Lección 10: Integración elemental

1 Introducción. Interpretación geométrica y física de una EDO

Este tema constituye un primer acercamiento al concepto de ecuación diferencial, que se irá ampliando en lecciones posteriores. En la siguiente sección se presentarán las definiciones básicas para familiarizarse con el lenguaje y en la tercera se hablará de métodos de resolución; por su parte, en esta introducción daremos una explicación elemental sobre el significado de una ecuación diferencial ilustrándolo con las ecuaciones diferenciales ordinarias (de ahora en adelante, EDO) de primer orden. Una EDO de primer orden, en su formulación más simple, es una ecuación abstracta que relaciona la derivada de una función desconocida con la propia función

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{1}$$

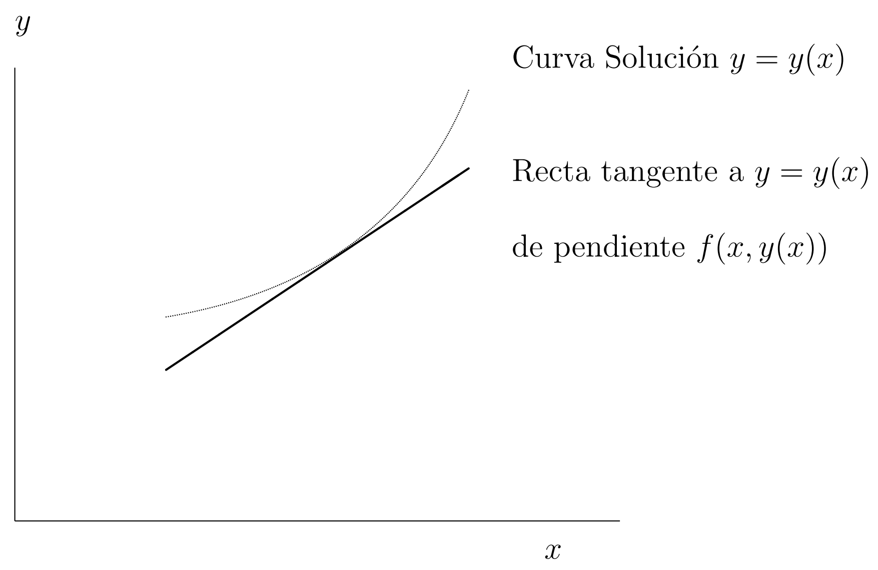
En (1), se entiende que x es una variable independiente, $y = y(x)$ es una función incógnita, mientras que $f(x,y)$ representa una relación entre las variables x e y a la que es igual la derivada. El problema habitual que se plantea es encontrar (o al menos obtener alguna información de) la o las soluciones de (1), es decir, aquellas funciones $y(x)$ que verifican la relación (1) para todo x en el rango de valores en el que estemos considerando el problema. A veces, la notación cambia y se suele escribir

$$x'(t) = f(t,x), \tag{2}$$

donde ahora t es la variable independiente, mientras que $x = x(t)$ es la función incógnita. Se utilizará (1) ó (2) según convenga.

Ecuaciones como (1) ó (2) pueden aparecer en muchas situaciones, aunque quizá se puedan agrupar éstas en dos grupos, no necesariamente excluyentes.

El primero da a (1) un sentido geométrico: puesto que la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente a la misma en cada punto, una función $y(x)$ verificando (1) es aquella curva cuya recta tangente a $y = y(x)$ en x tiene por pendiente el valor $f(x, y(x))$.



La figura 1 muestra lo que se llama un campo de pendientes, o campo de direcciones, de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = 2x. \tag{3}$$

A través de diversos puntos (x, y) se han bosquejado pequeños segmentos de recta de pendiente $2x$. Se pueden así dibujar diversas curvas para las cuales los segmentos de recta sean tangentes a ellas. Ésas son las soluciones de la ecuación. Para nuestro caso, se puede obtener, tomando primitivas, que

$$y(x) = x^2 + C, \tag{4}$$

con C una constante arbitraria. Esto nos dice que la ecuación (3) tiene infinitas soluciones (una para cada valor de C) y que son de la forma (4), forma que ya se adivinaba en el campo de direcciones dado por la figura 1 (véase figura 2).

Una forma más o menos sistemática para construir el campo de direcciones de (1) viene dado entonces por el proceso antes descrito, llamado método de las isoclinas. Primero se determinan los puntos de los conjuntos de nivel

$$\Gamma_c = \{(x, y)/f(x, y) = c\},$$

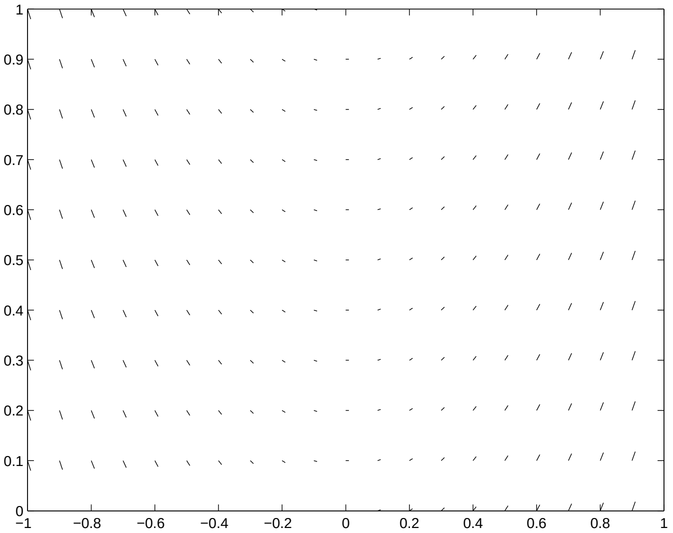


Figura 1: Campo de direcciones de la ecuación (3).

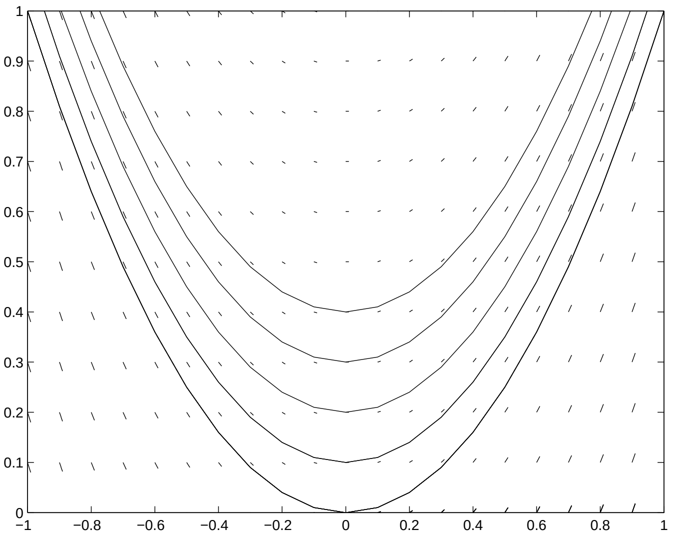


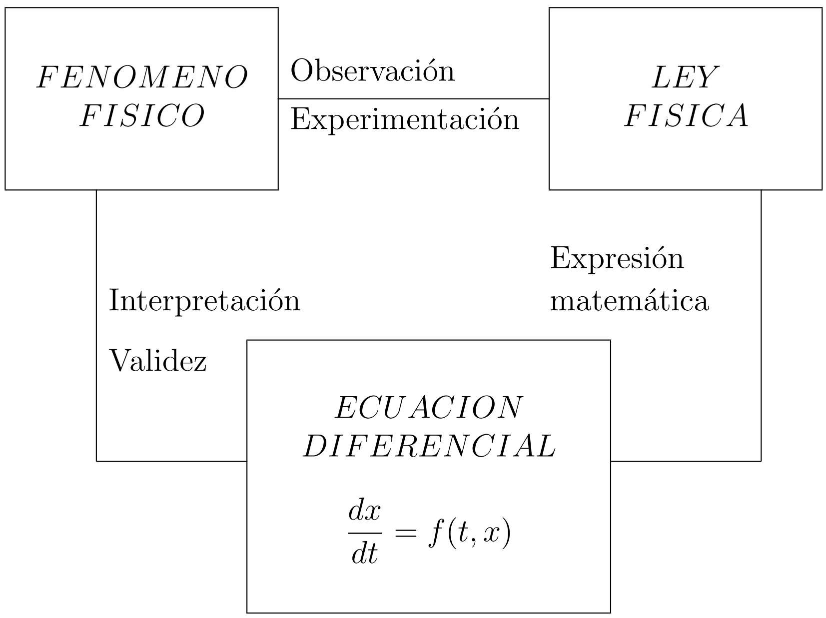
Figura 2: Campo de direcciones de la ecuación (3) y soluciones $y = x^2 + C$.

para cada $c \in \mathbb{R}$. Cada uno de esto lugares geométricos es una isoclina. Luego se dibujan sobre ellas pequeños segmentos con pendientes dadas por el valor de c correspondiente (figura 1).

Una segunda interpretación de una ODE (y, más generalmente, de una ecuación diferencial) es física. Aquí recuperamos la notación de (2). Ahora, $x = x(t)$ representa la medida realizada en el instante t de una magnitud que describe, a lo largo del tiempo, un cierto sistema físico, biológico, económico, etc. Por ejemplo, la posición de un móvil que se desplaza en un medio unidimensional, la temperatura de un objeto, la cantidad de radiactividad de un lugar determinado, la densidad de una población, etc; $x(t)$ representa pues, el estado de cierto sistema en el instante t. Por otro lado, la variación instantánea de la variable $x(t)$ está dada por su función derivada $x'(t)$. En este punto, los experimentos realizados pueden permitir observar la evolución del fenómeno y conjeturar una relación matemática entre $x(t)$ y su variación temporal $x'(t)$, dada por la función $f(t,x)$. Esta relación es la ecuación diferencial que ha de ser satisfecha por la función incógnita $x(t)$.

$$x(t)\text{: estado del sistema en el instante } t$$

$$\frac{dx}{dt} = x'(t)\text{: variación instantánea del sistema}$$



La validez de la ecuación diferencial como modelo matemático que explique la evolución de un fenómeno $x(t)$ depende entonces, en alto grado, de la experimentación realizada.

Ejemplo 1. En términos de modelización, la ecuación

$$x'(t) = f(t,x) = ax(t), \quad a \neq 0, \tag{5}$$

representa una función $x(t)$ que coincide con su velocidad instantánea en cada instante; aquí $x(t)$ puede representar, por ejemplo, la densidad de población en una determinada región y en un instante de tiempo t (modelo de Malthus). Si dibujamos el campo de direcciones, se puede deducir que las soluciones son exponenciales, de la forma

$$x(t) = Ce^{at},$$

con C constante arbitraria.

Ejemplo 2. El modelo malthusiano concluye entonces que la densidad de población en la zona a estudio crece (o decrece) de forma exponencial. Un modelo más ajustado a la realidad es el llamado logístico. Si $x(t)$ representa, de nuevo, la densidad de población en el instante t, entonces

$$x'(t) = f(t,x) = ax(t) - bx(t)^2, \quad a, b \neq 0. \tag{6}$$

La ecuación (6) es una corrección de (5), dada a través del término cuadrático. Luego veremos que las soluciones de (6) son de la forma

$$x(t) = \frac{aC}{bC + (a - bC)e^{-at}},$$

con C una constante arbitraria. Si, por ejemplo, $C \neq 0$ y $a > 0$, las soluciones cumplen que $x(t) \to a/b$ si $t \to \infty$, lo que establece una limitación al crecimiento de la población, algo más realista que el modelo malthusiano de crecimiento ilimitado.

