GRADO INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS DE TELECOMUNICACIÓN
GRADO INGENIERÍA DE SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN
GRADO INGENIERÍA TELEMÁTICA

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Introducción a la Teoría de Funciones de Variable Compleja
Cuestiones y Problemas Resueltos

Se presentan algunas cuestiones y problemas resueltos relativos a la *teoría de funciones de variable compleja.* Todos ellos han sido propuestos en exámenes de la asignatura Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería I impartida en el primer curso de los estudios de Ingeniería Superior de Telecomunicación de la Universidad de Valladolid.

Examen Extraordinario – 16 de Julio de 2010

1.- Calcular el valor de la siguiente integral: $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\mathrm{Sh}(z)}{z^8}\, dz\,.$

Solución: La función $f(z) = \mathrm{Sh}(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, Aplicando la fórmula integral de Cauchy se tiene que

$$\int_{|z|=4} \frac{\mathrm{Sh}(z)}{z^8}\, dz = \frac{2\pi i}{7!}\, f^{(7)}(0) = \frac{2\pi i}{7!}.$$

Es sencillo comprobar que $f^{(7)}(z) = \mathrm{Ch}(z)$, cuyo valor en 0 es 1.

Nota: si para resolver esta cuestión se hace uso del teorema de los residuos, obsérvese que

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{\mathrm{Sh}(z)}{z^8}, 0\Big) = \frac{f^{(7)}(0)}{7!} = \frac{1}{7!}\,.$$

2.- Calcular el desarrollo de Laurent en un disco punteado centrado en $z_0 = 0$ de la función $f(z) = \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{(z-2)^2}$. Deducir el valor del residuo de f en 0.

Solución: Recordemos que si $|w| < 1$, se tiene que $\dfrac{1}{(1-w)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)w^n$. Entonces, si $|z| < 2$ (lo que implica que $|z/2| < 1$), se tiene que

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{1}{2^2}\,\frac{1}{(1-(z/2))^2} = \frac{1}{2^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Big(\frac{z}{2}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{2^{n+2}}.$$

Por lo tanto, el desarrollo de Laurent en un disco punteado centrado en $z_0 = 0$ de f es

$$f(z) = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}\, z^n \quad \text{si } 0 < |z| < 2,$$

y $\mathrm{Res}(f, 0) = 2$ (el coeficiente que multiplica a $1/z$).

3.- Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$. Se supone que la función suma $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < R$, verifica la ecuación diferencial

$$(1-z^2)f''(z) - 4zf'(z) - 2f(z) = 0 \quad \text{si } |z| < R,$$

con condiciones iniciales $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$.

i) Probar que $a_{n+2} - a_n = 0$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Deducir que $a_{2n} = 0$ y $a_{2n+1} = 2$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

ii) Calcular el radio de convergencia R de la serie de potencias y la función suma f.

Solución: i) La serie de potencias puede derivarse término a término y, si $|z| < R$, se tiene que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \quad f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2}\,.$$

Sustituimos estas expresiones en la ecuación diferencial, operamos y agrupamos términos para llegar a

$$(1-z^2)\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)z^{n-2} - 4z\sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)z^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)z^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)(a_{n+2}-a_n)z^n = 0\,.$$

Puesto que una serie de potencias es la función nula si, y sólo si, todos los coeficientes son cero, tenemos la siguiente relación de recurrencia para los coeficientes a_n:

$$a_{n+2} - a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Finalmente, las condiciones iniciales se escriben en términos de los coeficientes como

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0, \quad f'(0) = 2 \Leftrightarrow a_1 = 2\,.$$

De la relación de recurrencia y las condiciones iniciales, razonando por inducción se deduce el resultado:

$$a_{2n} = 0 \quad a_{2n+1} = 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ii) Del apartado anterior se deduce que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2z^{2n+1} = 2z\sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n.$$

Se trata de una serie geométrica de razón z^2 que converge si, y sólo si, $|z^2| < 1$, o equivalentemente, si $|z| < 1$. Por tanto, el radio de convergencia de la serie es $R = 1$ y su suma

$$f(z) = 2z\frac{1}{1-z^2}\,, \quad |z| < 1\,,$$

puesto que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w}$ para $|w| < 1$.

4.- Sea a un número real distinto de cero.

i) Probar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(t+ia)}{\cos(t+ia)}\,dt = -\int_{|z|=1} \frac{z^2 - e^{2a}}{(z^2+e^{2a})\,z}\,dz.$

ii) Usando el apartado anterior, probar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{tg}(t+ia)\,dt = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } a > 0; \\ -2\pi i & \text{si } a < 0. \end{cases}$

Solución: **i)** Al parametrizar la circunferencia $|z| = 1$ en el plano complejo por $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, y operar, obtenemos la igualdad pedida:

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2 - e^{2a}}{(z^2+e^{2a})\,z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i2t} - e^{2a}}{(e^{i2t}+e^{2a})\,e^{it}}\,ie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-(it+a)}}{e^{-(it+a)}}\,\frac{e^{i2t} - e^{2a}}{(e^{i2t}+e^{2a})}\,i\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{(it-a)} - e^{-(it-a)}}{e^{(it-a)} + e^{-(it-a)}}\,i\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(t+ia)} - e^{-i(t+ia)}}{e^{i(t+ia)} + e^{-i(t+ia)}}\,i\,dt = -\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(t+ia)}{\cos(t+ia)}\,dt\,.$$

ii) Pongamos

$$f(z) = \frac{z^2 - e^{2a}}{(z^2+e^{2a})\,z}\,.$$

La función f es racional y sus singularidades son los valores complejos que anulan el denominador, esto es, $z_0 = 0$, $z_1 = ie^a$ y $z_2 = -ie^a$. El numerador no se anula en estos puntos y las tres singularidades son polos simples de f. Los correspondientes residuos son

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \left.\frac{z^2 - e^{2a}}{(z^2+e^{2a})}\right|_{z=0} = -1\,,\ \operatorname{Res}(f, z_1) = \left.\frac{z^2 - e^{2a}}{(z+ie^a)\,z}\right|_{z=ie^a} = 1\,,\ \operatorname{Res}(f, z_2) = \left.\frac{z^2 - e^{2a}}{(z-ie^a)\,z}\right|_{z=-ie^a} = 1\,.$$

Puesto que

$$|ie^a| = |-ie^a| = |e^a| \begin{cases} > 1 & \text{si } a > 0, \\ < 1 & \text{si } a < 0, \end{cases}$$

el teorema de los residuos implica que

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = \begin{cases} 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_0) = -2\pi i & \text{si } a > 0; \\ 2\pi i \sum_{j=0}^{3} \mathrm{Res}(f, z_j) = 2\pi i & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

El resultado se obtiene entonces de la igualdad del apartado anterior.

Examen Final – 7 de Junio de 2010

5.- Encontrar los puntos en los cuales es derivable la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(x+iy) = (2x^2 + y) + i(y^2 - x), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución: Las partes real e imaginaria de f,

$$u(x,y) = 2x^2 + y, \quad v(x,y) = y^2 - x,$$

son de tipo polinómico y, por tanto, definidas y diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Basta entonces comprobar las condiciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x = \frac{\partial v}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 = -\frac{\partial v}{\partial x} = 1,$$

las cuales se verifican en los puntos de la forma $z = x + iy = x + i2x$, $(x \in \mathbb{R})$. Sólo en estos puntos f es derivable.

6.- Determinar el radio de convergencia y calcular la suma de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(2i)^n} z^n .$$

Solución: Si ponemos $a_n = \dfrac{n+1}{n(2i)^n}$, el radio de convergencia es

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n2^n}}{\frac{n+2}{(n+1)2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2\, 2}{n(n+2)} = 2.$$

Puesto que $\dfrac{1}{1-w} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ y $\log(1+w) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} w^n$, para $|w| < 1$, la suma de la serie coincide con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(2i)^n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{z}{2i}\Big)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Big(\frac{z}{2i}\Big)^n =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{z}{2i}} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Big(-\frac{z}{2i}\Big)^n = \frac{\frac{z}{2i}}{1-\frac{z}{2i}} - \log\Big(1 - \frac{z}{2i}\Big).$$

7.- Calcular la integral

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{Ch}(z)}{z^2(z+1+i)}\,dz\,,$$

siendo Γ el borde del cuadrado de vértices $1, i, -1, -i$.

