pues, salvo que se diga lo contrario, la igualdad anterior significa que

$$\|f - \sum_{n=1}^N f_n\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

En ocasiones es conveniente empezar por el índice $n = 0$, con lo cual la serie se escribiría $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. También se emplean series del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n,$$

que llamaremos convergentes cuando lo sea la sucesión de sumas parciales simétricas $\{\sum_{n=-N}^N f_n\}_{N=1}^{+\infty}$.

Según comentamos anteriormente, si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f$$

entonces para cada $g \in \mathcal{E}(a, b)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \langle f_n, g \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \langle f_n, g \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \langle \sum_{n=1}^N f_n, g \rangle = \langle f, g \rangle.$$

Asímismo,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=1}^N f_n \right\| = \|f\|.$$

En particular, si los términos de la serie son dos a dos ortogonales, como por el Teorema de Pitágoras

$$\left\| \sum_{n=1}^N f_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \|f_n\|^2,$$

obtendremos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|^2 = \|f\|^2.$$

1.4 Sistemas ortogonales completos

Los sistemas que actúan como bases ortogonales en $\mathcal{E}(a, b)$ son los llamados sistemas ortogonales completos. Un sistema $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ortogonal en $\mathcal{E}(a, b)$ (que no incluya a la función nula) se llama completo cuando el único elemento de $\mathcal{E}(a, b)$ que es ortogonal a todos los miembros del sistema es la función nula. Se puede reformular diciendo que un sistema ortogonal es completo cuando no es posible ampliar el mismo a otro nuevo sistema ortogonal mayor. En símbolos, la completitud del sistema viene expresada por la siguiente implicación:

$$f \in \mathcal{E}(a, b) \quad \text{y} \quad \langle f, f_\alpha \rangle = 0, \quad \alpha \in A \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

En esta lección vamos a usar preferentemente $A = \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $A = \mathbb{Z}$. No obstante, por sencillez, el siguiente teorema fundamental se enuncia para $A = \mathbb{N}$.

Teorema 1 *Sea $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ un sistema ortogonal en $\mathcal{E}(a, b)$ que no contiene a la función nula. Dada una función arbitraria $f \in \mathcal{E}(a, b)$, vamos a denotar*

$$(4) \quad c_n(f) = \frac{\langle f, v_n \rangle}{\|v_n\|^2}, \quad n \geq 1.$$

Son equivalentes:

- a) *El sistema es completo.*
- b) *Para toda función $f \in \mathcal{E}(a, b)$ se cumple que*

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) v_n$$

Además, si es cierto que

$$(5) \quad f = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n v_n$$

para ciertos coeficientes $\{\mu_n\}_{n=1}^{+\infty}$, necesariamente

$$\mu_n = c_n(f), \quad n \geq 1.$$

- c) *Para toda función $f \in \mathcal{E}(a, b)$ se cumple que*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \cdot \|v_n\|^2.$$

d) Para todo par de funciones $f, g \in \mathcal{E}(a, b)$ se cumple que

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)} \cdot \|v_n\|^2.$$

Comentarios

1. El mensaje del teorema es claro: en un sistema ortogonal y completo los cálculos con las funciones se llevan a cabo, por coordenadas, exactamente igual que con los vectores en una base ortogonal en dimensión finita.
2. La parte b) es muy importante. Afirma que toda función se puede desarrollar en un sistema completo y da las expresiones para los coeficientes (que son únicos). Se dice que $c_n(f)$ es el coeficiente n -ésimo de f en dicho sistema. Observemos que la expresión para $c_n(f)$ es de total sentido común: como en dimensión finita, multiplicando en ambos miembros de (5) por v_n y usando la ortogonalidad se deduce la expresión para $\mu_n = c_n(f)$. Así, la manera de calcular los coeficientes $c_n(f)$ será usando (4). Hay pues que memorizar (4) o, preferiblemente, retener el razonamiento de su deducción.
3. Notemos que si el sistema no fuera ortogonal, aunque fuera cierto que una función se pudiera desarrollar en el mismo, sería muy difícil, sino imposible, obtener los coeficientes del desarrollo.
4. La parte c) afirma que en los sistemas completos la desigualdad de Bessel se convierte en igualdad. Notemos que c) es el Teorema de Pitágoras (con infinitos catetos) aplicado a b). La igualdad c) se llama identidad de Parseval.
5. El apartado final d) afirma que el producto escalar de funciones se calcula como el de vectores (sumando las componentes del primer vector multiplicadas por las conjugadas de las componentes del segundo). Cuando las funciones son iguales, de d) se recupera c). La igualdad en d) se llama identidad de Plancherel.
6. No damos la demostración del teorema, pero sí una reflexión sobre la necesidad de la completitud del sistema: si el sistema no fuera completo, existiría una función $f \neq 0$, $f \in \mathcal{E}(a, b)$, tal que

$$\langle f, v_n \rangle = 0, \quad n \geq 1.$$

Obviamente, para dicha función $c_n(f) = 0$, $n \geq 1$, y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)v_n = 0 \neq f,$$

es decir, el sistema no sería capaz de reproducir f .

También es interesante destacar que la convergencia de las series, en el sentido de la media cuadrática,

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)v_n, \quad f \in \mathcal{E}(a, b),$$

ha de ser incondicional, esto es, independiente de la ordenación. La razón es clara, pues reordenar un sistema ortogonal completo nos lleva a otro sistema completo y, dada la expresión para los coeficientes, esto equivale a reordenar la serie. En relación con este punto hay una sutileza: en general estas series no convergen puntualmente y, si lo hacen, la convergencia puede ser condicional.

2 Problemas de Sturm–Liouville

2.1 Motivación

En las próximas lecciones vamos a estudiar diversas ecuaciones en derivadas parciales (EDPs), cuya resolución efectiva se hará fundamentalmente mediante la llamada técnica de separación de variables. Dicha técnica está basada en buscar soluciones como superposición de funciones con las variables separadas. En la búsqueda de estas funciones es necesario plantear el estudio de los llamados problemas de autovalores o de Sturm-Liouville. La conexión con la sección anterior viene del hecho de que la resolución de estos problemas proporciona sistemas ortogonales completos. Un ejemplo motivará el contenido de la sección.