Vamos ahora a introducir notación y una serie de definiciones referentes a las ecuaciones diferenciales. Las siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
y'(x) - x\sin x &= 1; && (7)\\
y''(x) + x^2y'(x) + 3e^x y(x) &= 2; && (8)\\
(x''(t))^2 + 3x(t)x'(t) &= \cos t; && (9)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} &= 3x^2. && (10)
\end{aligned}$$

En (7) y (8) se entiende que y es la variable dependiente o función incógnita, mientras que x es la variable independiente. Como sabemos, esto puede cambiar y tener una notación como en (9), donde x es la función incógnita y t la variable independiente. En (10), se entiende que la función incógnita u depende de dos variables independientes x e y.

Si en la ecuación hay derivadas respecto de una sola variable independiente, se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO); tal es el caso de (7), (8) y (9). Si, por contra, hay derivadas con respecto a más de una variable, como en (10), entonces se trata de una ecuación en derivadas parciales (EDP). En este tema sólo hablaremos de las primeras.

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta presente en la ecuación. Por ejemplo, (7) tiene orden uno, mientras que (9) tiene orden dos.

Se dice que la ecuación es lineal si las derivadas de la función incógnita que aparecen en la misma están en forma de combinación lineal. En otro caso, se dice que la ecuación es no lineal. Por ejemplo, (7), (8) y (10) son lineales, mientras que (9) es no lineal.

Naturalmente, por solución de la ecuación diferencial se entiende aquella función que satisface la misma en todo valor de la variable independiente (o las variables independientes) en el que la ecuación esté definida. Se entiende por solución general la expresión más general de las soluciones de la ecuación. Normalmente dependerá de un número de parámetros, los cuales proporcionan todas las soluciones de la ecuación, una por cada valor que se les fije. Cada una de estas soluciones se llaman soluciones particulares.

Con frecuencia interesa obtener sólo una solución de una ecuación diferencial, verificando ciertas condiciones adicionales. Éstas pueden ser condiciones iniciales, dando lugar a los llamados problemas de valores iniciales; también pueden ser condiciones sobre los extremos del intervalo donde esté definida la ecuación, proporcionando los llamados problemas de contorno o de valores en la frontera. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} y''(x) + 2xy(x) &= e^x, \quad x \geq 0, \\ y(0) = 1, &\qquad y'(0) = 2, \end{aligned}$$

es un problema de valores iniciales (IVP) o (PVI), mientras que

$$\begin{aligned} y''(x) + 2xy(x) &= e^x, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 1, &\qquad y(\pi) = 1, \end{aligned}$$

es un problema de contorno (BVP). En algunos casos, ambos problemas se pueden combinar, dando lugar a los problemas de valores iniciales y de contorno.

La solución general, si es posible su cálculo, puede venir dada esencialmente de dos formas:

- Mediante una familia uniparamétrica de curvas

$$y = y(x, C),$$

  con C un parámetro libre. Cada valor fijo asignado a C genera una solución, y toda solución corresponde a algún valor de C. Para resolver un PVI asociado, basta determinar el valor de C que corresponde a las condiciones iniciales impuestas.

- A través de una ecuación implícita

$$U(x, y) = C,$$

  con C un parámetro, U una función de las variables x e y, llamada integral primera.

Como ya hemos comentado, en esta lección vamos limitarnos a un estudio de las EDOs de primer orden, de la forma (1) ó (2), donde f es una cierta función proporcionada por la ecuación, que relaciona las variables dependiente e independiente.

Ante la aparición de una EDO de primer orden (y, en general, de una ecuación diferencial) pueden plantearse al menos tres problemas:

1. ¿Hay alguna solución?
2. Si existe alguna solución, ¿es única?
3. Si existen soluciones ¿se pueden calcular?

1.1 Existencia y unicidad

Por fijar notación, suponemos que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación definida en algún dominio de $\mathbb{R}^2$. Entenderemos por solución de (1) (recuérdese siempre la formulación alternativa con (2)) toda aplicación $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

- I es un intervalo y $(x, y(x)) \in \Omega$ cuando $x \in I$ (de modo que tiene sentido $f(x, y(x)), x \in I$).

- y es derivable en todo $x \in I$, con $y'(x) = f(x, y(x))$. Si I es cerrado por alguno de sus extremos, se entenderá que la derivada es la correspondiente derivada lateral.

La notación anterior puede extenderse al caso de tener un sistema de EDOs

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}),$$

donde ahora se utiliza la notación (2), con $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_N) : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es un campo de un número N de componentes, siendo las soluciones de la forma $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$.

Existencia y unicidad del PVI

La interpretación de una EDO como modelo de algún sistema físico plantea, desde el punto de vista matemático, una primera exigencia de adaptación al fenómeno que se pretende modelizar. En primer lugar, se entiende que la EDO debe actuar como un sistema, es decir, que debe proporcionar una respuesta a un conjunto de datos de entrada. Matemáticamente, ello obliga a que (1) admita soluciones (respuestas). Además, como reflejo de lo que ocurre en la realidad, cada conjunto de datos de entrada ha de proporcionar una única respuesta; es decir, si repetimos el experimento a estudio bajo idénticas condiciones, esperamos observar los mismos resultados. En términos matemáticos, ello exige que el PVI para (1) (donde la condición inicial actúa como dato de entrada) admite una única solución.

Para que el modelo (1) cumpla estos requerimientos, es preciso imponer condiciones sobre la función f.

Teorema 1 *Supongamos que Ω es abierto, que f es continua y sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto dado. Entonces, existe al menos una solución $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (1), definida en algún intervalo I que contiene al punto x_0 y tal que $y(x_0) = y_0$.*

Así, desde el punto de vista geométrico, tenemos que, bajo las hipótesis del teorema 1, se puede encontrar una curva que sigue el campo de direcciones. Para que por cada punto pase una única curva, se requieren más hipótesis sobre f:

Teorema 2 *Supongamos que Ω es abierto, que f es continua, que existe $\partial f(\partial x$ y que es continua. Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto dado. Entonces, existe una única solución $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (1), definida en algún intervalo I que contiene al punto x_0 y tal que $y(x_0) = y_0$.*

1.2 Aproximación numérica. Método de Euler

Los resultados anteriores no aseguran la resolución de (1) en general. Sólo para algunos casos particulares de f es posible dar técnicas para obtener la solución general o la del PVI correspondiente.

Ante esta situación, es necesaria la búsqueda de técnicas numéricas de aproximación a las soluciones. Bajo las hipótesis del teorema 2, sea $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la solución del PVI (1) con $y(x_0) = y_0$. Una estrategia de algunos métodos de aproximación a la solución y consiste en fijar una serie de puntos del dominio (discretización) y generar una ecuación en diferencias cuya solución aproxime a los valores de la solución en dichos puntos.

Esto puede hacerse de varias formas. El método más sencillo es el llamado método de Euler o de las tangentes, cuya versión más simple parte de una discretización uniforme del intervalo

$$x_{n+1} = x_n + h = x_0 + (n+1)h, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

para cierta longitud de paso $h > 0$, y de construir aproximaciones y_n a $y(x_n)$ del siguiente modo. La recta tangente a la solución y en (x_0, y_0) es

$$y = y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0),$$

y la aproximación en x_1 viene dada por el valor de la recta en ese punto: $y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0) = y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Ahora, partiendo de $(x_1 y_1)$, se construye la recta con pendiente dada por el campo de direcciones en ese punto, es decir

$$y = y_1 + (x - x_1)f(x_1, y_1),$$

y ahora la aproximación a $y(x_2)$ viene dada por la evaluación en x_2 de dicha recta:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

Este proceso puede describirse en general. Conocido (x_n, y_n), con y_n aproximación a $y(x_n)$ en x_n, la siguiente aproximación se obtiene evaluando en x_{n+1} la recta que pasa por (x_n, y_n) y tiene por pendiente el campo de direcciones en dicho punto, esto es

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

De este modo, la solución queda aproximada mediante una línea poligonal, llamada poligonal de Euler.

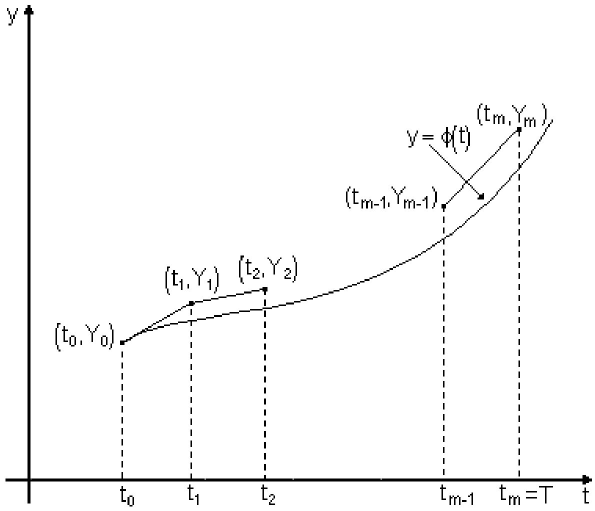


Figura 3: Método de Euler explícito.

2 Resolución de ecuaciones elementales de primer orden

Algunos casos particulares, pero importantes, de ecuaciones de primer orden, para los que puede darse una técnica de resolución son los siguientes:

- Ecuaciones de variables separadas.
- Ecuaciones homogéneas.
- Ecuaciones lineales.

2.1 Ecuaciones de variables separadas

Son de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g(x)h(y), \tag{11}$$

con g y h funciones continuas definidas en intervalos correspondientes. La resolución se divide en dos partes:

(a) Cada punto y^* con $h(y^*) = 0$ aporta una solución constante $y(x) = y^*, x \in I$.

(b) Sea (y_1, y_2) un intervalo con $h(y) \neq 0, y \in (y_1, y_2)$. Buscamos ahora soluciones $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $y(x) \in (y_1, y_2)$ si $x \in (a, b)$. Entonces $h(y(x)) \neq 0, x \in (a, b)$ y podemos escribir

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x), \quad a < x < b.$$

Sea H una primitiva de $1/h$ sobre el intervalo (y_1, y_2) y $G(x)$ una primitiva de g en (a, b). Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} H(y(x)) = H'(y(x))y'(x) = \frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) = G'(x),$$

y como dos funciones con la misma derivada en un intervalo difieren en una constante, tenemos

$$H(y(x)) = G(x) + C, \tag{12}$$

con C constante arbitraria. La relación (12) proporciona las soluciones, en general de forma implícita.

Cuando exista $h'(y)$ y sea continua, entonces la parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x)h'(y),$$

existirá, será continua y, por tanto, siguiendo el teorema 2, habrá unicidad de soluciones. Así, las soluciones de los tipos (a) y (b) no podrán cortarse: si una solución comienza siendo del tipo (a) (resp. (b)), permanecerá siendo siempre del tipo (a) (resp. (b)). De este modo, cuando hay unicidad, la solución general de (11) consta de las posibles soluciones constantes (ceros de la función $h(y)$) junto con las soluciones definidas, en general de forma implícita, por (12), con C un parámetro arbitrario.