Solución: La función $f(z) = \dfrac{\mathrm{Ch}(z)}{z+1+i}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-1-i\}$, abierto que contiene al cuadrado de vértices $1, i, -1, -i$ y su frontera Γ. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{Ch}(z)}{z^2(z+1+i)}\,dz = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0).$$

Puesto que $f'(z) = \dfrac{(z+1+i)\,\mathrm{Sh}(z) - \mathrm{Ch}(z)}{(z+1+i)^2}$, se tiene que $f'(0) = \dfrac{-1}{(1+i)^2} = \dfrac{i}{2}$ y el valor de la integral es $-\pi$.

8.- Calcular

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x(x^2+4)^2}\,dx\,.$$

Solución: Se tiene que

$$VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x^2+4)^2}\,dx=\operatorname{Im}\Big(VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+4)^2}\,dx\Big).$$

La función $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$ está definida y es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0,\pm 2i\}$ y satisface la condición (4) del apartado 4.9 del Tema 8. Además, la singularidad de f en el eje real, $z_0=0$, es un polo simple. De acuerdo con el apartado 4.11 del Tema 8, existe el valor principal de Cauchy de $e^{ix}f(x)$ y (aquí $\omega=-1$)

$$VP\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix}f(x)\,dx=2\pi i\operatorname{Res}(e^{ix}f(x),2i)+\pi i\operatorname{Res}(e^{ix}f(x),0).$$

De la Proposición 3.7 del Tema 8 se deduce que

$$\operatorname{Res}(e^{ix}f(x),2i)=\frac{\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{z(z+2i)^2}\Big|_{z=2i}}{1!}=\frac{-e^{-2}}{16},\quad \operatorname{Res}(e^{ix}f(x),0)=\frac{\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\Big|_{z=0}}{0!}=\frac{1}{16}.$$

Por tanto,

$$VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x^2+4)^2}\,dx=\operatorname{Im}\Big(2\pi i\frac{-e^{-2}}{16}+\pi i\frac{1}{16}\Big)=-\frac{\pi e^{-2}}{8}+\frac{\pi}{16}.$$

9.- Sea $f(z)=\dfrac{1}{z^2\operatorname{sen}(\pi z)}$.

i) Estudiar las singularidades de f.

ii) Probar que $\operatorname{Res}(f,k)=\dfrac{(-1)^k}{\pi k^2}$ si $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$.

iii) Sea Γ_n el borde del rectángulo de vértices

$$\big(n+\frac{1}{2}\big)+in,\ -\big(n+\frac{1}{2}\big)+in,\ -\big(n+\frac{1}{2}\big)-in \text{ y } \big(n+\frac{1}{2}\big)-in.$$

Se sabe que $\operatorname{Res}(f,0)=\dfrac{\pi}{6}$. Probar que $\displaystyle\int_{\Gamma_n}f(z)\,dz=2\pi i\Big(\frac{\pi}{6}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\pi k^2}\Big)$.

iv) Sea $n\in\mathbb{N}$. Probar que para todo $z\in\mathbb{C}$ con $|\operatorname{Im}(z)|=n$ se tiene que

$$|\operatorname{sen}(\pi z)|\geq\frac{e^{\pi n}-e^{-\pi n}}{2}.$$

v) Sea $n\in\mathbb{N}$. Usando la forma binómica del seno, probar que para todo $z\in\mathbb{C}$ con $|\operatorname{Re}(z)|=n+\frac{1}{2}$ se tiene que

$$|\operatorname{sen}(\pi z)|=\operatorname{Ch}(\pi y)\geq 1,\quad y=\operatorname{Im}(z).$$

vi) Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n}f(z)\,dz=0,$$

y deducir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

Solución: i) La función $f(z)=\dfrac{1}{z^2\operatorname{sen}(\pi z)}$ es cociente de dos funciones, $g(z)=1$ y $h(z)=z^2\operatorname{sen}(\pi z)$, holomorfas en $\mathbb{C}$. El denominador $h(z)=z^2\operatorname{sen}(\pi z)$ se anula si, y sólo si, $z=k$ con $k\in\mathbb{Z}$. Entonces f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, es decir, los puntos de $\mathbb{Z}$ son singularidades aisladas de f.

Obviamente, la función g no tiene ceros. Por otro lado,

$$\begin{aligned}h'(z)&=2z\operatorname{sen}(\pi z)+\pi z^2\cos(\pi z);\\ h''(z)&=2\operatorname{sen}(\pi z)+4\pi z\cos(\pi z)-\pi^2z^2\operatorname{sen}(\pi z);\\ h'''(z)&=6\pi\cos(\pi z)-6\pi^2z\operatorname{sen}(\pi z)-\pi^3z^2\cos(\pi z).\end{aligned}$$

Por tanto, $z_0=0$ es un cero de orden 3 de h, puesto que $h(0)=h'(0)=h''(0)=0$, $h'''(0)=6\pi\neq 0$, y en consecuencia, es un polo de orden 3 de f; de forma análoga $z_k=k$, con $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$, es un cero de orden 1 de h, puesto que $h(k)=0$, $h'(k)=\pi k^2\cos(\pi k)=\pi k^2(-1)^k\neq 0$, y en consecuencia, es un polo simple de f.

ii) Las observaciones y cálculos realizados en el apartado anterior nos permiten aplicar la proposición 3.9 del Tema 8 y concluir que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, se tiene que

$$\operatorname{Res}(f, k) = \frac{g(k)}{h'(k)} = \frac{1}{\pi\, k^2 (-1)^k} = \frac{(-1)^k}{\pi\, k^2}.$$

iii) Es claro que se puede aplicar el teorema de los residuos: la función f es holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en los puntos de $\mathbb{Z}$, que son todos singularidades aisladas de f; para cada $n \in \mathbb{N}$ la curva Γ_n no contiene a ninguna de las singularidades y es la frontera del dominio de Jordan $D_n = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| < n + \frac{1}{2},\ |\operatorname{Im}(z)| < n\}$ (es un rectángulo). Puesto que las singularidades de f que están en el interior de D_n son $-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_n} f(z)\, dz &= 2\pi i \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}(f, k) = 2\pi i \Big(\sum_{k=-n}^{-1} \operatorname{Res}(f, k) + \operatorname{Res}(f, 0) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, k) \Big) \\ &= 2\pi i \left(\frac{\pi}{6} + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\pi k^2} \right),\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que $\operatorname{Res}(f, -k) = \operatorname{Res}(f, k) = \frac{(-1)^k}{\pi k^2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

iv) Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $z \in \mathbb{C}$ con $|\operatorname{Im}(z)| = n$, se tiene que

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen}(\pi z)| &= \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \right| \geq \frac{\big||e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|\big|}{2} \\ &= \frac{\left|e^{\operatorname{Re}(i\pi z)} - e^{\operatorname{Re}(-i\pi z)}\right|}{2} = \frac{\left|e^{-\pi \operatorname{Im}(z)} - e^{\pi \operatorname{Im}(z)}\right|}{2} = \frac{e^{\pi n} - e^{-\pi n}}{2}.\end{aligned}$$

v) Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $z \in \mathbb{C}$ con $|\operatorname{Re}(z)| = n + \frac{1}{2}$, entonces $z = \left(n + \frac{1}{2}\right) + iy$ con $y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$|\operatorname{sen}(\pi z)| = \Big|\operatorname{sen}\Big((\pi\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\Big) \operatorname{Ch}(\pi y) + i \cos\Big((\pi\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\Big) \operatorname{Sh}(\pi y)\Big| = \operatorname{Ch}(\pi y) \geq 1,$$

dado que

$$\operatorname{sen}\Big((\pi\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\Big) = (-1)^n \quad \text{y} \quad \cos\Big((\pi\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\Big) = 0.$$

Recuérdese que $\operatorname{Ch}(t) \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

vi) Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $z \in \Gamma_n$ se tiene que $|\operatorname{Im}(z)| = n$ o $|\operatorname{Re}(z)| = n + \frac{1}{2}$. Esto implica que $|z| \geq n$ y, en virtud de los dos apartados anteriores, que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{n^2 \min\{1, \frac{e^{\pi n} - e^{-\pi n}}{2}\}} = \frac{1}{n^2}.$$

Como la longitud de Γ_n es igual a $8n + 2$, entonces

$$\left| \int_{\Gamma_n} f(z)\, dz \right| \leq \frac{8n + 2}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De donde se deduce que $\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} f(z)\, dz = 0$.

Si tomamos límites en la igualdad obtenida en el apartado iii) se tiene que

$$0 = 2\pi i \left(\frac{\pi}{6} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k^2} \right),$$

de donde se deduce la igualdad pedida.