Para fijar ideas nos vamos a centrar en la ecuación de difusión en un intervalo finito $[a, b]$:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Para determinar la solución hay que imponer una condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b$$

(por tanto $u_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es conocida) y condiciones de contorno (por sencillez homogéneas) del tipo

$$\begin{cases} h_a u(a, t) - k_a u_x(a, t) = 0, \\ h_b u(b, t) + k_b u_x(b, t) = 0, \end{cases}$$

con $h_a, k_a, h_b, k_b \geq 0$, $h_a + k_a > 0$, $h_b + k_b > 0$. Estas condiciones incluyen como casos particulares:

- Las condiciones Dirichlet (D) ($k_a = k_b = 0$).
- Las condiciones Neumann (N) ($h_a = h_b = 0$).
- Cuando $h_a k_a > 0$ y $h_b k_b > 0$ hablamos de condiciones de tipo Robin (R).

Por descontado, son frecuentes situaciones mixtas (en cada extremo de un tipo distinto). Todos estos tipos de condiciones de contorno se denominan separadas. Otras condiciones habituales son las llamadas periódicas

$$\begin{cases} u(b, t) - u(a, t) = 0, \\ u_x(b, t) - u_x(a, t) = 0, \end{cases}$$

que surgen en dominios circulares.

Se comienza buscando soluciones simples, en forma de funciones de variables separadas

$$(6) \quad X(x)T(t), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0,$$

donde $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $T : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ (se admiten funciones complejas).

Para una de estas soluciones su condición inicial es simplemente

$$X(x)T(0), \quad a \leq x \leq b.$$

Sin pérdida de generalidad normalizamos $T(\cdot)$ por $T(0) = 1$, de suerte que la condición inicial será X . Naturalmente esta condición inicial no es la del problema de partida, pero de momento sólo estamos buscando soluciones simples de la ecuación. Más adelante, combinando éstas, ajustaremos el dato inicial u_0 .

Llevando la expresión (6) a la ecuación diferencial encontramos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0.$$

(el símbolo ' se usa con un doble sentido, derivada respecto de t o de x , pero no hay confusión pues se aplica a funciones de una sola variable). Suponiendo que $X(x)T(t) \neq 0$, podemos dividir ambos miembros y encontramos

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0.$$

Ahora bien, como el primer miembro es una función exclusiva de la variable t y el segundo lo es de la variable x , la única opción será que ambos miembros sean iguales a cierta constante común $\lambda \in \mathbb{C}$, es decir

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0,$$

o bien

$$T'(t) = \lambda T(t), \quad t \geq 0; \quad X''(x) = \lambda X(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Ahora notamos que aunque el producto $X(x)T(t)$ se anule, cada par de funciones $T(t)$ y $X(x)$ satisfaciendo las ecuaciones anteriores para algún valor de λ da origen a una solución $X(x)T(t)$ de la ecuación de difusión.

Observamos que la función T se obtiene inmediatamente:

$$T(t) = e^{\lambda t} T(0) = e^{\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Un punto muy importante es que para calcular X no podemos utilizar cualquier valor de λ . En efecto, las condiciones de contorno serán

$$\begin{cases} h_a X(a)T(t) - k_a X'(a)T(t) &= T(t) (h_a X(a) - k_a X'(a)) = 0, \\ h_b X(b)T(t) + k_b X'(b)T(t) &= T(t) (h_b X(b) + k_b X'(b)) = 0, \end{cases}$$

o bien (puesto que ya sabemos que $T(t) \neq 0$)

$$(7) \quad \begin{cases} h_a X(a) - k_a X'(a) &= 0, \\ h_b X(b) + k_b X'(b) &= 0. \end{cases}$$

En el caso periódico encontramos análogamente

$$(8) \quad \begin{cases} X(b) - X(a) &= 0, \\ X'(b) - X'(a) &= 0. \end{cases}$$

Así pues para la función X hay que imponer la ecuación diferencial de segundo orden

$$(9) \quad X''(x) = \lambda X(x), \quad a \leq x \leq b,$$

y las condiciones de contorno (7) o bien (8). Resulta que, generalmente, para un $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrario, la única solución de (9) que cumple (7) o (8) es la función nula $X = 0$. Esta solución trivial no permite avanzar en la búsqueda de soluciones de la ecuación de difusión. Por tanto nos planteamos el siguiente objetivo:

Obtener aquellos valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales existe una solución no trivial de (9) satisfaciendo ya sea (7) o (8). Una vez obtenido λ calcularemos las correspondientes soluciones $X \neq 0$.

El problema anterior es el llamado problema de Sturm–Liouville (PSL).

2.2 PSLs para el operador derivada segunda X''

Sea el problema de Sturm–Liouville (PSL) para el operador X''

$$(10) \quad X''(x) = \lambda X(x), \quad a \leq x \leq b,$$

(los extremos a y b son finitos) bajo condiciones de contorno ya sean separadas

$$(11) \quad \begin{cases} h_a X(a) - k_a X'(a) = 0, \\ h_b X(b) + k_b X'(b) = 0, \end{cases}$$

o bien periódicas

$$(12) \quad \begin{cases} X(b) - X(a) = 0, \\ X'(b) - X'(a) = 0. \end{cases}$$

Se llama autovalor del PSL a todo número $\lambda \in \mathbb{C}$ para el cual existe una solución $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ no trivial del mismo. Cuando λ sea un autovalor, llamamos autofunción asociada a toda solución X (incluyendo la función nula). El conjunto de todos los autovalores forma el denominado espectro del PSL.

Hay que insistir en el hecho de que aunque mantengamos fijo el operador diferencial (en esta sección $X \rightarrow X''$), consideramos una gama amplia de condiciones de contorno. Distintas condiciones de contorno dan lugar a distintos PSL y autovalores y autofunciones.

2.2.1 Propiedades espectrales de los PSL

1. Simetría. La primera propiedad importante es la simetría del operador $X \rightarrow X''$ cuando se considera bajo las condiciones de contorno. Sean pues $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones que admiten derivada segunda continua (bastaría que las derivadas segundas fueran cuadrado integrables) y satisfaciendo las condiciones de contorno

(11) o (12) (ambas funciones satisfacen el mismo tipo de condiciones de contorno). Entonces se cumple que

$$(13) \quad \langle u'', v \rangle = \langle u, v'' \rangle.$$

(Si las funciones no comparten las mismas condiciones de contorno, entonces (13) puede no ser cierta.) Se dirá que el operador $X \rightarrow X''$, restringido a actuar sobre funciones que cumplen las condiciones de contorno, es hermítico (también, en ocasiones, que es simétrico o autoadjunto).