Cuando h sea continua pero no tenga derivada, o la derivada no sea continua, es posible que las soluciones de forma (a) y (b) se corten, dando lugar así a una estructura más complicada para la solución general.

Por su parte, una forma de resolver un PVI asociado a (11) con $y(x_0) = y_0$ consiste en imponer la condición inicial en la solución general de la ecuación y determinar así el valor de la constante C correspondiente a la solución buscada.

Ejemplo. Buscamos resolver la ecuación diferencial

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{3y^2 + 1},$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = (1 + \frac{1}{x^2})\frac{1}{3y^2+1},$$

que es de variables separadas, con $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, h(y) = \frac{1}{3y^2+1}$. Entonces, podemos escribir

$$(3y^2+1)\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2},$$

y la integración de ambos lados de la ecuación da lugar a

$$y(x)^3 + y(x) = x - \frac{1}{x} + C,$$

con C constante. Fijémonos entonces que, como se observa en el ejemplo, quizá no sea posible, o bien sea posible pero no práctico, resolver (**??**) explícitamente para y como función de x. En ese caso, se dice que (**??**) es la solución implícita de (11). Es también la solución general, pues para cada valor de la constante C se obtiene una solución y, junto con las calculadas a partir de los ceros de h, éstas son las únicas soluciones que tiene (11). Por ejemplo, planteado el IVP

$$x^2\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{3y^2+1}, \quad y(1) = 2,$$

la solución queda definida implícitamente por

$$y(x)^3 + y(x) = x - \frac{1}{x} + C,$$

para cierto valor de la constante C. Tomando $x = 1$ y teniendo en cuenta el valor de la condición inicial,

$$y(1)^3 + y(1) = 1 - \frac{1}{1} + C \Rightarrow C = 2^3 + 2 = 10,$$

luego la solución viene dada por

$$y(x)^3 + y(x) = x - \frac{1}{x} + 10.$$

2.2 Ecuaciones homogéneas

Una función $g : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado r si

- Ω es un sector con vértice el origen $(0, 0)$.
- $g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r g(x, y), \quad \lambda > 0, (x, y) \in \Omega.$

Se dice que la ecuación diferencial

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{13}$$

es homogénea cuando f es homogénea de grado $r = 0$. Dada $y(x)$ solución de (13), para $x \neq 0$ y la función $v(x) = y(x)/x$, se satisface, por la homogeneidad de f,

$$f(x, y(x)) = f(x, xv(x)) = f(1, v(x)).$$

Luego

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{y'(x)}{x} - \frac{v(x)}{x} = \frac{f(x, y(x)) - v(x)}{x} \\ &= \frac{f(1, v(x)) - v(x)}{x} = g(x)h(y(x)), \end{aligned}$$

con $g(x) = 1/x, h(v) = f(1, v) - v$, quedando una ecuación de variables separadas, que puede resolverse (para v) con el procedimiento descrito en el apartado anterior. A partir de $v(x)$, se obtiene $y(x)$ a través de la fórmula $y(x) = xv(x)$.

Ejemplo. Vamos a intentar resolver

$$2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2.$$

Fijémonos en que la ecuación puede escribirse

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{3}{2}\frac{y}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

donde $F(z) = \frac{2}{z} + \frac{3}{2}z$. Haciendo la sustitución $y = vx$, se tiene

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v = \frac{2}{v} + \frac{v}{2} = \frac{4 + v^2}{2v},$$

que es de variables separadas:

$$\begin{aligned} \frac{2v}{4+v^2}\frac{dv}{dx} &= \frac{1}{x}, \\ \ln(v^2(x)+4) &= \ln|x|+C, \\ v^2(x)+4 &= C_1|x|, \\ y(x)^2+4x^2 &= C_1|x|x^2. \end{aligned}$$

La resolución de las ecuaciones homogéneas proporciona un primer ejemplo del llamado método de sustitución; se trata de hacer algún cambio de variable para convertir la ecuación en otra que podemos resolver. Más adelante veremos otros ejemplos.

2.3 Ecuaciones lineales de primer orden

Hay varias formas de resolver una ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y(x)=Q(x), \tag{14}$$

donde P y Q son funciones continuas dadas en un cierto intervalo (en este caso $f(x,y)=Q(x)-P(x)y$). La función $P(x)$ se llama coeficiente de la ecuación, y $Q(x)$ es el término complementario, término fuente o no homogéneo. La ecuación es homogénea si $Q=0$, siendo no homogénea en otro caso. Si $P(x)$ es constante, se dice que la ecuación es de coeficiente constante.

Hay que observar que como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-P(x)$, la cual, por hipótesis, es una función continua, entonces se aplica el teorema 2 y se tiene unicidad de solución para el correspondiente PVI asociado a (14).

Fijémonos primero en que la linealidad de (14) nos permite describir sus soluciones del siguiente modo: si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de (14), entonces $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ es solución de la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y(x)=0. \tag{15}$$

Esto lleva a la conclusión de que la solución general de (14) puede escribirse como suma de la solución general de (15) a la que debe añadirse una solución particular de (14). De esta manera, la estrategia a seguir es:

1. Hallar la solución general de (15).

2. Obtener, de alguna forma, una solución particular de (14).

3. Sumar ambas expresiones para obtener la solución general de (14).

La resolución del primer paso no parece difícil, puesto que (15) puede escribirse como una ecuación de variables separadas. Si $y \neq 0$,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -P(x) \Rightarrow \ln|y(x)| = -a(x) + \ln C,$$

con $a(x)$ una primitiva de $P(x)$ ($a'(x) = P(x)$). Entonces, tomando exponenciales e incluyendo el signo en la constante, tenemos

$$y_h(x) = Ce^{-a(x)}, \tag{16}$$

con C constante. El caso $C = 0$ lleva a la solución $y = 0$, no incluida antes al dividir por y al principio. De este modo, (16) proporciona la solución general de (15) y el primer paso de la estrategia está completado.

Con respecto al segundo punto, una forma de determinar una solución de (14) viene dada por el llamado método de variación de los parámetros, o de variación de las constantes. El método parte de la hipótesis de que puede encontrarse una solución de (14) de la forma (16), pero con C una función de x, en vez de ser sólo constante (de aquí viene lo de variación de los parámetros: suponemos que las constantes 'varían' como funciones de x). Suponiendo entonces que

$$y_p(x) = C(x)e^{-a(x)}, \tag{17}$$

es una solución particular de (14), tenemos que determinar quién, en estas condiciones, puede ser $C(x)$. Obligando a que (17) sea solución,

$$\frac{dy_p}{dx} + P(x)y_p(x) = Q(x),$$

y sustituyendo, se tiene (recuérdese que $a'(x) = P(x)$)

$$C'(x) = e^{a(x)}Q(x),$$

y, por tanto

$$y_p(x) = e^{-a(x)} \int e^{a(z)}Q(z)dz,$$

donde la integral representa una primitiva de $e^{a(x)}Q(x)$.

Así, como solución general de (14), se tiene

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-a(x)} + e^{-a(x)} \int e^{a(z)} Q(z) dz, \tag{18}$$

con C constante y $a(x)$ una primitiva de $P(x)$.

Ejemplo 1. Vamos a intentar resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} - 2y = e^x, \quad y(0) = 3.$$

En este caso, $P(x) = -2, Q(x) = e^x$; de manera que puede ser $a(x) = -2x$ y, por tanto, la solución general puede escribirse

$$y(x) = Ce^{2x} + e^{2x} \int e^{-z} dz = Ce^{2x} - e^x.$$

Imponiendo la condición inicial

$$y(0) = C - 1 = 3 \Rightarrow C = 4.$$

Luego $y(x) = 4e^{2x} - e^x$.

Ejemplo 2. Buscamos la solución general de

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 3xy = 6x.$$

Escrita en la forma habitual

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{x^2 + 1} y = \frac{6x}{x^2 + 1},$$

se deduce que $P(x) = \frac{3x}{x^2+1}, Q(x) = \frac{6x}{x^2+1}$. Una primitiva de $P(x)$ es

$$a(x) = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) = \ln(x^2 + 1)^{3/2}.$$

Luego

$$e^{a(z)} Q(z) = (z^2 + 1)^{3/2} \frac{6z}{z^2 + 1} = 6z(z^2 + 1)^{1/2}.$$

Y una primitiva de esta función puede ser

$$\int e^{a(z)} Q(z) dz = 2(x^2 + 1)^{3/2}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = \frac{C}{(x^2+1)^{3/2}} + 2\frac{(x^2+1)^{3/2}}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{C}{(x^2+1)^{3/2}} + 2.$$

La fórmula (18), aplicada al correspondiente PVI con condición inicial $y(x_0) = y_0$ se llama fórmula de variación de las constantes. Denotando por $B(x)$ la primitiva elegida de $e^{a(x)Q(x)}$, se tiene

$$a(x) - a(x_0) = \int_{x_0}^{x} P(s)ds; \quad B(x) - B(x_0) = \int_{x_0}^{x} e^{a(z)}Q(z)dz.$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{-a(x)}B(x) &= e^{-a(x)}(B(x) - B(x_0)) + e^{-a(x)}B(x_0) \\ &= \int_{x_0}^{x} e^{(a(z)-a(x))}Q(z)dz + e^{-a(x)}B(x_0) \\ &= \int_{x_0}^{x} e^{-\int_z^x P(s)ds}Q(z)dz + e^{-a(x)}B(x_0). \end{aligned}$$

Así, (18) se escribe

$$y(x) = (C + B(x_0))e^{-a(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_z^x P(s)ds}Q(z)dz.$$

Imponiendo la condición inicial $y(x_0) = y_0$, se llega a que

$$C + B(x_0) = e^{a(x_0)}y_0,$$

de manera que la solución del correspondiente PVI se escribe

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{a(x_0)-a(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_z^x P(s)ds}Q(z)dz \\ &= e^{-\int_{x_0}^x P(s)ds} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_z^x P(s)ds}Q(z)dz, \end{aligned}$$

forma habitual de la fórmula de variación de las constantes.

2.4 Métodos de sustitución

El estudio de las ecuaciones homogéneas introdujo una técnica que puede utilizarse para la resolución de otro tipo de ecuaciones de primer orden. Se trata del método de sustitución, que consiste esencialmente en los siguientes pasos:

- Realizar una sustitución o transformación en las variables (en la dependiente, en la independiente o en ambas) de modo que al reescribir la ecuación original en términos de las nuevas variables, la ecuación resultante sea de variables separadas, lineal o de algún otro tipo que sepamos resolver.
- Obtener las soluciones de la ecuación transformada.
- Expresar estas soluciones en términos de las variables originales, deshaciendo los cambios de variable realizados previamente.

Vamos a ver un par de tipos de ecuaciones que se resuelven con este método.

2.4.1 Ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = G(ax + by)$

Cuando el lado derecho $f(x, y)$ de (1) puede escribirse como una función de $ax + by + c$, para ciertas constantes a, b y c, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = G(ax + by + c), \tag{19}$$

entonces el cambio $z = ax + by + c, y = y$, transforma (19) en

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dz} = G(z),$$

que es de variables separadas. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x - y), \tag{20}$$

con el cambio de variable $z = x - y$, se transforma en

$$\frac{dy}{dz} = \sin z,$$

de manera que $y(z) = -\cos z + C$, con C constante. Deshaciendo el cambio de variable, se tiene

$$y = -\cos(x - y) + C,$$

ecuación que, de forma implícita, proporciona todas las soluciones de (20).