Examen Extraordinario – 4 de Septiembre de 2009

10.- Sea Γ el cuadrado de vértices 1, i, -1, $-i$. Evaluar la integral

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos(z) + \operatorname{Ch}(z)}{z^3}\, dz.$$

Solución: Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función holomorfa dada por

$$f(z) = \cos(z) + \operatorname{Ch}(z).$$

Puesto que Γ es el borde de un dominio de Jordan D y $0 \in D$, se puede aplicar la fórmula integral de Cauchy para obtener que

$$\int_\Gamma \frac{\cos(z) + \mathrm{Ch}(z)}{z^3}\, dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-0)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = 0.$$

11.- Sea $R > 0$ y sea f una función holomorfa en $B(0,R)$ tal que

$$f''(z) - 2zf'(z) - 2f(z) = 0, \qquad f(0) = 1,\ f'(0) = 0.$$

Si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es el desarrollo en serie de Taylor de f en $z_0 = 0$, demostrar que

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \qquad (n+2)a_{n+2} - 2a_n = 0,\ n = 0,1,2,\ldots$$

Solución: Sabemos que $a_0 = f(0) = 1$ y $a_1 = f'(0) = 0$. Además, la ecuación $f''(z) - 2zf'(z) - 2f(z) = 0$ se puede escribir en términos de la serie de potencias como

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n - 2z\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0\,, z \in B(0,R)\,,$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n\big)z^n = 0\,, z \in B(0,R)\,.$$

Por el principio de identidad para series de potencias se deduce que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n = (n+1)\big((n+2)a_{n+2} - 2a_n\big) = 0\,, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

y por tanto $(n+2)a_{n+2} - 2a_n = 0$, para $n = 0,1,2,\ldots$

12.- Probar que existe y calcular el valor del siguiente valor principal de Cauchy:

$$VP\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)\,(x-\pi)}\, dx\,.$$

Solución: Es claro que se puede aplicar la fórmula 4.11.1 de los apuntes de clase. Obsérvese que si se considera la función f dada por

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)\,(z-\pi)},$$

ésta resulta ser una función racional cuyo numerador es una función constante y cuyo denominador es un polinomio de grado 3 (esto implica que f verifica la condición (4) de los apuntes); por tanto es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{\pi, i, -i\}$. Además, las tres singularidades aisladas de f son polos simples. Puesto que π es la única singularidad real e i es la única singularidad en el semiplano superior (tomamos $\omega = -1 < 0$) se tiene que:

$$VP\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x)\, dx = 2\,\pi\, i\,\mathrm{Res}(e^{iz}f(z), i) + \pi\, i\,\mathrm{Res}(e^{i\omega z}f(z), \pi)\,.$$

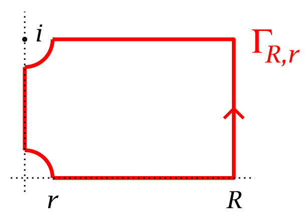
En este caso el cálculo de ambos residuos es sencillo:

$$\mathrm{Res}(e^{iz}f(z), i) = \left.\frac{e^{iz}}{(z+i)\,(z-\pi)}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i\,(i-\pi)};$$

$$\mathrm{Res}(e^{iz}f(z), \pi) = \left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)}\right|_{z=\pi} = \frac{-1}{\pi^2+1};$$

y para concluir sólo hay que sustituir estos valores en la fórmula anterior.

13.- Para cada par de números reales R, r tales que $0 < r < R$ se considera la curva $\Gamma_{R,r}$ de la figura.



Sea f la función dada por

$$f(z) = \frac{e^{\pi z/2}}{\mathrm{Sh}(\pi z)}\,.$$

i) Estudiar las singularidades de f.

ii) Si para $R > 0$, Γ_R es el segmento que une los puntos R y $R + i$, demostrar que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0\,.$$

iii) Si para cada $r > 0$, $C_{1,r}$ y $C_{2,r}$ son los arcos de circunferencia que forman parte de la curva $\Gamma_{R,r}$ centrados en 0 y en i, respectivamente, calcular

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{C_{1,r}} f(z)\,dz \quad \text{y} \quad \lim_{r\to 0^+} \int_{C_{2,r}} f(z)\,dz\,.$$

iv) Admitiendo la convergencia de las integrales impropias, deducir la igualdad

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)}\,dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \Big(\frac{1}{2\,\mathrm{sen}(\pi x/2)} - \frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)}\Big)\,dx\,.$$

Solución: i) La función f es cociente de dos funciones holomorfas en $\mathbb{C}$. El numerador $g(z) = e^{\pi z/2}$ no se anula en ningún punto. El denominador $h(z) = \mathrm{Sh}(\pi z)$ se anula en los puntos de la forma $z_k = ik$, $k \in \mathbb{Z}$, que son ceros de orden 1 puesto que $h'(z_k) = \pi\ \mathrm{Ch}(ik\pi) \neq 0$. Así pues, cada z_k es un polo simple de f y estos puntos son sus únicas singularidades.

ii) Para calcular este límite vamos a utilizar la propiedad 2.4.iii del Tema 7,

$$\Big|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\Big| \leq \sup_{z\in\Gamma_R} |f(z)|\,\mathrm{long}(\Gamma_R)\,.$$

Observemos que para todo $R > 0$ se verifica que $\mathrm{long}(\Gamma_R) = 1$. Además, $\mathrm{Re}(z) = R$ si $z \in \Gamma_R$ y, por tanto,

$$|f(z)| = \frac{2\,|e^{\pi z/2}|}{|e^{\pi z} - e^{-\pi z}|} \leq \frac{2\,|e^{\pi z/2}|}{||e^{\pi z}| - |e^{-\pi z}||} = \frac{2\,e^{\pi R/2}}{e^{\pi R} - e^{-\pi R}} = \frac{2}{e^{\pi R/2} - e^{-3\pi R/2}}, \quad (z \in \Gamma_R).$$

Tenemos entonces que, para cada $R > 0$,

$$0 \leq \Big|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\Big| \leq \frac{2}{e^{\pi R/2} - e^{-3\pi R/2}}\,.$$

Puesto que la última expresión tiende hacia 0 cuando $R \to \infty$, del criterio del sandwich se sigue que

$$\lim_{R\to\infty} \Big|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\Big| = 0,$$

lo que es equivalente a que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0.$

iii) Para cada $r > 0$, ambos arcos de circunferencia, $C_{1,r}$ y $C_{2,r}$, recorren un ángulo fijo de amplitud $\pi/2$ en sentido negativo (horario) y sus centros, $z_0 = 0$ y $z_1 = i$, son polos simples de f. Podemos aplicar entonces el lema de Jordan (lema 4.5 del Tema 8) para calcular ambos límites. Por el apartado (i) anterior y la proposición 3.9 del Tema 8, los residuos de f en z_0 y z_1 son

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{g(0)}{h'(0)} = \frac{e^{\pi 0/2}}{\pi\ \mathrm{Ch}(\pi 0)} = \frac{1}{\pi}, \quad \mathrm{Res}(f,i) = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{e^{\pi i/2}}{\pi\ \mathrm{Ch}(\pi i)} = \frac{i}{-\pi}.$$

Por el lema de Jordan,

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{C_{1,r}} f(z)\,dz = -\frac{\pi}{2}\,i\,\mathrm{Res}(f,0) = \frac{-i}{2}, \quad \lim_{r\to 0^+} \int_{C_{2,r}} f(z)\,dz = -\frac{\pi}{2}\,i\,\mathrm{Res}(f,i) = \frac{-1}{2}.$$

iv) Para $0 < r < \frac{1}{2} < R$, puesto que ninguna singularidad de f se encuentra en $\Gamma_{R,r}$ ni en el interior del recinto limitado por $\Gamma_{R,r}$, el teorema de los residuos asegura que

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Gamma_{R,r}} f(z)\,dz &= \int_{[r,R]} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{[R+i,r+i]} f(z)\,dz \\ &\quad + \int_{C_{2,r}} f(z)\,dz + \int_{[(1-r)i,ri]} f(z)\,dz + \int_{C_{1,r}} f(z)\,dz, \end{aligned}$$

donde $[a,b]$ denota el segmento que une los puntos $a, b \in \mathbb{C}$.