Demostración. Para demostrar esta importante propiedad la idea que se utiliza es simplemente integración por partes. En efecto, por un lado

$$\langle u'', v \rangle = \int_a^b u''(x)\overline{v(x)} dx = u'(x)\overline{v(x)}\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)\overline{v'(x)} dx$$

y por el otro

$$\langle u, v'' \rangle = \int_a^b u(x)\overline{v''(x)} dx = u(x)\overline{v'(x)}\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)\overline{v'(x)} dx,$$

de suerte que

$$\langle u'', v \rangle - \langle u, v'' \rangle = u'(x)\overline{v(x)}\Big|_{x=a}^{x=b} - u(x)\overline{v'(x)}\Big|_{x=a}^{x=b},$$

y siendo el segundo miembro

$$u'(b)\overline{v(b)} - u'(a)\overline{v(a)} - \left(u(b)\overline{v'(b)} - u(a)\overline{v'(a)} \right),$$

deducimos la llamada identidad o fórmula de Green

$$(14) \quad \langle u'', v \rangle - \langle u, v'' \rangle = \begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}'(a) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ \bar{v}(b) & \bar{v}'(b) \end{vmatrix}.$$

Esta identidad es válida incluso si la funciones u y v no cumplen las condiciones de contorno. Supongamos ahora que u y v realmente cumplen las condiciones de contorno. Si éstas son periódicas, entonces ambos determinantes en (14) coinciden, por lo que su diferencia será nula. Si las condiciones son Dirichlet o Neumann en un extremo, el correspondiente determinante en (14) tiene una columna nula, por lo que se anulará. Para condiciones separadas generales, observemos que

$$\begin{bmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}'(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_a \\ -k_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(b) & u'(b) \\ \bar{v}(b) & \bar{v}'(b) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_b \\ k_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y siendo $(h_a, -k_a) \neq (0, 0)$, $(h_b, k_b) \neq (0, 0)$, se deduce que cada determinante es nulo, pues cada sistema es homogéneo y tiene solución no trivial.

2. Negatividad. Vamos a ver primero que si $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una función dos veces diferenciable con continuidad y cumple las condiciones de contorno homogéneas (de cualquiera de los tipos (11) o (12)), entonces

$$\langle u'', u \rangle \leq 0.$$

De hecho, integrando por partes con $v = u$ tal y como hicimos al establecer la fórmula de Green, obtenemos

$$\langle u'', u \rangle = u'(x)\overline{u(x)}\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)\overline{u'(x)} dx = I(u) + II(u),$$

donde

$$I(u) = u'(b)\overline{u(b)} - u'(a)\overline{u(a)}, \quad II(u) = - \int_a^b u'(x)\overline{u'(x)} dx.$$

Por una parte, claramente

$$II(u) = - \int_a^b |u'(x)|^2 dx \leq 0.$$

Por otra, notemos que $I(u)$ es nula para condiciones periódicas y que cada sumando de $I(u)$ es nulo para condiciones Dirichlet o Neumann. Para condiciones Robin observamos que

$$u'(a) = (h_a/k_a)u(a), \quad u'(b) = -(h_b/k_b)u(b),$$

luego

$$I(u) = -(h_b/k_b)u(b)\overline{u(b)} - (h_a/k_a)u(a)\overline{u(a)} = -(h_b/k_b)|u(b)|^2 - (h_a/k_a)|u(a)|^2 \leq 0.$$

(Si las condiciones son mixtas Dirichlet o Neumann en un extremo y Robin en el otro, el último razonamiento sólo se aplica al extremo con condición Robin).

Para terminar con la negatividad, supongamos que tuviéramos

$$\langle u'', u \rangle = 0$$

para cierta u como antes, esto es, satisfaciendo las condiciones de contorno homogéneas. Observamos que al ser

$$\langle u'', u \rangle = I(u) + II(u)$$

la suma de dos términos negativos, necesariamente

$$I(u) = II(u) = 0.$$

Ahora bien,

$$II(u) = - \int_a^b |u'(x)|^2 dx = 0$$

implica que $u'(x) = 0$, $a \leq x \leq b$, pues el integrando mantiene el signo constante. Por lo tanto u ha de ser constante. En resumen, hemos visto que si

$$\langle u'', u \rangle = 0$$

entonces u ha de ser constante. Pongamos $u = C$. Ahora estudiamos los posibles valores de C .

Si las condiciones son de tipo Dirichlet en alguno de los extremos, entonces claramente $C = 0$ (pues por ejemplo $C = u(a) = 0$). Igualmente, si una condición fuera de tipo Robin, pongamos en a por concretar, también tendríamos

$$C = u(a) = (k_a/h_a)u'(a) = 0,$$

pues u' es idénticamente nula. Por lo tanto, para condiciones Dirichlet o Robin en algún extremo va a suceder que la forma cuadrática es definida (sólo se anula para la función idénticamente cero).

En cambio, tanto para condiciones periódicas como las Neumann (ahora en ambos extremos), las funciones constantes $u = C$ cumplen las condiciones de contorno. De este modo, la igualdad

$$\langle u'', u \rangle = 0,$$

tiene soluciones no nulas sólo en el caso de condiciones Neumann en ambos extremos o de condiciones periódicas. En ambas situaciones, las soluciones son constantes.

2.2.2 Teorema espectral

Pasamos a enunciar el fundamental teorema espectral de la teoría de los PSL.

Teorema 2 *Mantengamos las hipótesis y notación anteriores. Se cumplen:*

- 1) *Todos los autovalores del PSL son reales y menores o iguales a 0. El autovalor 0 sólo puede surgir para condiciones periódicas o Neumann (en ambos extremos), en cuyo caso las autofunciones asociadas son las funciones constantes.*

2) Si $\lambda \neq \lambda^*$ son dos autovalores distintos del PSL y si $u, u^* \rightarrow \mathbb{C}$ son sendas autofunciones asociadas, entonces u y u^* son ortogonales, es decir

$$\langle u, u^* \rangle = 0.$$

3) Los autovalores del PSL no se pueden acumular. De hecho se pueden numerar en forma de una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$ decreciente ($\lambda_{n+1} \leq \lambda_n$, $n \geq 1$) con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = -\infty.$$

4) Existe un sistema ortogonal y completo formado por autofunciones del PSL.