2.4.2 Ecuaciones de Bernoulli

Son ecuaciones de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \tag{21}$$

con $P(x), Q(x)$ funciones continuas de x y α un número real. Observemos que los casos $\alpha = 0, 1$ dan lugar a ecuaciones lineales, y por tanto pueden resolverse con la estrategia descrita en páginas anteriores. Para otros valores de α, la ecuación (21) puede transformarse en una ecuación lineal. Supongamos primero que $y \neq 0$. Dividiendo por y^{α},

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x). \tag{22}$$

Si hacemos el cambio $x = x, v = y^{1-\alpha}$, se tiene que

$$\frac{dv}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo en (22),

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x),$$

ecuación que es lineal.

Ejemplo. Vamos a intentar calcular la solución general de

$$\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3, \tag{23}$$

en la que $P(x) = -5, Q(x) = -\frac{5}{2}x, \alpha = 3$. El cambio $v = y^{-2}$ lleva la ecuación a

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - 5v = -\frac{5}{2}x \Rightarrow \frac{dv}{dx} + 10v = 5x.$$

Resolviendo la ecuación lineal para v (puede realizarse como ejercicio) se llega a que

$$v = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x},$$

con C constante. Deshaciendo el cambio de variable $v = y^{-2}$,

$$\frac{1}{y^2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}.$$

A esta ecuación implícita, que proporciona las soluciones de (23), ha de añadirse la solución $y = 0$, perdida al dividir por y^3 la ecuación diferencial original.

3 Ecuaciones exactas y factores integrantes

3.1 Correspondencia EDOs-formas diferenciales

Ya hemos comentado que la solución general de una EDO de primer orden puede representarse mediante una ecuación implícita

$$U(x, y(x)) = C, \tag{24}$$

con C una constante arbitraria que proporciona la generalidad. Se dice que la función U es una integral primera de la ecuación. Además, (24) proporciona la EDO original de la que $y(x)$ es solución. Basta con derivar la expresión con respecto a x,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{25}$$

La ecuación (25) puede también escribirse en la llamada forma diferencial

$$\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{26}$$

con

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Asímismo, la forma general (3) puede expresarse en esta forma con, por ejemplo, $M(x, y) = f(x, y), N(x, y) = 1$. Más generalmente, la correspondencia entre EDOs y formas diferenciales es como sigue: si escribimos f en forma de cociente $f(x, y) = A(x, y)/B(x, y)$ formalmente, la EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{A(x, y)}{B(x, y)},$$

se puede expresar en forma diferencial como

$$A(x, y)dx - B(x, y)dy = 0.$$

Recíprocamente, la ecuación dada por la forma diferencial (26) puede reescribirse como una EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Fijémonos, además, que incorporar un factor $\mu(x,y)$ no cambia la ecuación asociada, pues

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu(x,y)M(x,y)}{\mu(x,y)N(x,y)} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Asímismo, si f se expresa de dos formas

$$f(x,y) = \frac{A_1(x,y)}{B_1(x,y)} = \frac{A_2(x,y)}{B_2(x,y)},$$

entonces las ecuaciones

$$A_1(x,y)dx - B_1(x,y)dy = 0, \quad A_2(x,y)dx - B_2(x,y)dy = 0,$$

representan la misma EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

3.2 Formas diferenciales exactas y cerradas

De este modo, la resolución de (3) es equivalente a la búsqueda de una función $U(x,y)$ tal que $M = U_x, N = U_y$, en cuyo caso la ecuación (24), con C constante, define implícitamente la solución general. Esto puede, alternativamente, relacionarse con propiedades de la forma diferencial asociada y definida a través de (26). En este sentido, se dice que la forma diferencial $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es exacta si existe una función $U(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y), \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y),$$

en el dominio de definición de la forma ω. Así, la diferencial total de U satisface

$$dU(x,y) := \frac{\partial U}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

De esta forma, una manera de intentar resolver (3) es estudiar si la forma diferencial asociada es exacta. Esto puede llevarse a cabo más fácilmente a través de otro concepto, el de forma cerrada. Se dice que la forma diferencial $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es cerrada si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Teorema 3 *Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^2$ y supongamos que M y N son diferenciables con continuidad en Ω. Entonces, dada la forma diferencial $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, son equivalentes*

(i) ω es cerrada.

(ii) ω es exacta.

Demostración (ii)$\Rightarrow$ (i). Si ω es exacta, existe $U(x,y)$, primitiva de ω, con $U_x = M, U_y = N$. Por hipótesis, U es dos veces derivable con continuidad en Ω, por lo que, por el teorema de Schwarz

$$\frac{\partial M}{\partial y} = U_{xy} = U_{yx} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

y ω es cerrada.

(i)$\Rightarrow$ (ii). Notemos primero que, para cualquier función $g(y)$, la función

$$U(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y),$$

satisface $U_x = M$ (donde la integral representa una primitiva con respecto a x de $M(x,y)$). Así, tendremos que elegir $g(y)$ de modo que se cumpla

$$N = U_y = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y),$$

es decir,

$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$$

Denotemos por $V(x,y)$ al segundo miembro de la última ecuación. Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}V(x,y) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \\
&= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx \\
&= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

cumpliéndose la última igualdad al aplicarse la hipótesis de que ω es cerrada. Esto indica que entonces V es una función sólo de y, $V(x,y) = V(y)$, y basta tomar como función g una primitiva de V. De este modo, si

$$U(x,y) = m(x,y) + g(y),$$

siendo m una primitiva con respecto a x de $M(x,y)$ y g una primitiva de $V(y)$, se tiene por construcción que $U_x = M, U_y = N$, es decir, ω es exacta. $\Box$.

La demostración del resultado anterior proporciona un método para resolver ecuaciones exactas, que se indica a continuación.

Método para resolver ecuaciones exactas.

Si $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta:

1. Buscar una primitiva m, con respecto a x, de M y escribir

$$U(x,y) = m(x,y) + g(y).$$

2. Buscar $g(y)$ como primitiva de

$$V(y) = N(x,y) - \frac{\partial m}{\partial y}(x,y).$$

3. La solución general viene dada implícitamente por la ecuación $U(x,y) = C$, con C constante.

Ejemplo 1. $\omega = y^3dx + 3xy^2dy = 0$.
En este caso, se puede tomar $m(x,y) = xy^3$, de manera que

$$V(y) = N(x,y) - \frac{\partial m}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 - 3xy^2 = 0,$$

y podemos elegir $g(y) = 0$ para que las soluciones de la ecuación se expresen implícitamente como $U(x,y) = xy^3 = C$, con C constante.
Ejemplo 2. $(6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0$.

En este caso, se puede tomar $m(x,y) = 3xy^2 - xy^3$, de manera que

$$V(y) = N(x,y) - \frac{\partial m}{\partial y}(x,y) = 4y,$$

y podemos elegir $g(y) = 2y^2$ para que las soluciones de la ecuación se expresen implícitamente como $U(x,y) = 3xy^2 - xy^3 + 2y^2 = C$, con C constante.

3.3 Factores integrantes

En general, una forma diferencial $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ no es exacta. En algunos casos, es posible convertir la ecuación a exacta a través de los llamados factores integrantes.

Ejemplo. La ecuación

$$ydx - xdy = 0,$$

no es exacta. Si multiplicamos por el factor $\mu(x,y) = 1/y^2$, obtenemos

$$\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y}dy = 0,$$

que ya es exacta, con soluciones de la forma $x/y = C$.

Un factor integrante para la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{27}$$

es una función $\mu(x,y)$ que convierte la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0,$$

en exacta, es decir

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Recordemos que la incorporación de un factor integrante a la forma diferencial no cambia la ecuación diferencial asociada. Aunque se sabe que toda ecuación diferencial en la forma (27) admite un factor integrante, la obtención del mismo no es, en general, posible. Pasamos a comentar algunas situaciones especiales en las que μ puede calcularse explícitamente.

3.3.1 M y N son de variables separadas

Es decir, la ecuación es de la forma

$$A(x)B(y)dx + C(x)D(y)dy = 0.$$

Tomando

$$\mu(x, y) = \frac{1}{B(y)C(x)},$$

entonces

$$0 = \mu(x, y)(A(x)B(y)dx + C(x)D(y)dy) = \frac{A(x)}{C(x)}dx + \frac{D(y)}{B(y)}dy,$$

que es exacta, con soluciones de la forma $U(x, y) = m(x) + n(y) = C$, con C constante, $m(x)$ una primitiva de $A(x)/C(x)$ y $n(y)$ una primitiva de $D(y)/B(y)$.

Ejemplo. $\omega = x^2y^3dx + x(1 + y^2)dy = 0, \mu = 1/(xy^3)$.

En este caso, $A(x) = x^2, B(y) = y^3, C(x) = x, D(y) = 1 + y^2$. Entonces $\mu(x, y) = 1/(xy^3)$ y, por tanto

$$\mu\omega = xdx + \frac{1 + y^2}{y^3}dy = 0,$$

que es de variables separadas, con las soluciones de la forma

$$U(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2y^2} + \ln |y| = C,$$

con C constante.

3.3.2 Factores integrantes que dependen sólo de x

Hay ecuaciones que admiten un factor integrante dependiente sólo de una de las variables $\mu = \mu(x)$. Para que ello ocurra, la ecuación debe satisfacer

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Esto es

$$\begin{aligned}
\mu\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) &= \mu'(x)N(x, y) + \mu(x, y)\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \\
\mu'(x) &= \frac{1}{N(x, y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)\right)\mu(x).
\end{aligned}$$

Esto significa que la función

$$\lambda = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right),$$

ha de depender sólo de x. En tal caso, el factor μ se obtiene integrando la ecuación lineal

$$\mu'(x) = \lambda(x)\mu(x).$$

Esto lleva a que $\mu(x) = Ce^{\Lambda(x)}$, con $\Lambda(x)$ una primitiva de $\lambda(x)$ y C una constante.

Ejemplo. $2ydx - xdy = 0$.

Aquí, el factor λ tiene la forma

$$\lambda = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) = -\frac{3}{x},$$

y, por tanto, puede tomarse $\mu(x) = 1/x^3$. La forma $\mu\omega$ queda exacta y las soluciones pueden expresarse en la forma implícita

$$U(x,y) = -\frac{y}{x^2} = C,$$

con C constante.

3.3.3 Factores integrantes que dependen sólo de y

Un razonamiento similar al anterior prueba que para que la ecuación admita un factor integrante que depende sólo de y ha de cumplirse que la función

$$\lambda = -\frac{1}{Mx,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right),$$

es una función exclusiva de y. En tal caso, el factor μ se obtiene de entre las soluciones de

$$\mu'(y) = \lambda(y)\mu(y).$$

Esto lleva a que $\mu(y) = Ce^{\Lambda(y)}$, con $\Lambda(y)$ una primitiva de $\lambda(y)$ y C una constante.

Ejemplo. $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$.

Ahora, el factor λ tiene la forma

$$\lambda = -\frac{1}{Mx,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) = 2 - \frac{1}{y}.$$

Por tanto, puede tomarse $\mu(x) = e^{2y}/y$. La forma $\mu\omega$ queda exacta y las soluciones pueden expresarse en la forma implícita

$$U(x,y) = xe^{2y} - \ln|y| = C,$$

con C constante.