Considerando las parametrizaciones obvias de los distintos segmentos se tiene que

$$\int_{[r,R]} f(z)\,dz = \int_r^R \frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)}\,dx;$$

$$\int_{[R+i,r+i]} f(z)\,dz = -\int_r^R \frac{e^{\pi(x+i)/2}}{\mathrm{Sh}(\pi(x+i))}\,dx = -i\int_r^R \frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)}\,dx;$$

$$\int_{[(1-r)i,ri]} f(z)\,dz = -\int_r^{1-r} \frac{e^{\pi i x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi i x)}\,i\,dx = -\int_r^{1-r} \frac{\cos(\pi x/2)+i\ \mathrm{sen}(\pi x/2)}{\mathrm{sen}(\pi x)}\,dx$$

$$= -\int_r^{1-r} \frac{dx}{2\ \mathrm{sen}(\pi x/2)} - i\int_r^{1-r} \frac{dx}{2\ \cos(\pi x/2)}.$$

Si se tienen en cuenta estas igualdades, podemos escribir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_r^{1-r}\Big(\frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)} - \frac{1}{2\ \mathrm{sen}(\pi x/2)}\Big)\,dx + \int_{1-r}^R \frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)}\,dx + \int_{C_{2,r}} f(z)\,dz \\ &\quad - i\int_r^{1-r}\Big(\frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)} - \frac{1}{2\ \cos(\pi x/2)}\Big)\,dx - i\int_{1-r}^R \frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)}\,dx + \int_{C_{1,r}} f(z)\,dz \end{aligned}$$

Tomando límites en cuando $r \to 0^+$ y $R \to \infty$, de acuerdo con los apartados (ii) y (iii),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1\Big(\frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)} - \frac{1}{2\ \mathrm{sen}(\pi x/2)}\Big)\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)}\,dx - \frac{1}{2} \\ &\quad - i\int_0^1\Big(\frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)} - \frac{1}{2\ \cos(\pi x/2)}\Big)\,dx - i\int_1^\infty \frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)}\,dx - \frac{i}{2}. \end{aligned} \tag{*}$$

La igualdad que se pide resulta entonces al considerar la parte real en (*).

Nota: Las integrales (impropias en 0) $\int_0^1 \frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)}\,dx$ y $\int_0^1 \frac{dx}{2\ \mathrm{sen}(\pi x/2)}$ no son convergentes, pero sí lo es $\int_0^1 \Big(\frac{1}{2\ \mathrm{sen}(\pi x/2)} - \frac{e^{\pi x/2}}{\mathrm{Sh}(\pi x)}\Big)\,dx$.

Examen Final – 19 de junio de 2009

14.- Se considera la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x+iy) = \big(\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{Ch}(y)+x^2-y^2\big)+i\big(\cos(x)\,\mathrm{Sh}(y)+2xy\big)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Probar que f es holomorfa en $\mathbb{C}$.

Solución: Sean u y v las partes real e imaginaria de f, esto es,

$$u(x,y) = \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{Ch}(y) + x^2 - y^2\,, \quad v(x,y) = \cos(x)\,\mathrm{Sh}(y) + 2xy\,.$$

La función f es holomorfa en $\mathbb{C}$ si y sólo si u y v son diferenciables y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en $\mathbb{R}^2$. Ambas condiciones son satisfechas: u y v son diferenciables por ser de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$; en cuanto a las condiciones de Cauchy-Riemann, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x)\ \mathrm{Ch}(y) + 2x = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{sen}(x)\ \mathrm{Sh}(y) - 2y = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

15.- Determinar el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{n^2-1}{n!}\,z^n$ y calcular su suma.

Solución: La serie tiene por coeficientes $a_n = \dfrac{n^2-1}{n!}$, no nulos para todo $n > 1$. Para calcular el radio de convergencia ρ aplicamos el criterio del cociente:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)(n+1)!}{((n+1)^2-1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)(n+1)}{n^2+2n} = \infty\,.$$

Por tanto, la serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$. Su suma es

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{n^2-1}{n!}\,z^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{n(n-1)+n-1}{n!}\,z^n = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(n-2)!}\,z^n + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n-1)!}\,z^n - \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\,z^n = e^z\,(z^2+z-1)\,,$$

ya que $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\,z^n = e^z$.

16.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma z \operatorname{sen}\Big(\frac{1}{z^2}\Big)\, dz$, siendo Γ la circunferencia de centro 0 y radio 2.

Solución: La función $\operatorname{sen}(z)$ es holomorfa y, por tanto, analítica, en $\mathbb{C}$ (véase el teorema 4.1 del Tema 7). Su desarrollo en serie de potencias, válido para todo $z \in \mathbb{C}$, es $\operatorname{sen}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$. Se deduce de esto que el integrando $f(z) = z \operatorname{sen}\Big(\dfrac{1}{z^2}\Big)$ es holomorfo en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ y que su desarrollo de Laurent centrado en $z_0 = 0$ es

$$F(z) = z \operatorname{sen}\Big(\frac{1}{z^2}\Big) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Big(\frac{1}{z^2}\Big)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n+1}}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\,.$$

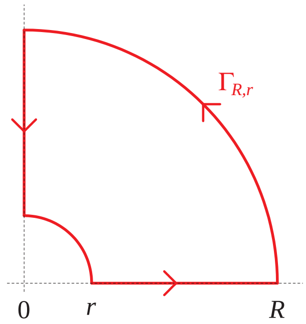
Por tanto, la única singularidad de f es $z_0 = 0$, es esencial, y el residuo de f en ella es $\operatorname{Res}(f,0) = \dfrac{(-1)^0}{1!} = 1$. Puesto que $z_0 = 0$ está en el interior de la curva cerrada Γ, por el teorema de los residuos,

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\Gamma z \operatorname{sen}\Big(\frac{1}{z^2}\Big)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = 2\pi i\,.$$

17.- Para cada par de números reales R, r tales que $0 < r < R$ se considera la curva $\Gamma_{R,r}$ de la figura.

Sea f la función dada por

$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2}\,.$$



i) Estudiar las singularidades de f.

ii) Calcular $\displaystyle\int_{\Gamma_{R,r}} f(z)\, dz$.

iii) Si para cada $\varrho > 0$, Γ_ϱ es el arco de circunferencia de radio ϱ parametrizado por $\gamma_\varrho(t) = \varrho\, e^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$, demostrar que

$$\lim_{\varrho\to\infty} \int_{\Gamma_\varrho} f(z)\, dz = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\varrho\to 0^+} \int_{\Gamma_\varrho} f(z)\, dz = \frac{\pi}{2}\,.$$

iv) Deducir el valor de las integrales impropias $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\, dx$ y $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x} - \operatorname{sen}(x)}{x^2}\, dx$.

Solución: i) La función f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, por ser cociente de dos funciones, $g(z) = 1 - e^{iz}$ y $h(z) = z^2$, holomorfas en $\mathbb{C}$, siendo $z_0 = 0$ el único cero del denominador $h(z) = z^2$. Es obvio que h tiene un cero de orden dos en $z_0 = 0$; como $g(0) = 0$ y $g'(0) = -i$, de la proposición 3.10 del Tema 8 se sigue que la función f tiene un polo simple en $z_0 = 0$ y

$$\operatorname{Res}(f,0) = 2\, \frac{g'(0)}{h''(0)} = -i\,.$$

Esta información también se puede obtener a partir del desarrollo de Laurent de f en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Conocido el desarrollo de serie de potencias de la función exponencial en $z_0 = 0$ se tiene que

$$1 - e^{iz} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

y por tanto,

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^{n-2} = \frac{-i}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+2}}{(n+2)!} z^n, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

ii) Para $0 < r < R$ el abierto de Jordan $D_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R,\ \operatorname{Re}(z) > 0,\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$ no contiene singularidades de f, obviamente $0 \notin D_{r,R}$, y por el teorema de los residuos,

$$\int_{\partial D_{r,R}} f(z)\, dz = 0\,.$$

iii) Para calcular el primer límite nos basaremos en la propiedad 2.4.iii del Tema 7,

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \sup_{z\in\Gamma_R} |f(z)|\,\mathrm{long}(\Gamma_R)\,.$$

Observemos que para todo $R > 0$ y para todo $z \in \Gamma_R$ se verifica que $|z| = R$ y, además,

$$|1 - e^{iz}| \leq |1| + |-e^{iz}| = 1 + e^{\mathrm{Re}(iz)} = 1 + e^{-\mathrm{Im}(z)} \leq 1 + e^0 = 2,$$

ya que $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Tenemos entonces que, para cada $R > 0$,

$$\sup_{z\in\Gamma_R} |f(z)| \leq \frac{2}{R^2}\,.$$

Como la longitud de Γ_R es $R\pi/2$, se tiene que

$$0 \leq \left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{2}{R^2}\cdot\frac{R\pi}{2} = \frac{\pi}{R}\,.$$

Puesto que la última expresión tiende hacia 0 cuando $R \to \infty$, del criterio del sandwich se sigue que

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| = 0,$$

lo que es equivalente a que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$.