Demostración parcial.

1) Sea λ un autovalor y sea $u : I \rightarrow \mathbb{C}$ una autofunción no trivial asociada. Entonces

$$\langle u'', u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \lambda \|u\|^2,$$

luego

$$\lambda = \frac{\langle u'', u \rangle}{\|u\|^2}.$$

Como u cumple las condiciones de contorno homogéneas, tendremos, de la propiedad de negatividad

$$\langle u'', u \rangle \leq 0,$$

y deducimos que λ es real y negativo. Además, la posibilidad $\lambda = 0$ implicaría

$$\langle u'', u \rangle = 0,$$

y recordando la discusión anterior, se deduce la última parte del enunciado.

2) Ya sabemos que λ y λ^* son reales. Por hipótesis y usando la simetría (tanto u como u^* cumplen las condiciones de contorno homogéneas), tenemos

$$\lambda \cdot \langle u, u^* \rangle = \langle u'', u^* \rangle = \langle u, (u^*)'' \rangle = \overline{\lambda^*} \cdot \langle u, u^* \rangle = \lambda^* \cdot \langle u, u^* \rangle,$$

luego

$$(\lambda - \lambda^*) \cdot \langle u, u^* \rangle = 0,$$

lo que implica

$$\langle u, u^* \rangle = 0,$$

pues $\lambda \neq \lambda^*$.

Las demostraciones de 3) y 4) quedan fuera de los objetivos de la lección. \square

Notemos que para un autovalor λ las autofunciones son las soluciones de la EDO de segundo orden

$$u''(x) = \lambda u(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Por lo tanto la dimensión del espacio de autofunciones asociadas a λ será uno o dos. En la práctica, si los autovalores son conocidos, para cada uno de ellos seleccionamos una autofunción no trivial (si el autovalor fuera simple) o bien dos (si el autovalor fuera doble), si bien en este caso hay que tener la precaución de tomar el par de autofunciones mutuamente ortogonales. La reunión de tales autofunciones forma un sistema ortogonal y completo de autofunciones.

3 Series de Fourier trigonométricas

Los resultados de esta sección son esenciales para el resto de la asignatura. Vamos a estudiar las series de Fourier siguiendo el mismo camino según el cual fueron introducidas históricamente, a partir de los PSL. Las series de Fourier son de interés en otros contextos (Teoría de la Señal, por ejemplo), donde se pueden introducir de manera distinta.

Como comentario general, podemos decir que la teoría de las series de Fourier trigonométricas trata de representar, en algún sentido, funciones (señales) mediante series de senos, cosenos, o senos y cosenos. Esta representación puede permitir, entre otras cosas, identificar una serie de elementos en la señal que en otros tipos de representaciones no están tan claros. Estos elementos son muy útiles no sólo para identificar la señal, sino también para almacenarla (algo muy importante) transmitirla, manipularla, recuperarla, etc.

Consideremos el PSL (10), bajo condiciones de contorno Dirichlet (D), Neumann (N) y periódicas (P). Estos PSL son muy frecuentes en el estudio de las EDP y conviene memorizar las autofunciones y sus correspondientes autovalores.

En cualquiera de los tres casos sabemos, del teorema espectral, que los posibles autovalores son no positivos, por lo que vamos a escribir

$$\lambda = -\omega^2, \quad \omega \geq 0.$$

Además, el autovalor $\lambda = 0$ sólo ocurre para las condiciones N y P, con autofunción asociada constante. Por ello bastará que nos centremos en $\omega > 0$. Entonces la ecuación (10) se convierte en

$$X''(x) + \omega^2 X(x) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

cuya solución general es

$$X(x) = E \sin \omega(x - a) + F \cos \omega(x - a), \quad E, F \in \mathbb{C}.$$

Para uso futuro, notemos que

$$X'(x) = E\omega \cos \omega(x - a) - F\omega \sin \omega(x - a).$$

Vamos a denotar $L = b - a$.

3.1 Autovalores y autofunciones

3.1.1 Condiciones Dirichlet

Al imponer las condiciones de contorno D, $X(a) = X(b) = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} X(a) &= F = 0, \\ X(b) &= E \sin \omega L = 0. \end{aligned}$$

Para que λ sea autovalor es necesario que el sistema anterior tenga solución no trivial, luego

$$\sin \omega = 0 \Leftrightarrow \omega = k\pi/L, \quad k = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, hemos encontrado una sucesión de autovalores

$$\lambda_k = -\pi^2 k^2 / L^2,$$

con autofunciones generadas por

$$S_k(x) = \sin \left(\frac{k\pi(x - a)}{L} \right),$$

donde $k \geq 1$ es entero. Recordemos que 0 no era autovalor.

3.1.2 Condiciones Neumann

Ahora hemos de imponer $X'(a) = X'(b) = 0$, es decir

$$\begin{aligned} X'(a) &= E = 0, \\ X'(b) &= -\omega F \sin \omega L = 0. \end{aligned}$$

Este sistema tiene solución no trivial sii

$$\sin \omega = 0 \Leftrightarrow \omega = k\pi/L, \quad k = 1, 2, \dots$$

Como $\lambda = 0$ también es autovalor, llegamos a que los autovalores son

$$\lambda_k = -\pi^2 k^2 / L^2,$$

con autofunciones generadas

$$C_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi(x-a)}{L}\right),$$

donde $k \geq 0$ es entero.

3.1.3 Condiciones periódicas

Exijamos que $X(b) - X(a) = 0$ y $X'(b) - X'(a) = 0$,

$$\begin{aligned} X(b) - X(a) &= E \sin \omega L + F \cos \omega L - F = 0, \\ X'(b) - X'(a) &= E\omega \cos \omega L - F\omega \sin \omega L - E\omega = 0, \end{aligned}$$

sistema que (siendo $\omega > 0$) es equivalente a

$$\begin{bmatrix} \sin \omega L & \cos \omega L - 1 \\ \cos \omega L - 1 & -\sin \omega L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Este sistema tiene solución no trivial si y sólo si

$$\sin^2 \omega L + (\cos \omega L - 1)^2 = 0,$$

lo que implica

$$\sin \omega L = 0, \quad \cos \omega L = 1 \Leftrightarrow \omega L = 2k\pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

Además, cuando λ es autovalor, la matriz del sistema se anula y podemos tomar libremente E y F . Se trata pues de autovalores dobles y tomaremos la base formada por el seno y el coseno.