4 Ecuaciones de Euler y de Bessel

En esta última sección estudiaremos dos ecuaciones lineales de segundo orden que aparecerán en el desarrollo de posteriores lecciones.

4.1 Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes variables

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo (puede ser finito o infinito, cerrado o abierto) y sean P, Q, $R : I \to \mathbb{C}$ funciones continuas. Supondremos además que $P(x) \neq 0$, cualquiera que sea $x \in I$.

Planteamos la EDO

$$P(x)\varphi'(x) + Q(x)\varphi'(x) + R(x)\varphi(x) = 0, \qquad x \in I. \tag{28}$$

Se dice que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal, con coeficientes P, Q y R. La ecuación es homogénea (segundo miembro nulo). Para este tipo de ecuaciones, hay un teorema de existencia y unicidad que las validan como modelos matemáticos, estableciendo que a cada conjunto de datos de entrada (las condiciones iniciales) le corresponde una única respuesta.

Teorema 4 *Fijemos un punto $x_0 \in I$ y dos valores α_0, $\beta_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, en las condiciones anteriores, el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} P(x)\varphi''(x) + Q(x)\varphi'(x) + R(x)\varphi(x) = 0, & x \in I, \\ \varphi(x_0) = \alpha_0, \\ \varphi'(x_0) = \beta_0 \end{cases}$$

admite una única solución $\varphi : I \to \mathbb{C}$

Como la ecuación (28) es lineal, el conjunto S de sus soluciones forma un espacio vectorial. Su dimensión viene determinada por el teorema 4, dado que la aplicación

$$(\varphi(x_0), \varphi'(x_0))^T = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \mapsto \varphi, \tag{29}$$

establece un isomorfismo entre $\mathbb{C}^2$ y S, por lo que la dimensión de S es dos. La independencia de un par de soluciones $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{C}^2$ (y, por tanto, la determinación de una base) puede analizarse a través del llamado determinante wronskiano

$$w(x) = det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ cr\varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x)$$

Se puede comprobar que w satisface la ecuación

$$P(x)w'(x) + Q(x)w(x) = 0,$$

es decir, dado que $P(x) \neq 0, x \in I$,

$$w'(x) = -\frac{Q(x)}{P(x)}w(x) = a(x)w(x),$$

ecuación lineal de solución general

$$w(x) = e^{A(x)}w(x_0), \quad A'(x) = a(x), x_0 \in I.$$

Por tanto, si existe $x_0 \in I$ tal que $w(x_0) \neq 0$, entonces $w(x) \neq 0, x \in I$ y las columnas

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(x_0) \\ \varphi_2'(x_0) \end{pmatrix},$$

son independientes. Dado el isomorfismo (29), se tiene entonces que φ_1 y φ_2 son independientes, y la solución general de (28) es de la forma

$$A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2, \qquad A_1,\, A_2 \in \mathbb{C}.$$

4.1.1 Comportamiento en puntos singulares

La hipótesis $P(x) \neq 0, x \in I$ en el teorema 4 es fundamental. Si P se anula en algunos puntos aislados, es posible que no tengamos una solución definida en todo I. Tales puntos se llaman puntos singulares de (28). En ese caso, el teorema 4 puede aplicarse en intervalos que no contengan puntos singulares. Una situación típica que, en este sentido, podemos encontrar es aquélla en la que P, Q, R son continuas en un intervalo J con $a = minJ \in J$, $P(a) = 0$ y $P(x) \neq 0$ si $x \in J, x \neq a$. Esta situación, en la que el extremo izquierdo del intervalo de definición de las funciones es un punto singular, nos lleva a trabajar en $I = J \backslash \{a\}$ para poder utilizar el teorema 4. Ejemplos de esta circunstancia pueden ser los siguientes:

(i) Ecuación de Euler:

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) + \varphi(r) = 0, \quad r \in I = (0, +\infty),$$

con $P(r) = r^2$.

(ii) Ecuación de Bessel de índice ν:

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) + (r^2 - \nu^2)\varphi(r) = 0, \quad r \in I = (0, +\infty),$$

con $P(r) = r^2$.

(iii) Ecuación de Legendre:

$$(1 - s^2)\varphi''(s) - 2s\varphi'(x) + \nu\varphi(s) = 0, \quad s \in I = (-1, 1),$$

con $P(s) = 1 - s^2$.

Teorema 5 *En las condiciones anteriores, sean φ_1, $\varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ dos soluciones no nulas de (28) y tales que*

$$\lim_{\xi \to a+} |\varphi_1(\xi)| < +\infty, \qquad \lim_{\xi \to a+} |\varphi_2(\xi)| = +\infty.$$

Entonces:

a) El par φ_1, φ_2 es una base del espacio de soluciones de (28) y

b) Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ es una solución de (28) tal que

$$\lim_{\xi \to a+} |\varphi(\xi)| < +\infty,$$

entonces existe $A \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi = A\varphi_1$. (Es decir, las soluciones con límite finito forman un subespacio vectorial de dimensión uno y φ_1 es un generador).

En efecto: si φ_1, φ_2 no formaran base, como son no nulas, serían proporcionales, esto es, existiría un escalar $B \in \mathbb{C}$, $B \neq 0$, tal que $\varphi_1 = B\varphi_2$. Entonces

$$|\varphi_1(\xi)| = |B| \cdot |\varphi_2(\xi)|, \qquad \xi \in I,$$

y tendríamos

$$\lim_{\xi \to a+} |\varphi_1(\xi)| = +\infty,$$

en contra de la hipótesis sobre φ_1. Esto demuestra a). De forma análoga, dada una solución $\varphi : I \to \mathbb{C}$ como en b) y sabiendo ya que φ_1, φ_2 son una base, podremos escribir

$$\varphi(\xi) = A_1\varphi_1(\xi) + A_2\varphi_2(\xi), \qquad \xi \in I,$$

para ciertos coeficientes escalares A_1, $A_2 \in \mathbb{C}$. Si $A_2 \neq 0$, entonces, como

$$|\varphi(\xi)| \geq |A_2| \cdot |\varphi_2(\xi)| - |A_1| \cdot |\varphi_1(\xi)|, \qquad \xi \in I,$$

deduciríamos que

$$\lim_{\xi \to a+} |\varphi(\xi)| = +\infty,$$

en contra de la hipótesis sobre φ en b).

4.2 Ecuaciones de Euler

La ecuación de Euler es

$$ar^2\varphi''(r) + br\varphi'(r) + c\varphi(r) = 0, \tag{30}$$

siendo a b, $c \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$. Estudiamos (30) en el intervalo $I = (0, +\infty)$, pues 0 es un punto singular de la ecuación.

El cambio de variable $r = e^t$ transforma la ecuación para $\varphi(r)$ en la ecuación para $\psi(t) = \varphi(r) = \varphi(e^t)$ del modo siguiente: como

$$\psi'(t) = r\varphi'(r), \quad \psi''(t) = r\varphi'(r) + r^2\varphi''(r),$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= r^2\varphi''(r) + p_0 r\varphi'(r) + q_0\varphi(r) \\ &= a\psi''(t) + (b-a)\psi'(t) + c\psi(t), \end{aligned}$$

que es una ecuación lineal de segundo orden y coeficientes constantes

$$a\psi''(t) + (b-a)\psi'(t) + c\psi(t) = 0, \tag{31}$$

con $p_0 = (b-a)/a, q_0 = c/a$. Siendo $p(z) = z^2 + p_0 z + q_0$ el polinomio característico, y λ_1, λ_2 sus raíces, hay dos posibilidades:

(A) Raíces distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Entonces

$$\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \psi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

son soluciones de (31). Su wronskiano en $t = 0$ satisface

$$w(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0,$$

por lo que ψ_1, ψ_2 forman una base de soluciones. Deshaciendo el cambio de variable, se tiene que, en este caso, toda solución de (30) es de la forma

$$A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2, \qquad A_1,\, A_2 \in \mathbb{C},$$

con $\varphi_1(r) = r^{\lambda_1}, \varphi_2(r) = r^{\lambda_2}$. Si los coeficientes son reales y las raíces fueran complejas, entonces han de ser conjugadas:

$$\lambda_1 = u + iv, \qquad \lambda_2 = u - iv, \qquad u,\, v \in \mathbb{R}.$$

Las nuevas funciones

$$\phi_1(r) = \Re\varphi_1(r) = r^u \cos(v \ln r), \qquad \phi_2(r) = \Im\varphi_1(r) = r^u \sin(v \ln r)$$

forman otra base, pero ya formada por funciones reales.

(B) Raíz doble $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Entonces

$$\psi_1(t) = e^{\lambda t}, \quad \psi_2(t) = te^{\lambda t}$$

son soluciones de (31). Su wronskiano en $t = 0$ satisface

$$w(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

por lo que ψ_1, ψ_2 forman una base de soluciones. Deshaciendo el cambio de variable, se tiene que, en este caso, toda solución de (30) es de la forma

$$A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2, \qquad A_1,\, A_2 \in \mathbb{C},$$

con $\varphi_1(r) = r^{\lambda}, \varphi_2(r) = r^{\lambda} \ln r$.

Este procedimiento, basado en el cambio de variable anterior, puede, una vez conocido, abreviarse ensayando soluciones de la forma $\varphi(r) = r^\lambda$ para cierta $\lambda \in \mathbb{C}$. Los valores de λ que proporcionan solución se obtienen sustituyendo φ en (30)

$$ar^2\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2} + br\lambda r^{\lambda-1} + cr^\lambda = 0,$$

o bien

$$[a\lambda^2 + (b-a)\lambda + c]r^\lambda = 0.$$

Es decir,

$$a\lambda^2 + (b-a)\lambda + c = 0, \tag{32}$$

llamada ecuación auxiliar, y que coincide con la ecuación característica anterior $p(\lambda) = 0$.

Es muy importante observar que tanto funciones potenciales r^λ como la función $\ln r$, si bien son indefinidamente derivables para $r > 0$, pueden tener límite infinito o carecer de límite cuando $r \to 0+$. Si $\lambda = u + iv$, $u \geq 0$, $v = 0$, dicho límite existe y es finito, pero u si no es un entero, entonces las derivadas laterales en el origen se hacen infinitas a partir de cierto orden.

La conclusión es que aunque los coeficientes de la ecuación de Euler son funciones indefinidamente derivables de $r > 0$, como para $r = 0$ tenemos que $P(0) = 0$, entonces $r = 0$, el punto singular de la ecuación, puede ser un punto singular de las soluciones.

Ejemplo 1. La ecuación

$$r^2\varphi''(r) - 4r\varphi'(r) + 4\varphi(r) = 0,$$

tiene por ecuación característica (32)

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

de raíces $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. Entonces

$$\varphi_1(r) = r, \quad \varphi_2(r) = r^4,$$

y la solución general de la ecuación es $\varphi(r) = A_1 r + A_2 r^4$, con A_1, A_2 constantes arbitrarias. La única solución acotada cuando $r \to \infty$ es $\varphi(r) = 0$ y todas las soluciones están acotadas en el punto singular $r = 0$.