Para calcular el segundo límite se puede aplicar el lema de Jordan (lema 4.5 del Tema 8), puesto que el punto $z_0 = 0$ es un polo simple de f y Γ_r es un arco de circunferencia de amplitud $\pi/2$, y se tiene que

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz = \frac{\pi}{2}\,i\,\mathrm{Res}(f,0) = \frac{\pi}{2}\,,$$

teniendo en cuenta que la orientación que determina en Γ_r la parametrización $\boldsymbol{\gamma}_r$ es la antihoraria.

iv) Para $0 < r < R$ pongamos $\partial D_{r,R} = \Gamma_R + \Sigma_1 - \Gamma_r + \Sigma_2$, donde Σ_1 es el segmento que une los puntos r y R y Σ_2 es el segmento que une los puntos Ri y ri. En el apartado ii) hemos visto que

$$\int_{\partial D_{r,R}} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\Sigma_1} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_r} f(z)\,dz + \int_{\Sigma_2} f(z)\,dz = 0\,.$$

Si parametrizamos Σ_1 mediante la aplicación $\gamma_1 : [r,R] \mapsto \mathbb{C}$, dada por $\gamma_1(x) = x$, tenemos que

$$\int_{\Sigma_1} f(z)\,dz = \int_r^R \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx = \int_r^R \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx - i\int_r^R \frac{\mathrm{sen}(x)}{x^2}\,dx\,.$$

Si parametrizamos Σ_2 mediante la aplicación $\gamma_2 : [r,R] \mapsto \mathbb{C}$, dada por $\gamma_2(x) = ix$, (que corresponde a la orientación contraria a la del segmento), tenemos que

$$\int_{\Sigma_2} f(z)\,dz = -\int_r^R \frac{1-e^{i(ix)}}{(ix)^2}\,i\,dx = i\int_r^R \frac{1-e^{-x}}{x^2}\,dx\,.$$

Así pues, para $0 < r < R$,

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_r} f(z)\,dz + \int_r^R \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx + i\int_r^R \frac{1-e^{-x}-\mathrm{sen}(x)}{x^2}\,dx = 0\,.$$

Tomando límites cuando $r \to 0^+$ y $R \to \infty$, se tiene que

$$0 - \frac{\pi}{2} + \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx + i\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}-\mathrm{sen}(x)}{x^2}\,dx = 0\,.$$

Por tanto, igualando las partes reales e imaginarias se concluye que

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{1-e^{-x}-\mathrm{sen}(x)}{x^2}\,dx = 0\,.$$

Nota: Aunque el carácter convergente de las integrales impropias anteriores se puede deducir fácilmente haciendo uso de los criterios de convergencia habituales, este estudio no es necesario, la convergencia de dicha integral viene garantizada por la existencia y finitud de los límites de las integrales curvilíneas calculados previamente.

18.- Calcular todos los valores de $\log\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$. Indicar cuál de ellos corresponde a la rama principal.

Solución: Lo más sencillo es escribir
$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+i^2-2\,i}{1-i^2}=\frac{-2\,i}{2}=-i\,;$$
por lo que se trata de calcular
$$\log(-i)=\ln|-i|+i\arg(-i)+i\,2\,k\,\pi$$
siendo $\arg(-i)$ cualquier argumento de $-i$, por ejemplo $-\pi/_2$, y recorriendo k todos los valores enteros. Puesto que el valor principal corresponde al único argumento que verifica $-\pi<\arg(z)<\pi$, de entre todos los valores
$$\log(-i)=\ln|-i|+i\arg(-i)+i\,2\,k\,\pi=\ln(1)-i\,\pi/_2+i\,2\,k\,\pi=-i\pi/_2+i\,2\,k\,\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$
el principal es el que corresponde a $k=0$, esto es, $-i\,\pi/_2$.

Nota: También es posible realizar el cálculo a partir de la igualdad (entre los conjunos de valores)
$$\log\left(\frac{1-i}{1+i}\right)=\log(1-i)-\log(1+i)$$
que se deduce de la realación $e^{z-w}=e^z/_{e^w}$. Entonces
$$\log(1-i)-\log(1+i)=\Big(\ln\big(\sqrt{2}\big)-i\frac{\pi}{4}+i2k\pi\Big)-\Big(\ln\big(\sqrt{2}\big)+i\frac{\pi}{4}+i2m\pi\Big)=-i\pi/_2+i2(k-m)\pi\,,\ k,m\in\mathbb{Z}\,.$$
Un error frecuente consiste en hacer $k=m$, lo que sólo deja un valor, que depende de los dos argumentos iniciales elegidos para el numerador y el denominador.

19.- Dado un abierto no vacío V del plano complejo, demostrar que no puede existir una función $f(z)=f(x+i\,y)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, holomorfa en V y tal que $u(x,y)=x^2-y$ para todo $z=x+i\,y\in V$.

Solución: Si tal función existiese, para cada $z=x+i\,y\in V$ sería, en virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann,
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2\,x\,;\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=1\,. \tag{$C5.1$}$$
Pero u y v son funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en V (pues f es analítica en V) y por tanto, al derivar en [$C5.1$], se obtienen los valores
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(2\,x)=2\qquad\text{y}\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(1)=0\,,$$
que deberían ser iguales en todo V (según el lema de Schwartz), lo que obviamente es absurdo.

Nota: Otra solución (menos elegante) consiste en tomar primitivas en [$C5.1$] para obtener que
$$v(x,y)=\int 2\,x\,dy=2\,x\,y+C_1(x)\,;\qquad v(x,y)=\int 1\,dx=x+C_2(y)\,,$$
pero la imposibilidad de que se tenga una identidad del tipo $2\,x\,y+C_1(x)=x+C_2(y)$ es menos trivial que la anterior (omitir las constantes de integración $C_1(x)$ y $C_2(y)$ es un error, no una simplificación admisible).

20.- Hallar el desarrollo de Laurent de la función $f(z)=\operatorname{sen}\Big(\dfrac{1}{z}\Big)+\dfrac{1}{1-z}$ en la corona $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$. ¿Qué tipo de singularidad presenta f en $z_0=0$? ¿Cuánto vale el residuo de f en $z_0=0$?

Solución: Los siguientes desarrollos son conocidos:
$$\operatorname{sen}(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,w^{2n+1},\quad w\in\mathbb{C}\,;\qquad\qquad \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad z\in B(0,1).$$
Al sustituir en el primero w por $1/_z$ obtenemos
$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{z^{2n+1}},\qquad z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}.$$
La intersección de las regiones de validez de los dos últimos desarrollos es justamente la corona C. Sumando ambos dessarrollos obtenemos el desarrollo de Laurent de f en C:
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{z^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\qquad 0<|z|<1,$$

siendo la primera suma la parte singular y la segunda la parte regular del desarrollo. Puesto que la parte singular tiene infinitos sumandos no nulos, la singularidad que f presenta en $z_0 = 0$ es esencial. El residuo de f en $z_0 = 0$ es justamente el coeficiente de $1/z$ en el desarrollo (el sumando que corresponde a $n = 0$), esto es,

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{(-1)^0}{1!} = 1.$$

21.- Se considera la función f definida por $f(z) = \dfrac{z}{1 - e^{-iz}}$.

a) Probar que f tiene una singularidad evitable en $z_0 = 0$. ¿Tiene f más singularidades aisladas?

b) Dado $R > 0$, sea Γ_R el borde del rectángulo de vértices $\pi, \pi + iR, -\pi + iR, -\pi$ recorrido en sentido positivo. Calcular $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz$.

c) Si C_1 es el segmento que une $-\pi$ y π, probar que $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\, dz = -i \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}\, dx$.

d) Si $C_{R,3}$ es el segmento que une $\pi + iR$ y $-\pi + iR$, probar que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_{R,3}} f(z)\, dz = 0$.

e) Si $C_{R,2}$ y $C_{R,4}$ son los segmentos que unen los puntos π y $\pi + iR$, y los puntos $-\pi + iR$ y $-\pi$, respectivamente, probar que $\displaystyle\int_{C_{R,2}} f(z)\, dz + \int_{C_{R,4}} f(z)\, dz = 2\pi i \int_0^{R} \frac{1}{1 + e^x}\, dx$.

f) Deducir de lo anterior que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}\, dx = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^x}\, dx.$

Solución: a) La función f es cociente de las funciones $g(z) = z$ y $h(z) = 1 - e^{-iz}$, ambas holomorfas en $\mathbb{C}$, por lo que f es holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en los puntos donde se anula h. Para encontrar los ceros de h tenemos que resolver la ecuación $h(z) = 1 - e^{-iz} = 0$, o equivalentemente, encontrar los puntos para los cuales $1 = e^{-iz}$, que son los puntos de la forma $z_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($e^w = 1 \Leftrightarrow w = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$). En resumen, f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, esto es, $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es el conjunto de todas las singularidades aisladas de f.