En resumen, llegamos a que los autovalores no nulos son

$$\lambda_k = -4\pi^2 k^2 / L^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

con autofunciones generadas por

$$S_{2k}(x) = \sin\left(\frac{2k\pi(x-a)}{L}\right), \quad C_{2k}(x) = \cos\left(\frac{2k\pi(x-a)}{L}\right),$$

donde $k \geq 1$ es entero. Además, tenemos el autovalor $\lambda_0 = 0$ con autofunción $C_0(x)$.

Para valores distintos de k las autofunciones son ortogonales. Pero también, para un valor dado de k , se comprueba que las autofunciones $S_{2k}(x)$ y $C_{2k}(x)$ son ortogonales entre sí. Por tanto el sistema anterior es ortogonal y completo.

Otras alternativas, para el caso periódico, son:

- La forma compleja

$$e_k(x) = \exp\left(\frac{2\pi ik(x-a)}{L}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

La autofunción e_0 viene asociada a $\lambda_0 = 0$ y, para $k \geq 1$, e_k y e_{-k} están asociadas a $\lambda_k = -4\pi^2 k^2 / L^2$.

- Sea $c = (a+b)/2$ el punto medio del intervalo $[a, b]$, entonces

$$\tilde{S}_{2k}(x) = \sin\left(\frac{2k\pi(x-c)}{L}\right), \quad \tilde{C}_{2k}(x) = \cos\left(\frac{2k\pi(x-c)}{L}\right),$$

donde $k \geq 1$ es entero, junto con $\tilde{C}_0(x) = 1$, es otro sistema completo de autofunciones.

- De la misma forma, también podemos trabajar con

$$\tilde{e}_k(x) = \exp\left(\frac{2\pi ik(x-c)}{L}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3.2 Desarrollos ortogonales

En cualquiera de los ejemplos anteriores, el Teorema 2 garantiza que el sistema ortogonal de autofunciones es completo. Por tanto, dada una función $u \in \mathcal{E}(a, b)$, ésta se puede desarrollar en cada uno de dichos sistemas. Así encontramos:

Desarrollos de Fourier en senos. Usando las autofunciones del caso D,

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi(x-a)}{L}\right),$$

con

$$\beta_k = \frac{\langle u, S_k \rangle}{\|S_k\|^2} = \frac{2}{L} \int_a^b u(\xi) \sin\left(\frac{k\pi(\xi-a)}{L}\right) d\xi, \quad k \geq 1.$$

Desarrollos de Fourier en cosenos. Usando las autofunciones del caso N,

$$u(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi(x-a)}{L}\right),$$

con

$$\alpha_0 = \frac{\langle u, C_0 \rangle}{\|C_0\|^2} = \frac{1}{L} \int_a^b u(\xi) d\xi$$

y

$$\alpha_k = \frac{\langle u, C_k \rangle}{\|C_k\|^2} = \frac{2}{L} \int_a^b u(\xi) \cos\left(\frac{k\pi(\xi-a)}{L}\right) d\xi, \quad k \geq 1.$$

Desarrollos de Fourier en senos y cosenos. Usando ahora las autofunciones del caso P,

$$u(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k \cos\left(\frac{2k\pi(x-a)}{L}\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2k\pi(x-a)}{L}\right) \right),$$

donde

$$\alpha_0 = \frac{\langle u, C_0 \rangle}{\|C_0\|^2} = \frac{1}{L} \int_a^b u(\xi) d\xi,$$

$$\alpha_k = \frac{\langle u, C_{2k} \rangle}{\|C_{2k}\|^2} = \frac{2}{L} \int_a^b u(\xi) \cos\left(\frac{2k\pi(\xi-a)}{L}\right) d\xi, \quad k \geq 1,$$

y

$$\beta_k = \frac{\langle u, S_{2k} \rangle}{\|S_{2k}\|^2} = \frac{2}{L} \int_a^b u(\xi) \sin\left(\frac{k\pi(\xi-a)}{L}\right) d\xi, \quad k \geq 1.$$

Desarrollos de Fourier en exponenciales.

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k \exp\left(\frac{2\pi ik(x-a)}{L}\right),$$

donde

$$\gamma_k = \frac{\langle u, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} = \frac{1}{L} \int_a^b u(\xi) \exp\left(\frac{-2\pi ik(\xi-a)}{L}\right) d\xi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Puede comprobarse que la relación entre los coeficientes $\gamma_k, \alpha_k, \beta_k$ se obtiene a partir de las fórmulas de Euler

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad t \in \mathcal{R}.$$

De manera que

$$(15) \quad \gamma_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad \gamma_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}, \quad \gamma_{-k} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

o bien

$$(16) \quad \begin{aligned} \alpha_k &= \gamma_k + \gamma_{-k}, & k = 0, 1, 2, \dots \\ \beta_k &= i(\gamma_k - \gamma_{-k}), & k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En todos los casos, se debe entender que las sumas parciales de las series convergen hacia u en el sentido de la media cuadrática, esto es, de la norma euclídea (Teorema 1). Se trata de una convergencia incondicional (podemos reordenar las series). Es importante destacar que la función u a desarrollar no tiene por qué ser continua. Puede ser discontinua, incluso con singularidades. Lo esencial es que sea cuadrado sumable, es decir

$$\int_a^b |u(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

Observemos que los coeficientes de los desarrollos se obtienen de forma inmediata, sin más que multiplicar escalarmente por las autofunciones.

3.3 Convergencia puntual de las series trigonométricas.

Otro aspecto importante de las series trigonométricas es la convergencia puntual. Como ya señalamos la convergencia puntual de las series ortogonales puede ser condicional. De hecho, en general las series trigonométricas no convergen en todos los puntos y cuando lo hacen es condicionalmente. Por este motivo hay que fijar el orden, que se supondrá es el natural. En este sentido, se tiene el resultado siguiente:

Teorema 3 *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortogonal y completo de autofunciones del PSL para la derivada segunda. Sea $u \in \mathcal{E}(a, b)$ que es C^1 a trozos (es decir, derivable con continuidad salvo en un conjunto finito de puntos) y*

$$u = \sum_n c_n X_n,$$

el desarrollo ortogonal de u con coeficientes

$$c_n = \frac{\langle f, X_n \rangle}{\|X_n\|^2}$$

Entonces, para $x \in [a, b]$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) = \frac{1}{2}(u(x+) + u(x-)),$$

donde

$$u(x+) = \lim_{y \rightarrow x, y > x} u(y), \quad u(x-) = \lim_{y \rightarrow x, y < x} u(y).$$

Es decir, si u es C^1 a trozos, entonces su serie de Fourier converge hacia $u(x)$ en los puntos x de continuidad de u y hacia $(u(x+) + u(x-))/2$ en los puntos de discontinuidad.