Ejemplo 2. La ecuación

$$r^2\varphi''(r) + 2r\varphi'(r) + 4\varphi(r) = 0,$$

tiene por ecuación característica

$$\lambda^2 + \lambda + 4 = 0,$$

de raíces $\lambda_1 = (-1 + i\sqrt{15})/2, \lambda_2 = (-1 - i\sqrt{15})/2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_1(r) &= r^{\lambda_1} = r^{-1/2} e^{i\sqrt{15}\ln r}, \\
\varphi_2(r) &= r^{\lambda_2} = r^{-1/2} e^{i\sqrt{15}\ln r},
\end{aligned}$$

y la solución general de la ecuación es $\varphi(r) = A_1\varphi_1(r) + A_2\varphi_2(r)$, con A_1, A_2 constantes arbitrarias. La única solución acotada cuando $r \to 0$ es $\varphi(r) = 0$ y todas las soluciones están acotadas cuando $r \to \infty$. Una base real de soluciones viene dada por

$$\begin{aligned}
\phi_1(r) &= r^{-1/2} \cos(\sqrt{15}\ln r), \\
\phi_2(r) &= r^{-1/2} \sin(\sqrt{15}\ln r),
\end{aligned}$$

y la solución general puede también escribirse como $\varphi(r) = A_1\phi_1(r) + A_2\phi_2(r)$, con A_1, A_2 constantes arbitrarias.

Ejemplo 3. La ecuación

$$r^2\varphi''(r) + \frac{1}{4}\varphi(r) = 0,$$

tiene por ecuación característica

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0,$$

de raíz doble $\lambda = 1/2$. Entonces

$$\varphi_1(r) = \sqrt{r}, \quad \varphi_2(r) = \sqrt{r}\ln r,$$

y la solución general de la ecuación es $\varphi(r) = A_1\sqrt{r} + A_2\sqrt{r}\ln r$, con A_1, A_2 constantes arbitrarias. La única solución acotada cuando $r \to \infty$ es $\varphi(r) = 0$ y las soluciones acotadas cerca del punto singular $r \to 0$ son de la forma $A_1\sqrt{r}$, con A_1 arbitraria.

4.3 Ecuación de Bessel

4.3.1 Función Γ de Euler

Para $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z > 0$, se define

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{z-1}\, dx.$$

Observemos que la integral tiene sentido pues si $u = \Re z > 0$

$$|\mathrm{e}^{-x} x^{z-1}| = \mathrm{e}^{-x} x^{u-1},$$

función que es integrable tanto a la derecha del origen como en $+\infty$.

Propiedades de la función Γ.

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Re z > 0.$
- $\Gamma(1) = 1.$
- $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \geq 0$ entero.
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$
- $\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n-1)!}\sqrt{\pi}, \quad n \geq 0$ entero.

La función Γ puede extenderse a valores $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z \leq 0$, siempre que z no sea un entero negativo, es decir, para $z \neq 0, -1, -2, \ldots$. Para ello, dado un z de los indicados, comenzamos seleccionando un valor de $m \geq 0$, m entero, tal que $\Re(z+m+1) > 0$ y consideramos el cociente

$$\frac{\Gamma(z+m+1)}{(z+m)(z+m-1)\cdots(z+1)z} \tag{33}$$

(el numerador está ya definido, dado que el argumento tiene parte real positiva, y el denominador no se anula). Si volvemos a (33) con $m+1$ en lugar de m, entonces en el numerador hemos de poner $\Gamma(z+m+2)$. Ahora bien, por la primera propiedad de la función Γ

$$\Gamma(z+m+2) = (z+m+1)\Gamma(z+m+1),$$

y de esta manera queda compensado el efecto del nuevo factor $z+m+1$ que hay que añadir en el denominador. Se deduce que (33) es independiente del entero m considerado y podemos adoptar (33) como definición de $\Gamma(z)$. Notemos que si

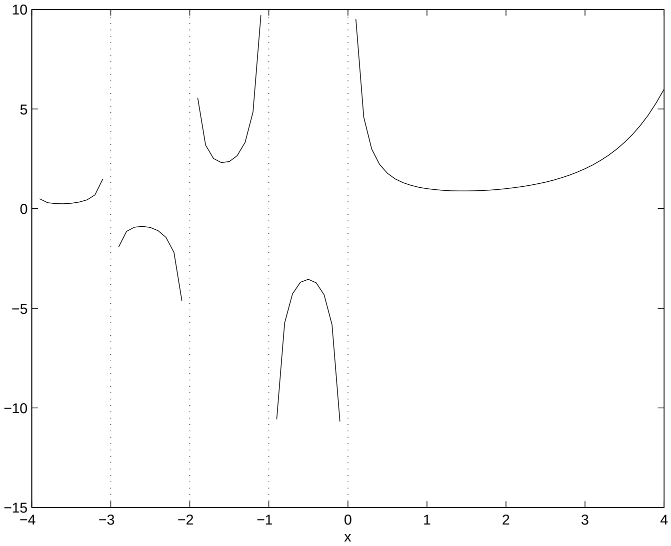


Figura 4: Función $\Gamma(x), x \in \mathbb{R}$.

$\Re z > 0$, tomando $m = 0$ recaemos en la definición original de $\Gamma(z)$. La función Γ así ampliada sigue satisfaciendo la propiedad fundamental

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad z \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots.$$

Se puede demostrar que las únicas singularidades de la función Γ son los enteros negativos $p \leq 0$ y que estos puntos son polos de la función Γ. En consecuencia la función

$$1/\Gamma(z)$$

es entera (definida en todo el plano complejo) y se anula para $z = p \leq 0$ entero (véase Figura 4).

4.3.2 Ecuaciones de Bessel

Dado $\nu \in \mathbb{C}$ con $\Re\nu \geq 0$, la ecuación diferencial de segundo orden (lineal, homogénea)

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) + (r^2 - \nu^2)\varphi(r) = 0, \tag{34}$$

recibe el nombre de ecuación de Bessel de índice $\nu \in \mathbb{C}$. La vamos a estudiar sobre el intervalo $I = (0, +\infty)$, por lo que 0 sería un punto singular de la ecuación. Las soluciones de (34) se llaman con frecuencia funciones cilíndricas de índice ν.

Como $r = 0$ es punto singular de (34), puede haber soluciones no acotadas cuando $r \to 0+$, por lo que no es esperable que $\varphi(r)$ sea desarrollable en serie de potencias en un entorno de $r = 0$. Observemos también que la ecuación (34) puede escribirse

$$\varphi'' + m(r)\varphi'(r) + n(r)\varphi(r) = 0,$$

con $m(r) = 1/r, n(r) = (r^2 - \nu^2)/r^2$. Las funciones $rm(r)$ y $r^2n(r)$ sí son analíticas en un entorno del origen. Además, cuando $r \sim 0$, $rm(r) \sim 1$ y $r^2n(r) \sim -\nu^2$, por lo que las soluciones de (34), escrita en la forma

$$r^2\varphi'' + r^2m(r)\varphi'(r) + r^2n(r)\varphi(r) = 0,$$

se comportan, para r cerca del origen, como las soluciones de la ecuación de Euler

$$r^2\varphi'' + r\varphi'(r) - \nu^2\varphi(r) = 0,$$

cuya ecuación auxiliar es $\lambda^2 - \nu^2 = 0$ y por tanto tiene soluciones que son combinación de las funciones $r^{\pm\nu}$. Esto sugiere la idea de que, a su vez, pueden encontrarse soluciones de (34) de la forma $r^{\pm\nu}$ por una función analítica en el origen. De este modo, podemos ensayar soluciones de la forma

$$\varphi(r) = r^{\pm\nu}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n.$$

para ciertos coeficientes a_n, suponiendo que la serie de potencias es convergente.

Comenzamos estudiando el caso $+\nu$:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= r^{\nu}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^{n+\nu} \\ &= a_0 r^{\nu} + a_1 r^{\nu+1} + a_2 r^{\nu+2} + \cdots + a_n r^{\nu+n} + \cdots. \end{aligned}$$

Recordemos que para derivar una serie de potencias basta tomar la derivada término a término. Por tanto

$$\begin{aligned} r\varphi'(r) &= r\left(a_0\nu r^{\nu-1} + a_1(\nu+1)r^{\nu} + \cdots + a_n(\nu+n)r^{n+\nu-1} + \cdots\right) \\ &= a_0\nu r^{\nu} + a_1(\nu+1)r^{\nu+1} + \cdots + a_n(\nu+n)r^{n+\nu} + \cdots. \end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned} r^2\varphi''(r) &= r^2\left(a_0\nu(\nu-1)r^{\nu-2} + a_1(\nu+1)\nu r^{\nu-1} + \cdots + a_n(\nu+n)(\nu+n-1)r^{n+\nu-2} + \cdots\right) \\ &= a_0\nu(\nu-1)r^{\nu} + a_1(\nu+1)\nu r^{\nu+1} + \cdots + a_n(\nu+n)(\nu+n-1)r^{n+\nu} + \cdots. \end{aligned}$$

Vemos que las series de $r\varphi'(r)$ y de $r^2\varphi''(r)$ preservan la agrupación $a_n r^{n+\nu}$ de la serie original. Resulta pues que

$$\begin{aligned} r^2\varphi''(r) + r\varphi(r) - \nu^2\varphi(r) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n[(\nu+n)(\nu+n-1) + (\nu+n) - \nu^2]r^{n+\nu} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n[(\nu+n)^2 - \nu^2]r^{n+\nu}. \end{aligned}$$

El primer sumando ($n = 0$) es siempre nulo, por lo que

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi(r) - \nu^2\varphi(r) = a_1[(\nu+1)^2 - \nu^2]r^{\nu+1} + \cdots + a_n[(\nu+n)^2 - \nu^2]r^{n+\nu} + \cdots.$$

Para que φ sea solución hemos de imponer que la serie anterior coincida con

$$-r^2\varphi(r) = -a_0 r^{\nu+2} - a_1 r^{\nu+3} - \cdots - a_{n-2} r^{\nu+n} - \cdots.$$

Igualando los coeficientes de las distintas potencias encontramos finalmente

$$a_1[(\nu+1)^2 - \nu^2] = 0$$

y

$$a_n[(\nu+n)^2 - \nu^2] = -a_{n-2}, \qquad n \geq 2.$$

La primera relación implica que $a_1 = 0$, puesto que $\Re\,\nu \geq 0$. La segunda nos dice que

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{[(\nu+n)^2 - \nu^2]} = -\frac{a_{n-2}}{n(2\nu+n)}.$$

Entonces, por una parte todos los términos de índice impar han de ser nulos, al serlo el primero $a_1 = 0$. Por otra parte, para n par, $n = 2k$, $k \geq 1$, tendremos

$$a_{2k} = -\frac{a_{2(k-1)}}{4k(k+\nu)}.$$

Usando esta recurrencia se demuestra por inducción que

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{4^k k!\,(k+\nu)(k+\nu-1)\cdots(1+\nu)}, \qquad k \geq 1.$$

El valor de arranque es a_0 es un parámetro libre. Tomando en particular

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)},$$

se obtiene entonces, para $k \geq 1$,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^\nu k!\, 4^k (k+\nu)(k+\nu-1)\cdots(1+\nu)\Gamma(\nu+1)} = \frac{(-1)^k}{2^\nu 4^k k!\, \Gamma(k+\nu+1)},$$

y finalmente resultará

$$\varphi(r) = r^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^\nu 4^k k!\, \Gamma(k+\nu+1)} r^{2k} = \left(\frac{r}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}.$$

Hasta ahora los cálculos eran formales, pero quedan justificados una vez que se comprueba que la serie de potencias anterior es ciertamente convergente para todo valor de $r > 0$. Definimos entonces la función de Bessel de primera especie (o simplemente función de Bessel) de índice ν por

$$J_\nu(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}.$$

Por su construcción, $J_\nu(r)$ es solución de la ecuación de Bessel (34).