Por otra parte, las funciones g y h tienen un cero de orden 1 en $z_0 = 0$; véase que

$$g(0) = 0,\ g'(0) = 1 \neq 0, \qquad h(0) = 0,\ h'(0) = i \neq 0$$

Esto es suficiente para garantizar que f tiene una singularidad evitable en $z_0 = 0$.

Nota: No se exigía en el enunciado, pero es inmediato comprobar que las demás singularidades de f son polos simples.

b) Como $z_0 = 0$ es una singularidad evitable de f, podemos suponer que f está definida en ese punto y es, de hecho, holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\}$. Tras esta observación podemos aplicar el teorema de los residuos, puesto que el rectángulo D_R de vértices $\pi, \pi + iR, -\pi + iR, -\pi$ es un dominio de Jordan y la función f no tiene singularidades en su borde Γ_R. Puesto que además ninguna de las singularidades de f está en el interior del rectángulo, podemos concluir que

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0.$$

c) Una parametrización de C_1 es la aplicación $\gamma_1 \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ definida por $\gamma_1(x) = x$. Entonces, aplicando la definición de integral curvilínea, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z)\, dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{1 - e^{-ix}}\, dx = \int_{-\pi}^{0} \frac{x}{1 - e^{-ix}}\, dx + \int_0^{\pi} \frac{x}{1 - e^{-ix}}\, dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{-x}{1 - e^{ix}}\, dx + \int_0^{\pi} \frac{x}{1 - e^{-ix}}\, dx = \int_0^{\pi} x \left(\frac{1}{1 - e^{-ix}} - \frac{1}{1 - e^{ix}} \right) dx \\
&= \int_0^{\pi} x \frac{-e^{ix} + e^{-ix}}{2 - e^{ix} - e^{-ix}}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{-2\, i\, x \operatorname{sen}(x)}{2 - 2\cos(x)}\, dx = -i \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1 - 1\cos(x)}\, dx.
\end{aligned}$$

d) La longitud del segmento $C_{R,3}$ es 2π. Por otra parte, si $z \in C_{R,3}$ entonces es de la forma $z = x + iR$, con $x \in [-\pi, \pi]$, por lo que

$$|f(z)| = \frac{|z|}{|1-e^{-iz}|} \leq \frac{\pi + R}{e^R - 1},$$

ya que $|z| \leq |x| + R \leq \pi + R$ y $|1 - e^{-iz}| \geq |1 - |e^{-iz}|| = |1 - e^{\mathrm{Re}(-iz)}| = |1 - e^R|$.

Puesto que para todo $R > 0$ se tiene que

$$\Big|\int_{C_{R,3}} f(z)\, dz\Big| \leq \sup\{|f(z)| : z \in \Gamma_R\} \operatorname{long}(\Gamma_R) \leq \frac{\pi + R}{e^R - 1}\, 2\,\pi,$$

y $\lim_{R\to\infty} 2\,\pi\,(\pi + R)/(e^R - 1) = 0$, podemos concluir.

e) Los segmentos $C_{R,2}$ y $C_{R,4}$ se parametrizan, respectivamente, por las aplicaciones $\boldsymbol{\gamma}_2\colon [0, R] \to \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{\gamma}_4\colon [0, R] \to \mathbb{C}$ definidas por

$$\boldsymbol{\gamma}_2(x) = \pi + i\,x \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\gamma}_4(x) = -\pi + i\,x.$$

Es necesario indicar que la orientación dada por la parametrización $\boldsymbol{\gamma}_2$ es la adecuada, pero la dada por la parametrización $\boldsymbol{\gamma}_4$ es la opuesta a la pedida. Entonces

$$\int_{C_{R,2}} f(z)\, dz + \int_{C_{R,4}} f(z)\, dz = \int_0^R \frac{\pi + ix}{1 - e^{-i(\pi+ix)}}\, dx - \int_0^R \frac{-\pi + ix}{1 - e^{-i(-\pi+ix)}}\, dx$$

$$= \int_0^R \frac{(\pi + ix) - (-\pi + ix)}{1 + e^x}\, dx = \int_0^R \frac{2\pi}{1 + e^x}\, dx.$$

En la segunda igualdad se ha usado que

$$e^{-i(\pi+ix)} = e^{-i\pi}e^{-i(ix)} = -e^x \qquad \text{y} \qquad e^{-i(-\pi+ix)} = e^{i\pi}e^{-i(ix)} = -e^x.$$

f) Puesto que $\partial D_R = \Gamma_R = C_{R,1} + C_{R,2} + C_{R,3} + C_{R,4}$ y la orientación considerada previamente en cada uno de estos segmentos es la indducida por D_R, de los apartados b), c) y e) se sigue que

$$0 = \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \int_{C_{R,1}} f(z)\, dz + \int_{C_{R,2}} f(z)\, dz + \int_{C_{R,3}} f(z)\, dz + \int_{C_{R,4}} f(z)\, dz$$

$$= -i\int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1 - \cos(x)}\, dx + 2\pi i \int_0^R \frac{1}{1 + e^x}\, dx + \int_{C_{R,3}} f(z)\, dz.$$

Al tomar límites cuando R tiende hacia infinito, se puede aplicar el apartado d) y se tiene que

$$0 = -i\int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1 - \cos(x)}\, dx + 2\,\pi\, i \int_0^\infty \frac{1}{1 + e^x}\, dx.$$

Tras despejar se obtiene la igualdad buscada.

Nota: En añadidura (en el enunciado no se exigía su cálculo), mencionaremos que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + e^x}\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{t\,(1 + t)}\, dt = \int_1^\infty \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 + t}\Big)\, dt = \ln(2)\,.$$

Examen Final – 20 de Junio de 2008

22.- Determinar la función $f = u + i\,v$, siendo $u = \mathrm{Re}(f), v = \mathrm{Im}(f)$, holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y que verifica:
i) $v(x, y) = 2\,x\,y$ para todo $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$; *ii)* $f(0) = 0$.

Solución: Si f es una función holomorfa en $\mathbb{C}$, su parte real u y su parte imaginaria v son funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann, luego

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 2x, \qquad \text{lo que implica que} \quad u(x, y) = \int 2x\, dx = x^2 + C(y).$$

Derivando respecto de y se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -2y \qquad \text{y en consecuencia} \quad \frac{\partial C}{\partial y}(y) = -2y \quad \Rightarrow \quad C(y) = -y^2 + K, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

La condición $f(0) = 0$, implica que $K = 0$, entonces

$$f(z) = f(x + i\,y) = (x^2 - y^2) + i\,2\,x\,y = z^2\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

23.- Determinar el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!+1}{n!}\,z^n$ y calcular su suma.

Solución: Si escribimos $a_n=\dfrac{n!+1}{n!}=1+\dfrac{1}{n!}$ para $n=0,1,2,\ldots$, se tiene que

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n!}}=1^0=1,$$

y por tanto el radio de convergencia de la serie de potencias es $\rho={}^1\!/_\lambda=1$. Además, para $|z|<1$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!+1}{n!}\,z^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,z^n=\frac{1}{1-z}+e^z.$$

24.- Determinar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ en la corona $\{z\in\mathbb{C}:0<|z-i|<2\}$.

Solución: La función $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$. La descomposición en fracciones simples de esta función racional es

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i}=\frac{-{}^i\!/_2}{z-i}+\frac{{}^i\!/_2}{z+i}.$$

De la Observación 2.6.1 del Tema 8 y el Apartado 4.16.6 del Tema 6 se deduce que

$$\frac{{}^i\!/_2}{z+i}=\frac{{}^i\!/_2}{2i+(z-i)}=\frac{{}^i\!/_2}{2i\left(1+{}^{(z-i)}\!/_{2i}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n(z-i)^n$$

para todo $z\in\mathbb{C}$ tal que $\left|\dfrac{z-i}{2i}\right|<1$, esto es, $|z-i|<|2i|=2$. Por tanto, el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en la corona $\{z\in\mathbb{C}:0<|z-i|<2\}$ es de la forma

$$\underbrace{\frac{-{}^i\!/_2}{z-i}}_{p.\ singular}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^n(z-i)^n}_{parte\ regular}.$$

25.- Se considera la función $f(z)=\dfrac{\log(z)}{z^2+1}$, donde la rama del logaritmo corresponde a $-{}^\pi\!/_2<\arg(z)<{}^{3\pi}\!/_2$.

