GRADO INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS DE TELECOMUNICACIÓN
GRADO INGENIERÍA DE SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN
GRADO INGENIERÍA TELEMÁTICA

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la segunda prueba parcial (31 de marzo de 2011)

1.- Determinar la función $f = u + i\,v$, siendo $u = \mathrm{Re}(f), v = \mathrm{Im}(f)$, holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y que verifica:

$$i)\;\; u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x \;\text{ para todo } z = x + i\,y \in \mathbb{C}; \qquad ii)\;\; f(i) = 0.$$

Solución: Si $f = u + i\,v$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$, entonces u y v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann, es decir,

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 1; \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 6xy; \end{cases}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De la primera ecuación se deduce que

$$v(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2 + 1)\,dy = 3x^2y - y^3 + y + C(x),$$

donde C es una función derivable en $\mathbb{R}$. Si se lleva esta igualdad a la segunda ecuación de $(*)$, se tiene que

$$6xy + C'(x) = 6xy,$$

luego $C'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y $C(x) = C \in \mathbb{R}$ es constante. En conclusión,

$$f(z) = f(x,y) = (x^3 - 3xy^2 + x) + i\,(3x^2y - y^3 + y + C), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Para determinar la constante C evaluamos la función en el punto $i = 0 + i \cdot 1$ (o lo que es lo mismo, en el punto $(x,y) = (0,1)$):

$$0 = f(i) = f(0,1) = i\,C \;\Rightarrow\; C = 0.$$

Notas:

- $*$ Si sustituimos $x = (z+\overline{z})/2$ e $y = (z-\overline{z})/(2i)$, tras las simplificaciones pertinentes, se puede comprobar que $f(z) = z^3 + z$.
- $*$ Para evaluar $f(i)$ no se puede hacer $x = 0$ e $y = i$.
- $*$ No es suficiente con afirmar que $f(i) = 0$ implica que $C = 0$, hay que explicar el porqué. Numerosos errores, como el que se indica en el punto anterior, justifican este criterio.

2.- Calcular la integral

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{sen}(z)}{z\,(z+1)}\,dz\,,$$

donde Γ es la circunferencia de centro 0 y radio 2.

Solución: La curva Γ es el borde de $D = B(0,2)$, la bola de centro 0 y radio 2. Obviamente D es un dominio de Jordan y consideraremos en Γ la orientación inducida por D, es decir, el recorrido antihorario de la circunferencia. Observemos que la función

$$f(z) = \frac{\mathrm{sen}(z)}{z\,(z+1)}$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$; es claro que ni 0 ni -1 están en el soporte de la curva, de forma que la integral curvilínea está bien definida.

Daremos dos soluciones. En la primera se usa la fórmula integral de Cauchy. Descomponiendo en fracciones simples, se tiene que

$$\frac{1}{z\,(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z\,(z+1)}\,dz &= \int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}\,dz - \int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z+1}\,dz \\ &= 2\pi i\,\operatorname{sen}(0) - 2\pi i\,\operatorname{sen}(-1) = -2\pi i\,\operatorname{sen}(-1)\,,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene al aplicar la fórmula integral de Cauchy a la función $g(z) = \operatorname{sen}(z)$ (holomorfa en $\mathbb{C}$) en los puntos $z_0 = 0 \in D$ y $z_1 = -1 \in D$, respectivamente.

En la segunda solución se usa el teorema de los residuos. Como $0, -1 \in D$, se tiene que

$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z\,(z+1)}\,dz = 2\pi i\,(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,-1)).$$

Es secillo de comprobar que $z_0 = 0$ es una singularidad evitable de f (observando que numerador y denominador tienen un cero de orden 1 en $z_0 = 0$ o calculando $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$, por ejemplo). En consecuencia, $\operatorname{Res}(f,0) = 0$.

Por otra parte, $z_1 = -1$ es un polo simple de f y $\operatorname{Res}(f,-1) = -\operatorname{sen}(-1) = \operatorname{sen}(1)$. Esta afirmación puede justificarse, por ejemplo, observando que

$$f(z) = \frac{h(z)}{z+1}\,, \quad z \in B(-1,1),$$

donde $h(z) = \operatorname{sen}(z)/z$ es una función holomorfa en $B(-1,1)$ con $h(-1) = -\operatorname{sen}(-1)$; recordemos que, en estas condiciones, $\operatorname{Res}(f,-1) = h(-1)$. De este modo, se concluye que

$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z\,(z+1)}\,dz = 2\pi i\,\operatorname{sen}(1).$$

Notas:

* Si se quiere aplicar la fórmula de Cauchy a la función $h(z) = \operatorname{sen}(z)/z$ hay que probar primero que ésta es una función holomorfa en un abierto que contiene a la circunferencia Γ y a su interior, en particular, que es derivable en $z_0 = 0$.
* La solución no está completa si no se indica explícitamente que los puntos 0 y -1 están en el disco D.