Notemos que cuando $r \to 0+$, la función $J_\nu(r)$ se comporta como $r^\nu a_0$, es decir

$$\left(\frac{r}{2\Gamma(\nu+1)}\right)^\nu$$

y por lo tanto su gráfica, cerca del origen, será muy parecida a la de esta función potencial.

A continuación recopilamos algunas propiedades de las funciones de Bessel.

(1) $\dfrac{d}{dr}(r^{-\nu} J_\nu(r)) = -r^{-\nu} J_{\nu+1}(r)$. En particular, $J_0'(r) = -J_1(r)$.

(2) $\dfrac{d}{dr}(r^{\nu} J_\nu(r)) = r^{\nu} J_{\nu-1}(r)$.

(3) $rJ_{\nu+1}(r) = 2\nu J_\nu(r) - rJ_{\nu-1}(r), \qquad J_{\nu+1}(r) = -2J_\nu'(r) + J_{\nu-1}(r)$

(4) $J_n(-r) = (-1)^n J_n(r), \quad n = 0, 1, \ldots.$

(5) $\int_0^r s^n J_{n-1}(s)ds = r^n J_n(r), \quad n = 1, 2, \ldots$

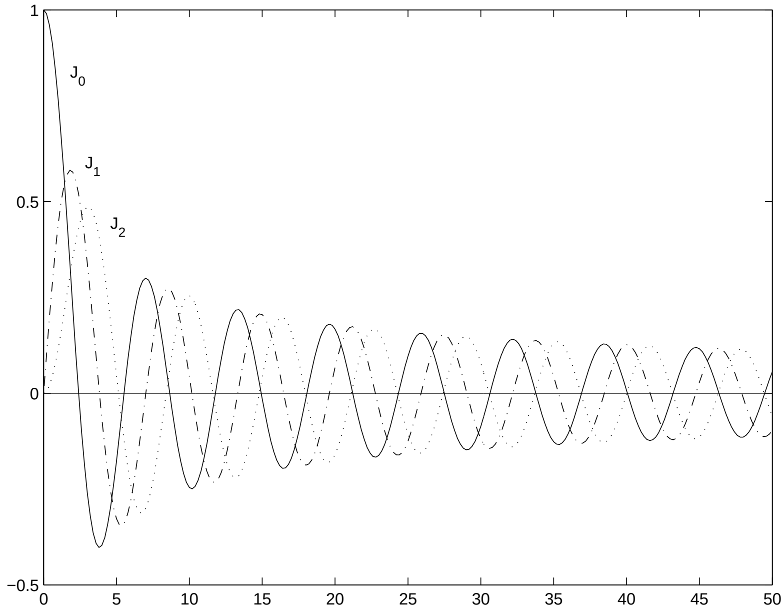


Figura 5: Algunas funciones de Bessel de primera especie con índice entero.

(6) Fórmula integral

$$J_\nu(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\phi - r\sin\phi)d\phi.$$

En particular

$$J_0(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(r\sin\phi)d\phi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(r\cos\theta)d\theta.$$

(7)

$$J_{1/2}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\sin r, \qquad J_{-1/2}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\cos r,$$

$$J_{3/2}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\Big(\frac{\sin r}{r} - \cos r\Big), \qquad J_{-3/2}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\Big(-\frac{\cos r}{r} - \sin r\Big).$$

(8) $J_0(0) = 1, \quad J_\nu(0) = 0, \quad \nu > 0$

(9) $J_0'(0) = 0, \quad J_1'(0) = 1/2 \qquad J_\nu'(0) = 0, \quad \nu > 1$, con

$$\lim_{r\to 0+} J_\nu'(r) = +\infty, \quad 0 < \nu < 1.$$

(10) La función J_{-n} está bien definida cuando en la fórmula se reemplaza n por $-n$, empezando la serie por el primer entero k tal que $-n+k+1>0$. En particular $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x), \quad n=0,1,\ldots$.

(11) Cuando $\nu \in \mathbb{R}$, J_ν, J'_ν tienen un número infinito de ceros reales, todos ellos simples con la posible excepción de $r=0$. Si $\nu \geq 0$, podemos representar los ceros no negativos de $J_\nu(r)$ en forma de sucesión creciente

$$0=\xi_{\nu,0}<\xi_{\nu,1}<\xi_{\nu,2}<\xi_{\nu,3}<\cdots \quad \nu>0,$$
$$0<\xi_{0,1}<\xi_{0,2}<\xi_{0,3}<\cdots \quad \nu=0.$$

De igual forma, los ceros positivos de $J'_\nu(r)$ pueden denotarse

$$0<\eta_{\nu,1}<\eta_{\nu,2}<\eta_{\nu,3}<\cdots \quad \nu>0,$$
$$0=\eta_{0,0}<\eta_{0,1}<\eta_{0,2}<\eta_{0,3}<\cdots \quad \nu=0,$$

con $\eta_{0,s}=\xi_{1,s-1}$, $s=2,3,\ldots$. Se tienen, además, las desigualdades

$$\xi_{\nu,1}<\xi_{\nu+1,1}<\xi_{\nu,2}<\xi_{\nu+1,2}<\ldots$$
$$\nu \leq \eta_{\nu,1}<\xi_{\nu,1}<\eta_{\nu,2}<\xi_{\nu,2}<\ldots$$

Si $\nu \neq 1, 2, \ldots$, entonces tiene sentido considerar la función de Bessel de índice $-\nu$ que se define por

$$J_{-\nu}(r)=\left(\frac{r}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k}.$$

y puede comprobarse que efectivamente la serie converge.

En efecto, para el caso $-\nu$, observemos que las ecuaciones de recurrencia de los coeficientes de la serie toman la forma

$$\begin{aligned} a_1((-\nu+1)^2-\nu^2) &= 0, \\ a_n((-\nu+n)^2-\nu^2) &= -a_{n-2}. \end{aligned}$$

Imaginemos que $\nu=1/2$. Entonces, la primera ecuación se satisface y a_1 sería un parámetro libre. Tomando $a_1=0$, el resto del razonamiento antes expuesto continúa sin impedimentos. Si ν es un múltiplo impar de $1/2$, digamos $\nu=k/2$ con k impar, podemos seguir manteniendo el razonamiento anterior también, pues el problema que antes se daba en la primera ecuación, ahora se presenta en la ecuación k:

$$a_k((-\nu+k)^2-\nu^2)=a_k(-2\nu+k) \;=\; -a_{k-2}=0,$$

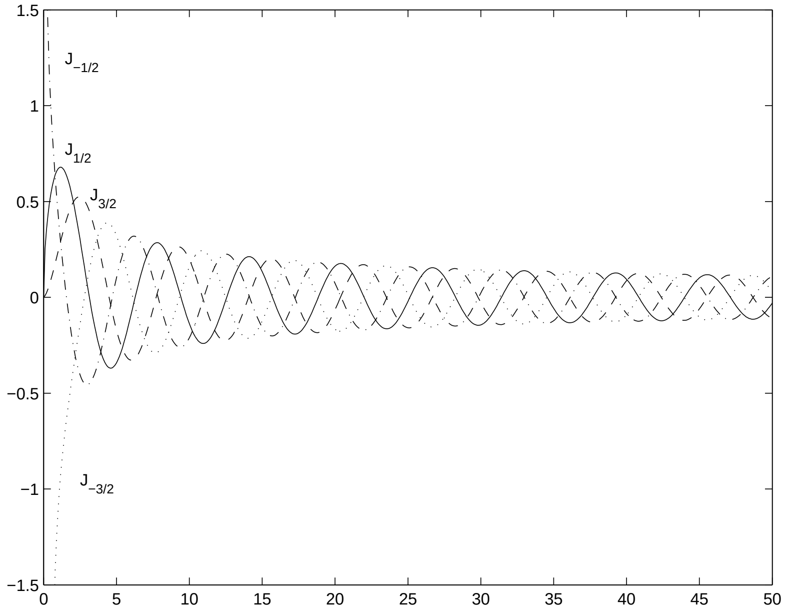


Figura 6: Algunas funciones de Bessel de primera especie con índice fraccionario.

(nótese que de las ecuaciones anteriores, se tiene que $a_{k-2} = 0$) resolviéndose la dificultad haciendo $a_k = 0$. Los únicos casos en los que esta estrategia no es posible se dan cuando ν es múltiplo par de $1/2$, es decir, cuando $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.

Entonces, si $\nu \neq 1, 2, 3, \ldots$, $J_{-\nu}(r)$ también es solución de (34). Por otra parte, cuando $r \to 0+$ la función $J_{-\nu}(r)$ se comporta como

$$\left(\frac{r}{2\Gamma(-\nu + 1)} \right)^{-\nu},$$

siendo su gráfica parecida a la de esta potencial negativa. Tendremos pues

$$\lim_{r \to 0+} |J_{-\nu}(r)| = +\infty.$$

Como J_ν permanece acotada cuando $r \to 0+$, se deduce que

$$J_\nu(r) \quad \text{y} \quad J_{-\nu}(r)$$

forman una base del espacio de soluciones de (34), siempre que ν no sea un entero ≥ 1.

Queda entonces por discutir los casos $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Si $\nu = 0$, claramente

$$J_0(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!k!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} = J_{-0}(r),$$

Si $\nu = p \geq 1$ fuera un entero, entonces $\Gamma(k - p + 1)$ dejaría de estar definida para $k \leq p - 1$ ($k - p + 1$ sería un entero negativo). Lo que se hace en este caso es adoptar

$$\Gamma(k-p+1) = \infty, \qquad \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} = 0, \qquad 0 \leq k \leq p-1.$$

Queda entonces

$$\begin{aligned}
J_{-p}(r) &= \lim_{\nu \to p} J_{-\nu}(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^{-p} \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \\
&= \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k-p} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+p}}{(m+p)!\,\Gamma(m+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2m+p} \\
&= (-1)^p \left(\frac{r}{2}\right)^p \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+p+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2m} \\
&= (-1)^p J_p(r).
\end{aligned}$$

Vemos así que para $\nu = p = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ la función $J_{-p}(r) = (-1)^p J_p(r)$ es linealmente dependiente de $J_p(r)$, por lo que no forman base del espacio de soluciones de (34). En este caso, es necesario encontrar una segunda solución independiente. Surge así la llamada función de Neumann de índice ν, $\Re\nu \geq 0$, (o función de Bessel de segunda especie)

$$N_\nu(r) = \frac{J_\nu(r)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(r)}{\sin\nu\pi}$$

si ν no es un entero ≥ 0, y

$$N_\nu(r) = N_p(r) = \lim_{\mu \to p} \frac{J_\mu(r)\cos\mu\pi - J_{-\mu}(r)}{\sin\mu\pi}.$$

si $\nu = p = 0,\ 1,\ 2, \ldots$. Se puede probar que este proceso de paso al límite está justificado y que $N_\nu(r)$ es siempre solución de la ecuación (34).