Cuando x sea un punto extremo (a ó b) la función u que hay que tomar es siempre una prolongación impar en los extremos (series de senos), una prolongación par en los extremos (series de cosenos) o bien una prolongación periódica (series de senos y cosenos).

Ejemplo 5. Para $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{R}$, $f(x) = x$, la serie de Fourier de senos y cosenos tiene por coeficientes

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0, \\ \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(k(x + \pi)) dx = 0, \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(k(x + \pi)) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-x \cos(k(x + \pi))}{k} + \frac{\sin(k(x + \pi))}{k^2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(x) = x &\approx 2(\sin(x + \pi) - \frac{\sin(2(x + \pi))}{2} + \frac{\sin(3(x + \pi))}{3} \\ &+ \dots + \frac{1}{k} \sin(k(x + \pi)) + \dots) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k(x + \pi)). \end{aligned}$$

Utilizando las fórmulas (15)-(17) y los cálculos hechos anteriormente, se tiene, alternativamente

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0, \\ \gamma_k &= \frac{-i}{2} \beta_k = \frac{-i}{k}, \\ \gamma_{-k} &= \frac{i}{2} \beta_k = \frac{i}{k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Entonces

$$f(x) = x \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-i}{k} (-1)^{k+1} e^{ik(x+\pi)}.$$

En referencia a la convergencia puntual, nótese que puesto que f es continua en $(-\pi, \pi)$, entonces, para x en dicho intervalo

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(k(x + \pi)).$$

Cuando $x = \pm\pi$, cada término de la serie es nulo.

Ejemplo 6. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. La serie de Fourier de senos y cosenos tiene por coeficientes

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}, \\ \alpha_k &= \int_{-1}^1 f(x) \cos(\pi k(x+1)) dx = -\frac{2}{(k\pi)^2} (1 - (-1)^k), \\ \beta_k &= \int_{-1}^1 f(x) \sin(\pi k(x+1)) dx = 0. \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos(\pi(x+1)) + \frac{1}{9} \cos(3\pi(x+1)) \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi(x+1)) + \dots \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 7. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{R}$, $f(x) = |x|$. La serie de Fourier de senos y cosenos tiene por coeficientes

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \\ \alpha_k &= \int_{-1}^1 f(x) \cos(\pi k(x+1)) dx = -\frac{2}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1), \\ \beta_k &= \int_{-1}^1 f(x) \sin(\pi k(x+1)) dx = 0. \end{aligned}$$

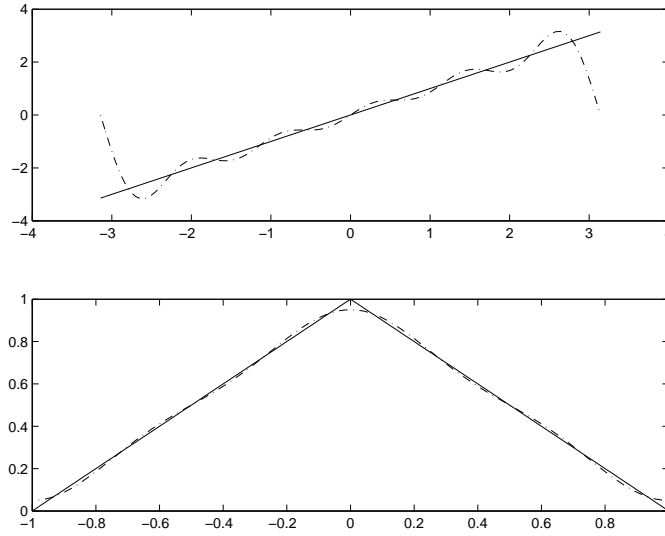


Figura 2: Gráficas de las funciones y sumas parciales de la serie de Fourier para los ejemplos (1) y (2).

Por tanto

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(\cos(\pi(x+1)) + \frac{1}{9} \cos(3\pi(x+1)) + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi(x+1)) + \dots \right).$$

Ejemplo 8. Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$. En este caso, los coeficientes de la serie de Fourier de senos y cosenos son

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{4}, \\ \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(k(x+\pi)) dx = -\frac{1}{\pi k^2} ((-1)^k - 1), \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(k(x+\pi)) dx = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

De modo que

$$f(x) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left(\cos(x+\pi) + \frac{1}{9} \cos(3(x+\pi)) \right)$$

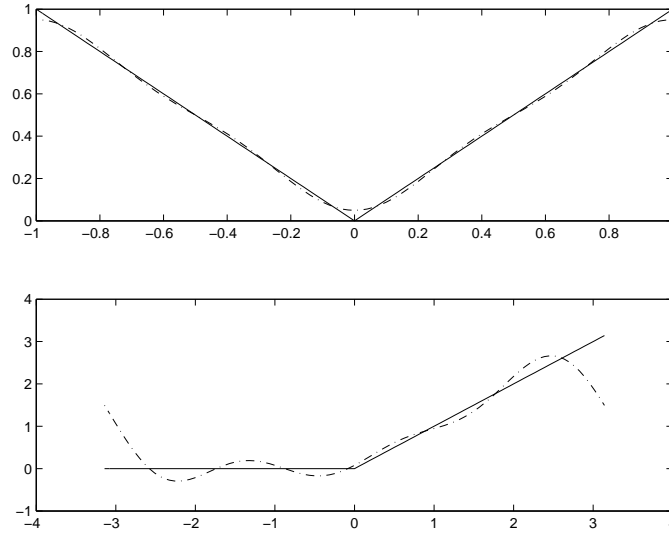


Figura 3: Gráficas de las funciones y sumas parciales de la serie de Fourier para los ejemplos (3) y (4).

$$\begin{aligned}
 & + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)(x+\pi)) + \dots \Big) + (\sin(x+\pi) \\
 & + \frac{\sin(2(x+\pi))}{2} + \frac{\sin(3(x+\pi))}{3} + \dots + \frac{1}{k} \sin(k(x+\pi)) + \dots).
 \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$. En este caso, se tiene

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ik(x+\pi)} dx = \begin{cases} 1/2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \text{ es par} \\ \frac{(-1)^k}{ik\pi} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Entonces

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2k+1)i(x+\pi)}}{2k+1}.$$

La correspondiente representación en senos y cosenos, utilizando (17), es

$$f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)(x+\pi)).$$

Según el Teorema 3, si $x \in (-\pi, 0)$

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)(x+\pi)).$$

Y si $x \in (0, \pi)$,

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)(x+\pi)).$$

Para $x = 0$, la serie converge a $(f(0+) + f(0-))/2 = 1/2$ y si $x = \pm\pi$, la serie converge a $(f(-\pi+) + f(\pi-))/2 = 1/2$ (en los tres casos, todos los términos en el sumatorio se anulan).