3.- i) Obtener el desarrollo de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{z\,(4-z^2)} + \frac{1}{z}\,\operatorname{Ch}\Big(\frac{1}{z}\Big)$$

en la corona $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$ y determinar el residuo de f en $z_0 = 0$.

ii) Estudiar las singularidades aisladas de f.

Solución: i) La corona está centrada en $z_0 = 0$. El primer sumando en la expresión de f se puede escribir como

$$\frac{1}{z\,(4-z^2)} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{4(1-(z/2)^2)} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\Big(\frac{z}{2}\Big)^2\Big]^n$$

siempre que $z \neq 0$ y $|z/2|^2 < 1$, esto es, en la corona $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$. Por otro lado, conocido el desarrollo de Taylor centrado en $w_0 = 0$ de la función $\mathrm{Ch}(w)$, válido para todo $w \in \mathbb{C}$, basta realizar la sustitución $w = 1/z$ para obtener

$$\frac{1}{z}\,\mathrm{Ch}\Big(\frac{1}{z}\Big) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\Big(\frac{1}{z}\Big)^{2n}$$

siempre que $|z| > 0$. Por tanto, el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en la corona $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$ es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+2}}\,z^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\,\frac{1}{z^{2n+1}}.$$

El residuo de f en z_0 es el coeficiente de $1/z$ en este desarrollo, es decir,

$$\mathrm{Res}(f, z_0 = 0) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{0!} = \frac{5}{4}.$$

ii) En la expresión de f el primer sumando es una función racional, la cual es holomorfa excepto en los ceros del denominador, que son $z_0 = 0$, $z_1 = 2$ y $z_2 = -2$, los tres de orden 1. El segundo sumando es holomorfo excepto en $z_0 = 0$. Es claro entonces que $z_1 = 2$ y $z_2 = -2$ son polos de orden 1 de f (el numerador del primer sumando es constante e igual a 1) y, puesto que la parte singular del desarrollo obtenido en el apartado (i) tiene infinitos términos no nulos, $z_0 = 0$ es una singularidad esencial de f.

4.- Calcular

$$VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)}{1+x^3}\,dx\,.$$

Solución: El valor principal que se pide calcular es la parte real del valor principal de la transformada de Fourier en $\omega = -2$ de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$, es decir,

$$VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)}{1+x^3}\,dx = \mathrm{Re}\Big[VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(-2)x}}{1+x^3}\,dx\Big].$$

La función racional f se puede definir y es holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ excepto en los ceros del denominador $1+z^3$, esto es, las raíces cúbicas de $-1 = \exp(i\pi)$, las cuales son

$$z_k = \exp\Big(i\,\frac{\pi + 2k\pi}{3}\Big), \quad k = 0, 1, 2.$$

En concreto,

$$z_0 = \exp\Big(i\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_1 = \exp\big(i\pi\big) = -1, \quad z_2 = \exp\Big(i\frac{5\pi}{3}\Big) = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Las tres son raíces simples de $1+z^3$ y, por tanto, polos simples de f. Además, se verifica que

$$|f(z)| = \Big|\frac{1}{1+z^3}\Big| \leq \frac{1}{|z|^3-1} \leq \frac{1}{|z|^3-|z/2|^3} = \frac{8/7}{|z|^3} \leq \frac{8/7}{|z|}, \quad \text{si } |z| > 2,$$

es decir, f satisface la condición (4) del tema 8. También siguiendo la observación 4.10.iii del tema 8, la condición (4) se puede sustituir por la condición (4′) más débil. En este caso,

$$\lim_{|z|\to\infty}|f(z)| \leq \lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{|z|^3-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0.$$

Se puede entonces aplicar la fórmula del apartado 4.11.1 del tema 8 (puesto que $\omega = -2 < 0$, se trabaja en el semiplano superior Π^+):

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(-2)x}}{1+x^3}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}(e^{-i(-2)z} f(z), z_0) + \pi i \operatorname{Res}(e^{-i(-2)z} f(z), z_1).$$

Los residuos se calculan utilizando las proposiciones 3.7 o 3.9 del tema 8:

$$\operatorname{Res}(e^{i2z} f(z), z_0) = \frac{e^{i2z}}{(z-z_1)(z-z_2)}\Big|_{z=z_0} = \frac{2\, e^{-\sqrt{3}+i}}{(3+i\sqrt{3})i\sqrt{3}} = -\frac{e^{-\sqrt{3}+i}(1+i\sqrt{3})}{6},$$

$$\operatorname{Res}(e^{i2z} f(z), z_1) = \frac{e^{i2z}}{3z^2}\Big|_{z=z_1} = \frac{e^{-i2}}{3}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{1+x^3}\, dx &= \operatorname{Re}\Big[2\pi i \frac{-e^{-\sqrt{3}+i}(1+i\sqrt{3})}{6} + \pi i \frac{e^{-i2}}{3}\Big] \\ &= 2\pi \frac{e^{-\sqrt{3}}(\cos(1)\sqrt{3} + \operatorname{sen}(1))}{6} + \pi \frac{\operatorname{sen}(2)}{3}. \end{aligned}$$