Desde luego, si ν no es un entero ≥ 0, las funciones

$$J_\nu(r) \quad \text{y} \quad N_\nu(r)$$

forman una base del espacio de soluciones de la ecuación de Bessel, al formarla $J_\nu(r), J_{-\nu}(r)$. Cuando $\nu = p$ sea un entero ≥ 0, se puede comprobar que

$$\lim_{r \to 0+} |N_p(r)| = +\infty,$$

y, por tanto, $N_p(r)$ es independiente de $J_p(r)$

Como $N_p(r)$ tiende a infinito cuando $r \to 0+$, se deduce que

$$J_p(r), \qquad N_p(r)$$

forman una base del espacio de soluciones de la ecuación de Bessel incluso cuando $\nu = p \geq 0$ sea un entero.

La función de Neumann N_ν se denota en algunos textos por Y_ν. Cuando $\nu \in \mathbb{R}$, Y_ν, Y'_ν tienen un número infinito de ceros reales, todos ellos simples. Para $\nu \geq 0$, denotando a los ceros positivos de $Y_\nu(r)$ en forma de sucesión creciente

$$y_{\nu,1} < y_{\nu,2} < y_{\nu,3} < \cdots,$$

y a los ceros positivos de $Y'_\nu(r)$ por

$$0 < y'_{\nu,1} < y'_{\nu,2} < y'_{\nu,3} < \cdots,$$

se tienen entonces las desigualdades

$$\nu < y_{\nu,1} < y'_{\nu,1} < y_{\nu,2} < y'_{\nu,2} < \cdots$$

EJERCICIOS

Ejercicio 1. En cada uno de los casos, determina si la función dada es una solución de la ecuación diferencial.

$y = \sin x + x^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 + 2,$

$y = e^{2x} - 3e^{-x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0,$

$x = 2e^{3t} - e^{2t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{dx}{dt} + 3x = -2e^{2t},$

$x = \cos(2t), \quad \frac{dx}{dt} + tx = \sin 2t.$

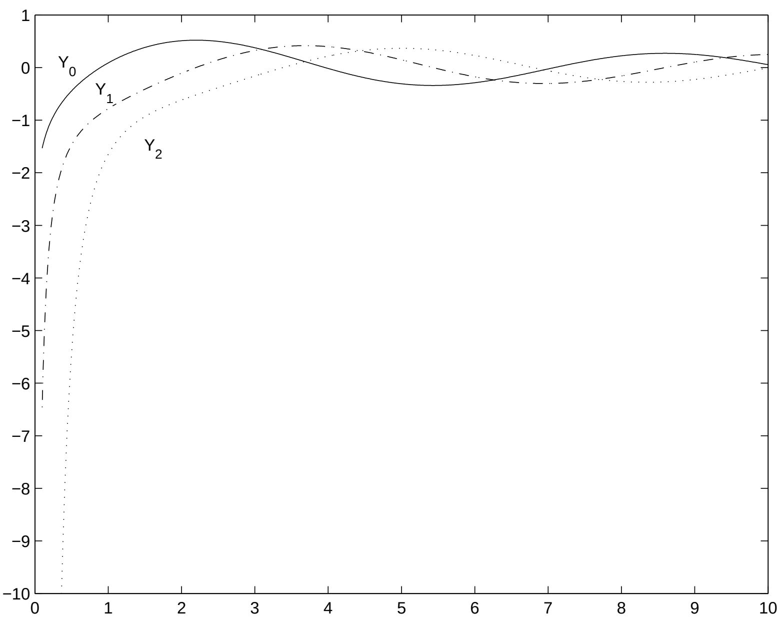


Figura 7: Algunas funciones de Neumann Y_ν con índice entero.

Ejercicio 2. En cada uno de los casos, determina si la relación dada es una solución implícita de la ecuación diferencial.

$x^2 + y^2 = 4, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},$

$y - \ln y = x^2 + 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-1},$

$e^{xy} + y = x - 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy}-y}{e^{-xy}+x},$

$\sin y + xy - x^3 = 2, \quad y'' = \frac{6xy'+(y')^3 \sin y - 2(y')^2}{3x^2-y}.$

Ejercicio 3. Construye un campo de direcciones para cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes.

$y' = x^2 + y^2, \quad y' = -\frac{y}{2}, \quad y' = x^2 - y^2,$

$y' = y^2, \quad y' = \sin y, \quad y' = x - y.$

Ejercicio 4. Determina para qué valores de m, la función $y(x) = x^m$ es una solución de la ecuación dada.

$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0, \qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 5y = 0.$

Ejercicio 5. Calcula la solución general de las ecuaciones siguientes:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{y^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy^3}, \quad \frac{dy}{dx} = y(2 + \sin x),$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2(1+y^2)$, $\frac{dy}{dx} + y^2 = y$, $\frac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y$.

Ejercicio 6. Calcula la solución de los siguientes problemas de valores iniciales.
$\frac{dy}{dx} = 8x^3 e^{-2y}$, $y(1) = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2y+1}$, $y(0) = -1$,
$\frac{dy}{dx} = x^3(1-y)$, $y(0) = 3$, $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y+1}\cos x$, $y(\pi) = 0$.

Ejercicio 7. Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones.
$x^2\frac{dy}{dx} = xy + x^2 e^{y/x}$, $(x+2y)\frac{dy}{dx} = y$, $xy^2\frac{dy}{dx} = x^3 + y^3$,
$(x^2-y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$, $x\frac{dy}{dx} = y + 2\sqrt{xy}$, $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2+y^2}$.

Ejercicio 8. Calcula la solución de los siguientes problemas de valores iniciales.
$x\frac{dy}{dx} + y = 3xy$, $y(1) = 0$; $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$, $y(0) = -2$; $\frac{dy}{dx} = (1-y)\cos x$, $y(\pi) = 2$;
$(1+x)\frac{dy}{dx} + y = \cos x$, $y(0) = 1$; $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$, $y(0) = 0$.

Ejercicio 9. Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones.
$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+y} - 1$, $\frac{dy}{dx} = (x+y+2)^2$,
$\frac{dy}{dx} = (x-y+5)^2$, $(x+y-1) + (y+x-5)\frac{dy}{dx} = 0$.

Ejercicio 10. Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones.
$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}y^3$, $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2y^2$, $\frac{dy}{dx} + y = e^x y^{-2}$,
$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x-2} = 5(x-2)y^{1/2}$, $\frac{dy}{dx} + y^3 x + \frac{y}{x} = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2yx}{x^2}$.

Ejercicio 11. Halla la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

(a) $x' + 3x = t\exp(-2t)$,

(b) $x' - 2x = t^2\exp(2t)$,

(c) $y' + y = x\exp(-x) + 1$,

(d) $\dot{x} + (1/t)x = 3\cos 2t$, $t > 0$,

(e) $y' - y = 2\exp(x)$,

(f) $xy' + 2y = \sin x$, $x > 0$.

Ejercicio 12. Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales:

(a) $y' - y = 2x\exp(2x)$, $y(0) = 1$,

(b) $y' + 2y = x\exp(-2x)$, $y(1) = 0$,

(c) $\dot{x} + x = 1/(1+t^2)$, $x(0) = 0$,

(d) $y' + (2/x)y = (\cos x)/x^2, \quad y(\pi) = 0, \quad x > 0,$

(e) $y' - 2y = \exp(2x), \quad y(0) = 2,$

(f) $t\dot{y} + 2y = \sin t, \quad y(\pi/2) = 1.$

Ejercicio 13. Halla las soluciones de

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\exp(y)-x},$

(b) $\frac{dy}{dx} = \sin(x - y),$

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x\cos(\frac{y}{x^2}).$

Ejercicio 14. Integra las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

(a) $dy/dx = x^2/y,$

(b) $dy/dx = x^2/[y(1 + x^3)],$

(c) $y' + y^2 \sin x = 0,$

(d) $y' = 1 + x + y^2 + xy^2,$

(e) $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y),$

(f) $xy' = (1 - y^2)^{1/2},$

(g) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-\exp(-x)}{y+\exp(y)},$

(h) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}.$

Ejercicio 15. Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales:

(a) $\sin 2x\ dx + \cos 3y\ dy = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/3,$

(b) $xdx + ye^{-x}dy = 0, \quad y(0) = 1,$

(c) $dr/d\theta = r, \quad r(0) = 2,$

(d) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y+x^2y} \quad y(0) = -2,$

(e) $dy/dx = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1,$

(f) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+2y} \quad y(2) = 0.$

Ejercicio 16. Integra la ecuación $dy/dx = (ax + by)/(cx + dy)$ con a, b, c, d constantes.

Ejercicio 17. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones son exactas y resuelva las que los sean.

(a) $(2x+3)+(2y-2)y'=0$.

(b) $(2x+4y)+(2x-2y)y'=0$.

(c) $(9x^2+y-1)-(4y-x)y'=0$.

(d) $(2xy^2+2y)+(2x^2y+2x)y'=0$.

(e) $\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by}{bx+cy}$.

(f) $\frac{dy}{dx}=-\frac{ax-by}{bx-cy}$.

(g) $(e^x\sin y-2y\sin x)dx+(e^x\cos y+2\cos x)dy=0$.

(h) $(e^x\sin y+3y)dx-(3x-e^x\sin y)dy=0$.

(i) $(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$.

(j) $\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+(\log x-2)dy=0$.

(k) $(x\log y+xy)dx+(y\log x+xy)dy=0$.

(l) $\frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}+\frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$.

Ejercicio 18. Prueba que las siguientes ecuaciones no son exactas, pero lo son tras multiplicar por el factor integrante que se indica. Integre las ecuaciones.

(a) $x^2y^3+x(1+y^2)y'=0$, $\mu=1/(xy^3)$.

(b) $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$, $\mu=ye^x$.

(c) $y\,dx+(2x-ye^y)\,dy=0$, $\mu=y$.

Ejercicio 19. Halla un factor integrante e integre.

(a) $(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$.

(b) $y'=e^{2x}+y-1$.

(c) $dt+\left(\frac{t}{x}-\sin x\right)dx=0$.

(d) $y\,dx+(2xy-e^{-2y})\,dy=0$.

(e) $e^tdt+(e^t\cot x+2x\csc x)dx=0$.

Ejercicio 20. Integra las ecuaciones

(a) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$.

(b) $2y\,dx - x\,dy = 0$.

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$.

(d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$.

(e) $\frac{dy}{dx} = \frac{4y-3x}{2x-y}$.

(f) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$.

(g) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y}$.

(h) $(x^2 + 3xy + y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$.

Ejercicio 21. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $(-3x + y + 6)dx + (x + y + 2)dy = 0$.

(b) $(2x + y + 4)dx + (x - 2y - 2)dy = 0$.

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x-y+5}$.

Ejercicio 22. Integra las siguientes ecuaciones de Bernouilli:

(a) $\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$.

(b) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x-2} = 5(x-2)y^{1/2}$.

(c) $\frac{dy}{dx} + y^3x + y = 0$.

Ejercicio 23. (a) Prueba que si $(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})/(Qy - Px)$ es una función $g(z)$ del producto $z = xy$, entonces $\mu(z) = exp(\int g(z)dz)$ es un factor integrante de la ecuación $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

(b) Halla una condición similar para que la ecuación admita un factor integrante que dependa sólo de la combinación $x + y$.

(c) Aplica los apartados anteriores para integrar la ecuación $(y^2+xy+1)dx+(x^2+xy+1)dy = 0$ de dos formas distintas. Intente congraciar ambos resultados.