Ejemplo 10. Sea $f : [0, \pi] \rightarrow \mathcal{R}$, $f(x) = x$. La serie de Fourier de senos de f en $[0, \pi]$ es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx),$$

con (compruébese)

$$\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ejemplo 11. Consideremos la función del ejemplo 5, $f : [0, \pi] \rightarrow \mathcal{R}$, $f(x) = x$. La serie de Fourier de cosenos de f en $[0, \pi]$ es

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx),$$

con (compruébese) $\alpha_0 = \pi/2$ y si $k \neq 0$,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2n \\ \frac{4}{\pi(2n+1)^2} & \text{si } k = 2n+1 \end{cases}$$

4 Algunas extensiones

Toda la teoría precedente se extiende a PSL ligados a un operador diferencial de segundo orden

$$L[\varphi] := A(\xi)\varphi''(\xi) + B(\xi)\varphi'(\xi) + C(\xi)\varphi(\xi) = \lambda\varphi(\xi)$$

con coeficientes $A, B, C : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuos en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, con $A(\xi) > 0$, para todo $\xi \in I$. Subrayemos que los coeficientes son funciones reales, si bien las soluciones podrían ser complejas. Las condiciones de contorno son las mismas (separadas o periódicas, si bien en el caso periódico hay que suponer además que $A(a) = A(b)$).

El operador se dice formalmente autoadjunto cuando

$$A'(\xi) = B(\xi), \quad a \leq \xi \leq b,$$

en cuyo caso se puede escribir

$$L[\varphi] = (A(\xi)\varphi'(\xi))' + C(\xi)\varphi(\xi) = \lambda\varphi(\xi).$$

Pues bien, la estructura autodjunta permite llevar a cabo la integración por partes como en la situación del operador derivada segunda X'' y se puede demostrar que el teorema espectral se mantiene idéntico para operadores formalmente autoadjuntos. La única salvedad es que en general los autovalores están acotados superiormente por $\max C(\xi)$ y un número finito de ellos podrían ser positivos. Cuando $C \leq 0$, la forma cuadrática es de nuevo negativa y los autovalores son negativos.

Si el operador no es formalmente autoadjunto, se puede demostrar que existe un función $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} > 0$ tal que

$$\rho L[\varphi] := \rho(\xi)A(\xi)\varphi''(\xi) + \rho(\xi)B(\xi)\varphi'(\xi) + \rho(\xi)C(\xi)\varphi(\xi)$$

es formalmente autoadjunto. El PSL se lee ahora

$$\rho L[\varphi] = \lambda\rho\varphi,$$

junto con las condiciones de contorno. La teoría espectral sigue siendo válida, pero con una nueva salvedad: el sistema de autofunciones es ortogonal y completo, pero respecto del producto interno con peso ρ , que se define como

$$\langle u, v \rangle_\rho = \int_a^b u(x)\bar{v}(x)\rho(x) dx.$$

4.1 Problemas de Sturm–Liouville singulares

En ciertas ocasiones se presentan problemas de la forma

$$L[\varphi] := A(\xi)\varphi''(\xi) + B(\xi)\varphi'(\xi) + C(\xi)\varphi(\xi) = \lambda\varphi(\xi)$$

con coeficientes $A, B, C : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuos y con $A(\xi) > 0$, para todo $a < \xi < b$, pero con puntos singulares en los extremos, es decir, $A(a) = 0$ ó $A(b) = 0$ (o bien ambos). El planteamiento de estos PSL requiere ciertas modificaciones, referentes a las condiciones de contorno a imponer en el o los puntos singulares. Aquí vamos a considerar las condiciones de contorno separadas (D, N, R) habituales, en un extremo donde $A > 0$, y condiciones de finitud (F) en los extremos donde A se anule, según el esquema siguiente.

- Si $A(a) > 0$, imponemos una condición habitual

$$\Lambda_1[\varphi] = h_a\varphi(a) - k_a\varphi'(a) = 0$$

($h_a \geq 0, k_a \geq 0, h_a + k_a > 0$). En cambio, si $A(a) = 0$, impondremos que $|\varphi(\xi)|$ permanezca acotada cuando $\xi \rightarrow a+$ y que

$$\Lambda_1[\varphi] = \lim_{\xi \rightarrow a+} A(\xi)\varphi'(\xi) = 0.$$

- Si $A(b) > 0$, imponemos una condición

$$\Lambda_1[\varphi] = h_b\varphi(b) + k_b\varphi'(b) = 0$$

($h_b \geq 0, k_b \geq 0, h_b + k_b > 0$). En cambio, si $A(b) = 0$, impondremos que $|\varphi(\xi)|$ permanezca acotada cuando $\xi \rightarrow b-$ y que

$$\Lambda_2[\varphi] = \lim_{\xi \rightarrow b-} A(\xi)\varphi'(\xi) = 0.$$

	$A(a) > 0$	$A(a) = 0$
$A(b) > 0$	$h_a\varphi(a) - k_a\varphi'(a) = 0$ $h_b\varphi(b) + k_b\varphi'(b) = 0$	$ \varphi(x) $ acotada si $x \rightarrow a+$ $\lim_{x \rightarrow a+} A(x)\varphi'(x) = 0$ $h_b\varphi(b) + k_b\varphi'(b) = 0$
$A(b) = 0$	$h_a\varphi(a) - k_a\varphi'(a) = 0$ $ \varphi(x) $ acotada si $x \rightarrow b-$ $\lim_{x \rightarrow b-} A(x)\varphi'(x) = 0$	$ \varphi(x) $ acotada si $x \rightarrow a+, x \rightarrow b-$ $\lim_{x \rightarrow a+} A(x)\varphi'(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow b-} A(x)\varphi'(x) = 0$

Se puede comprobar que, bajo estas condiciones, se mantienen las propiedades espectrales del correspondiente PSL, en particular la existencia de un sistema ortogonal y completo formado por autofunciones. Si el operador no es formalmente autoadjunto, hay que considerar el producto interno con la función peso correspondiente y razonar con él.