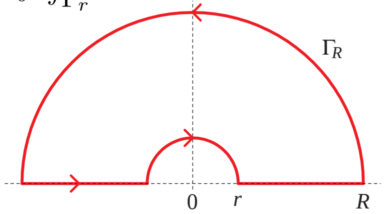
a) Probar que, si $0\le\theta\le\pi$, se verifican las desigualdades siguientes:

$$\left|f(\rho\,e^{i\theta})\right|\le\frac{-\ln(\rho)+\pi}{1-\rho^2}\quad\text{si}\quad 0<\rho<1;\qquad \left|f(\rho\,e^{i\theta})\right|\le\frac{\ln(\rho)+\pi}{\rho^2-1}\quad\text{si}\quad\rho>1.$$

b) Para cada $\rho>0$, $\rho\neq1$ sea $\Gamma_\rho=\{z\in\mathbb{C}:|z|=\rho,\ \mathrm{Im}(z)\ge0\}$ (una semicircunferencia centrada en 0, ver figura). Deducir del apartado anterior que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}f(z)\,dz\;=\;0\;=\;\lim_{r\to0^+}\int_{\Gamma_r}f(z)\,dz$.

c) Sea $D=\{z\in\mathbb{C}:r<|z|<R,\ \mathrm{Im}(z)>0\}$, donde $0<r<1<R$ (su borde aparece en la figura). Calcular $\displaystyle\oint_{\partial D}f(z)\,dz$.

d) Deducir de lo anterior el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$.



Solución: En primer lugar notemos que los números que tienen argumento ${}^\pi\!/_2$ son los del semieje imaginario negativo, así pues, la función f es holomorfa en el abierto $U=\mathbb{C}\setminus\{i\,t:t\le0\}$ (dominio de definición de la rama del logaritmo considerada), excepto el punto $z_0=i$, que es una singularidad asilada de f, pues es un cero del denominador z^2+1. La otra raíz de z^2+1 es $-i$, que no pertenece a U.

a) Si $z=\rho\,e^{i\theta}$ con $\rho>0$ y $0\le\theta\le\pi$, entonces $\rho=|z|$, θ es un argumento de z y, en consecuencia, $\log(z)=\ln|z|+i(\theta+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, pero en la rama considerada debe ser $k=0$. Por tanto $\log(\rho\,e^{i\theta})=\ln(\rho)+i\theta$ y según la desigualdad triangular se tiene que

$$\left|\log(\rho\,e^{i\theta})\right|=\left|\ln(\rho)+i\theta\right|\le\left|\ln(\rho)\right|+\left|i\theta\right|=\left|\ln(\rho)\right|+\theta\le\left|\ln(\rho)\right|+\pi,\qquad[E2.1]$$

la última desigualdad es obvia pues $0 \le \theta \le \pi$. Por otra parte, según la segunda desigualdad triangular, para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\big|z^2+1\big| = \big|z^2-(-1)\big| \ge \big||z^2|-|-1|\big| = \big||z^2|-1\big|,$$

en particular, si $z=\rho\, e^{i\theta}$, se deduce que

$$\big|(\rho\, e^{i\theta})^2+1\big| \ge |\rho^2-1|. \qquad [E2.2]$$

Recolectando los desigualdades $[E2.1]$ y $[E2.2]$ se deduce que, para $\rho \ne 1$,

$$\big|f(\rho\, e^{i\theta})\big| \le \frac{\big|\ln(\rho)\big|+\pi}{|\rho^2-1|}$$

y para concluir basta observar que:

1. Si $0<\rho<1$ entonces $\big|\ln(\rho)\big| = -\ln(\rho)$ y $|\rho^2-1| = 1-\rho^2$;
2. Si $\rho>1$ se verifica $\big|\ln(\rho)\big| = \ln(\rho)$ y $|\rho^2-1| = \rho^2-1$.

b) Utilizaremos para deducir ambos límites la desigualdad $\Big|\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz\Big| \le \mathrm{long}(\Gamma)\,\max\big\{|f(z)| : z\in\Gamma\big\}$. Las curvas consideradas se parametrizan, precisamente, $z=\rho\, e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$, su longitud es $\mathrm{long}(\Gamma_\rho)=\pi\,\rho$ y, en virtud de las desigualdades del apartado anterior se deduce que:

1. Si $R>1$, $0 \le \Big|\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\Big| \le \pi\, R\,\frac{\ln(R)+\pi}{R^2-1}$. Puesto que
$$\lim_{R\to\infty} R\,\frac{\ln(R)\big|+\pi}{R^2-1} = \lim_{R\to\infty}\frac{\ln(R)}{R}=0\,,$$
el criterio del sandwich establece el primer límite.
2. Si $0<r<1$, $0 \le \Big|\displaystyle\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz\Big| \le \pi\, r\,\frac{-\ln(r)+\pi}{1-r^2}$. Puesto que
$$\lim_{r\to0^+} r\,\frac{-\ln(r)\big|+\pi}{1-r^2} = \lim_{r\to0^+} -r\ln(r)+r\,\pi=0\,,$$
de la misma forma se obtiene el segundo límite.

Nota: En los límites anteriores se han usado las propiedades conocidas de los órdenes de infinitud (en particular, aunque $\lim\limits_{r\to0^+}\ln(r)=-\infty$ se tiene que $\lim\limits_{r\to0^+} r^\alpha\ln(r)=0$ para cualquier $\alpha>0$).

c) Obviamente $D=\{z\in\mathbb{C} : r<|z|<R,\ \mathrm{Im}(z)>0\}$ está contenido en el abierto U, al igual que su borde, y la función f, analítica en $U\setminus\{i\}$ posee una sola singularidad $z_0=i$ que se encuentra en D. Bajo estas hipótesis, el teorema de los residuos establece que, al considerar en ∂D la orientación inducida por D, se tiene que

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 2\,\pi\, i\,\mathrm{Res}(f,i)\,.$$

Únicamente falta calcular el residuo. Para ello escribamos $f(z)={h(z)}/{g(z)}$, siendo $h(z)=\log(z)$ y $g(z)=z^2+1$. Se tiene que

$$h(i)=\log(i)=\ln|i|+i\arg(i)=\frac{\pi}{2}\,i\,; \qquad g(i)=i^2+1=0\,, \quad g'(i)=2\,i\ne0\,.$$

En estas condiciones (ver 3.9 del Tema 8)

$$\mathrm{Res}({h}/{g},i)=\frac{h(i)}{g'(i)}=\frac{\pi\,i/2}{2\,i}=\frac{\pi}{4}$$

y la integral curvilínea vale $\dfrac{\pi^2}{2}\,i$.

d) Según el apartado anterior, cualesquiera que sean $0<r<1<R$ se tiene que

$$\frac{\pi^2}{2}\,i = \oint_{\partial D} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_r} f(z)\,dz + \int_{[r,\,R]} f(z)\,dz + \int_{[-R,\,-r]} f(z)\,dz \qquad [E2.3]$$

(el signo menos del segundo sumando se debe a la orientación, aunque esto será irrelevante a posteriori). Al pasar al límite cuando R tiende a ∞ y r hacia 0 los dos primeros sumandos se anulan, según se ha probado en el apartado b). Examinemos los otros:

1. El segmento $[r,R]$ se parametriza de forma obvia $z(t)=t$, $t\in[r,R]$, que es coherente con la orientación de ∂D. Puesto que para $t>0$ se tiene que $\log(t)=\ln(t)$, resulta
$$\int_{[r,\,R]} f(z)\,dz = \int_r^R \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt\,. \qquad [E2.4]$$

2. El segmento $[-R,-r]$ se parametriza igual: $z(t)=t$, $t\in[-R,-r]$, pero ahora resulta que para $t<0$ es $\log(t)=\ln|t|+i\,\pi=\ln(-t)+i\,\pi$, y resulta

$$\int_{[-R,\,-r]} f(z)\,dz=\int_{-R}^{-r}\frac{\ln(-t)+i\,\pi}{t^2+1}\,dt=\int_r^R\frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt+i\,\pi\int_r^R\frac{dt}{t^2+1}\,, \qquad [E2.5]$$

siendo la última igualdad consecuencia del cambio de variable $t\in[-R,-r]\mapsto -t\in[r,R]$.