4.1.1 PSL asociados a la ecuación de Bessel

Un ejemplo clásico de un PSL singular viene dado por la ecuación

$$(17) \quad R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\nu^2}{r^2}R(r) = \lambda R(r),$$

sobre un intervalo $[0, r^*]$. Como el operador no es autoadjunto, hemos de multiplicar por el factor integrante $\mu(r) = r$, resultando

$$rR''(r) + R'(r) - \frac{\nu^2}{r}R(r) = \lambda rR(r).$$

Como vemos, hay que introducir la función peso $\rho(r) = r$. Además, el operador es singular pues $A(r) = r$ se anula en $r = 0$. Como condiciones de contorno tomaremos F en $r = 0$ y D, N o R, en $r = r^*$. La aplicación del correspondiente teorema espectral proporciona un sistema ortogonal y completo para el producto con peso $\rho(r) = r$.

Supongamos, como ilustración, que la condición en $r = r^*$ es D, es decir, $R(r^*) = 0$. El teorema espectral aseguraría que todo autovalor λ es negativo, por lo que puede escribirse en la forma $\lambda = -\omega^2$. La ecuación se escribe entonces

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\omega^2 r^2 - \nu^2)R(r) = 0.$$

Buscando R en la forma $R(r) = J(\omega r)$, entonces la función J satisface

$$s^2 J''(s) + sJ'(s) + (s^2 - \nu^2)J(s) = 0,$$

con $s = \omega r$, que es la ecuación de Bessel de índice ν , de solución general (lección anterior)

$$R(r) = J(\omega r) = AJ_\nu(\omega r) + BY_\nu(\omega r),$$

con A, B constantes, J_ν, Y_ν las funciones de Bessel de índice ν y primera y segunda especie, respectivamente. La condición de finitud obliga a que $B = 0$ y la condición D queda

$$J_\nu(\omega r^*) = 0,$$

es decir, ωr^* es un cero de la función de Bessel J_ν . Denotando por $\xi_{\nu, m}$, $m \geq 1$ los ceros positivos de J_ν , los valores de ω que proporcionan los autovalores son

$$\omega_m = \frac{\xi_{\nu, m}}{r^*},$$

con autovalores asociados

$$\lambda_m = -\omega_m^2 = -\left(\frac{\xi_{\nu,m}}{r^*}\right)^2, \quad m \geq 1.$$

Así, la familia de autofunciones

$$R_m(r) = J_\nu(\omega_m r), \quad m \geq 1,$$

forma un sistema ortogonal y completo con respecto al producto interno

$$(18) \quad \langle u, v \rangle_r = \int_0^{r^*} u(r)\bar{v}(r)r \, dr.$$

EJERCICIOS

Ejercicio 1. Dado $L > 0$, encuentra para cada uno de los problemas siguientes los autovalores, las autofunciones y un conjunto ortonormal de funciones en el intervalo correspondiente.

- (a) $X'' = \lambda X, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$
- (b) $X'' = \lambda X, \quad X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0.$
- (c) $X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(L), \quad X'(0) = X'(L).$
- (d) $X'' = \lambda X, \quad X'(0) = 0, \quad X(L) = 0.$
- (e) $X'' = \lambda X, \quad X(0) = 0, \quad X'(L) = 0.$
- (f) $X'' = \lambda X, \quad X(0) - 2X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0.$

Ejercicio 2. Demuestra que cada uno de los siguientes problemas de valores frontera no tiene autovalores reales

- (a) $X'' = \lambda X, \quad X(\pi) = 0, \quad X'(0) + 2X'(\pi) = 0.$
- (b) $X'' = \lambda X, \quad X(0) - \frac{1}{2}X(\pi) = 0, \quad X'(0) + \frac{1}{2}X'(\pi) = 0.$

Ejercicio 3. Calcula los siguientes desarrollos en serie:

- (a) Desarrollo en serie de senos de $f(x) = 1, \quad x \in [1, 5].$
- (b) Desarrollo en serie de cosenos de $f(x) = x, \quad x \in [a, b].$
- (c) Desarrollo en serie de senos de $f(x) = x^2, \quad x \in [a, b].$

Ejercicio 4. Halla las series de Fourier en senos y cosenos de las siguientes funciones

- (a) $f(x) = -x, \quad a \leq x < b.$

- (b) $f(x) = 1$, si $-a \leq x < 0$, $f(x) = 0$, si $0 \leq x < a$.
 (c) $f(x) = -a - x$, si $-a \leq x < 0$, $f(x) = a - x$, si $0 \leq x < a$.
 (d) $f(x) = x$, si $0 \leq x < 1$, $f(x) = 2 - x$, si $1 \leq x < 2$.

Ejercicio 5. Desarrolla en serie de senos la función $\cos x$ en $0 \leq x \leq \pi$. Calcula la serie de cosenos de la función $\sin x$ en el mismo intervalo. Demuestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 6. Halla la serie de Fourier en senos y cosenos en el intervalo $[-1, 1]$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Demuestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ejercicio 7. (a) Demuestra que, si $-\pi \leq x < \pi$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}.$$

(b) Suma las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Ejercicio 8. Demuestra las siguientes igualdades como funciones de energía finita.

(a)

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 \leq x < 2\pi.$$

(b)

$$\frac{1}{12}x(\pi - x)(2\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad 0 \leq x < 2\pi.$$

(c)

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad -\pi \leq x < \pi.$$

Ejercicio 9. (a) Demuestra que

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin nx, \quad 0 < x \leq \pi.$$

(b) Utilizando el apartado anterior, demuestra que

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos nx, \quad 0 < x \leq \pi.$$

Ejercicio 10. Calcula los autovalores y un sistema ortogonal y completo de autofunciones con respecto al producto interno (18), para el PSL dado por la ecuación (17) en $[0, r^*]$, condición F en $r = 0$ y N en $r = r^*$. Escribe autovalores y autofunciones en términos de los ceros de J'_ν .