Sumando las aportaciones de $[E2.4]$ y $[E2.5]$ y pasando al límite en $[E2.3]$ cuando R tiende a ∞ y r hacia 0 resulta que

$$\frac{\pi^2}{2}\,i=2\int_0^\infty\frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt+i\,\pi\int_0^\infty\frac{dt}{t^2+1}\,,$$

e identificando partes reales e imaginarias

$$\int_0^\infty\frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt=0\,,\qquad\qquad \int_0^\infty\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\pi}{2}\,.$$

En particular, la integral contemplada en el enunciado es nula.

Nota: Es fácil obtener por métodos elementales de variable real los valores de las integrales anteriores: la segunda se calcula de forma inmediata mediante la regla de Barrow (es la variación de $\operatorname{arctg}(t)$ entre 0 e ∞); en cuanto a la primera, el cambio de variable $t\in(0,1)\mapsto {}^1\!/_t\in(1,\infty)$ muestra que

$$\int_0^1\frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt=-\int_1^\infty\frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt\,.$$

Examen Extraordinario – 11 de Septiembre de 2007

26.- Resolver la ecuación $e^{2z}=1+i$.

Solución: La respuesta consiste en un sencillo cálculo. En primer lugar tomado logaritmos (recordemos que las ramas del logaritmo son inversas locales de la exponencial) se tiene que $2\,z=\log(1+i)$. Puesto que $|1+i|=\sqrt{2}$ y un argumento de $1+i$ es ${}^\pi\!/_4$ se deduce que

$$2\,z=\log(1+i)=\ln(\sqrt{2}\,)+i\,\frac{\pi}{4}+i\,2\,k\,\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

En conclusión los números complejos z que satisfacen $e^{2z}=1+i$ son los de la forma

$$z=\frac{\ln(2)}{4}+i\,\frac{\pi}{8}+i\,k\,\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

27.- Determinar el desarrollo de Laurent de $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z+3)}$ en la corona $\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<3\}$.

Solución: La función f es una función racional, holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{-3,i\}$. Descomponemos en fracciones simples, razonando de la manera habitual, para obtener que

$$f(z)=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+3}=\frac{1}{i+3}\,\frac{1}{z-i}+\frac{-1}{i+3}\,\frac{1}{z+3}\,.$$

Sólo queda escribir las dos fracciones en potencias de z. Para ello recurrimos a la suma geométrica, poniendo por un lado

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z\,(1-{}^i\!/_z)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^\infty\frac{i^n}{z^n}=\sum_{n=0}^\infty\frac{i^n}{z^{n+1}}$$

si $\left|{}^i\!/_z\right|<1$, es decir, si $|z|>1$; y por otro,

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3\,(1+{}^z\!/_3)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n z^n}{3^n}=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$$

si $\left|{}^z\!/_3\right|<1$, es decir, si $|z|<3$. Entonces,

$$f(z)=\frac{1}{i+3}\Big(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+3}\Big)=\sum_{n=1}^\infty\frac{i^{n-1}}{i+3}\,\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{(i+3)3^{n+1}}\,z^n$$

si $1<|z|<3$.

28.- Sea Γ la circunferencia de centro 0 y radio 1. Calcular $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\operatorname{tg}(z)}{z^2}\,dz$.

Solución: La función $\operatorname{tg}(z) = {}^{\operatorname{sen}(z)}/_{\cos(z)}$ es holomorfa en el abierto $U = \mathbb{C} \setminus \{{}^{\pi}/_{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. La bola abierta $B(0,1)$ es un dominio de Jordan cuya frontera es Γ y $B(0,1) \cup \Gamma \subset U$. Podemos aplicar entonces la fórmula integral de Cauchy (teorema 3.3 del tema 7) y, con la orientación inducida por $B(0,1)$ en Γ (sentido antihorario), obtenemos que

$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{tg}(z)}{z^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\operatorname{tg}'(0) = 2\,\pi\,i\,.$$

Nota: La integral también puede calcularse aplicando el teorema de los residuos a la función $f(z) = {}^{\operatorname{tg}(z)}/_{z^2}$, la cual es holomorfa en $U \setminus \{0\}$ y en $z_0 = 0$ presenta un polo simple. En este caso, el residuo de f en $z_0 = 0$ se obtiene, por ejemplo, mediante el método de la proposición 3.9 del tema 8.

Examen Final – 22 de Junio de 2007

29.- Resolver la ecuación $e^{2iz} + 1 = 2\,i\,e^{iz}$, $z \in \mathbb{C}$.

Solución: La ecuación se puede escribir $\left(e^{iz}\right)^2 - 2\,i\,e^{iz} + 1 = 0$, es decir,

$$w^2 - 2\,i\,w + 1 = 0, \qquad \text{siendo } w = e^{iz},$$

de manera que las soluciones de la ecuación son las soluciones de

$$e^{iz} = \frac{-(-2\,i) \pm \sqrt{(-2\,i)^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \frac{2\,i \pm \sqrt{-8}}{2} = (1 \pm \sqrt{2})\,i,$$

es decir, todos los logaritmos de los números complejos $(1+\sqrt{2})\,i$ y $(1-\sqrt{2})\,i$, divididos por i. Observemos que $1-\sqrt{2} < 0 < 1+\sqrt{2}$, de modo que $\pi/2$ es un argumento de $(1+\sqrt{2})\,i$ y $-\pi/2$ es un argumento de $(1-\sqrt{2})\,i$. En resumen, las soluciones buscadas son

$$\frac{\ln(1+\sqrt{2}) + i\left({}^{\pi}/_{2} + 2k\pi\right)}{i} \quad \text{y} \quad \frac{\ln(\sqrt{2}-1) + i\left(-{}^{\pi}/_{2} + 2k\pi\right)}{i}, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

30.- Determinar el desarrollo de Laurent de $f(z) = \dfrac{z^4+z^2}{z^2+4}$ en un disco punteado centrado en $z_0 = 2\,i$.

Solución: La función f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\}$. Tras dividir y descomponer en fracciones simples se tiene que

$$f(z) = \frac{z^4+z^2}{z^2+4} = z^2 - 3 + \frac{12}{z^2+4} = z^2 - 3 - \frac{3i}{z-2i} + \frac{3i}{z+2i}, \quad z \neq \pm 2i.$$

Operamos para escribir z^2 es potencias de $(z-2i)$:

$$z^2 = (z-2i+2i)^2 = (z-2i)^2 + 2(z-2i)(2i) + (2i)^2 = (z-2i)^2 + 4i(z-2i) - 4.$$

Y trabajando con la serie geométrica como es habitual,

$$\frac{1}{z+2i} = \frac{1}{4i}\,\frac{1}{1+{}^{(z-2i)}/_{4i}} = \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2i}{4i}\right)^n \quad \text{si} \quad \left|\frac{z-2i}{4i}\right| < 1\,.$$

En resumen,

$$f(z) = \underbrace{(z-2i)^2 + 4i(z-2i) - 7 + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2i}{4i}\right)^n}_{\text{parte regular}}\ \underbrace{-\ \frac{3i}{z-2i}}_{\text{p. singular}}, \quad 0 < |z-2i| < 4.$$

31.- Sea Γ la curva parametrizada por $z(t) = \dfrac{e^{it}}{2} - 1$, $t \in [0, 2\,\pi]$. Calcular $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{1/z}}{z(z+1)}\,dz$.

Solución: La curva Γ parametrizada por $z(t) = \dfrac{e^{it}}{2} - 1$, $t \in [0, 2\pi]$, es la circunferencia centrada en -1, de radio ${}^{1}/_{2}$ y recorrida en sentido positivo (antihorario). La función $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z}$ es holomorfa en el abierto $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, que contiene a Γ y su interior, y

$$\int_\Gamma \frac{e^{1/z}}{z(z+1)}\,dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z+1}\,dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-(-1)}\,dz\,.$$

De la aplicación de la fórmula integral de Cauchy (Teorema 3.3 del Tema 7) a la última integral se obtiene

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z+1} = 2\,\pi\,i\,f(-1) = -\frac{2\,\pi\,i}{e}\,.$$

Nota: Al mismo resultado se llega al aplicar el teorema de los residuos (Teorema 4.1 del Tema 8) a la función $g(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z(z+1)}$, holomorfa en el abierto $\mathbb{C}\backslash\{0,-1\}$.
