

PRACTICA 5

ESTUDIO DE LOS MODOS LINEALMENTE POLARIZADOS

5.1 Introducción

Vamos a continuar en esta práctica estudiando los modos linealmente polarizados. En este caso se trata de desarrollar todo el formalismo matemático e implementar un programa en MATLAB que nos permita visualizar la distribución de intensidad de cada uno de los modos para una fibra óptica de salto de índice.

Para conseguir nuestro objetivo analizaremos las ecuaciones de Maxwell desde el principio e iremos resolviéndolas en diferentes pasos para tratar de simplificar el problema global.

5.2 Frecuencias de corte de los modos

Antes de comenzar a analizar los modos que se propagan por una fibra, es necesario determinar cuáles son los modos que se van a propagar y bajo que condiciones se va a realizar esta propagación. En general sabemos que la forma en la que la luz se propaga en una fibra óptica viene determinada por los siguientes parámetros:

- λ , longitud de onda

- a , radio de la fibra
- n_1 , índice de refracción del núcleo
- n_2 , índice de refracción del revestimiento

Sin embargo suele ser más habitual referir todo a una serie de parámetros normalizados, que son los que realmente vamos a utilizar:

- V , frecuencia normalizada, definida como

$$V = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (5.1)$$

- β , constante de propagación del modo
- b , constante de propagación del modo normalizada
- k , número de onda en el vacío
- q_1
- q_2

La relación entre cada una de estas variables es

$$(q_1 a)^2 + (q_2 a)^2 = V^2 \quad (5.2)$$

$$b = \frac{a^2 q_2^2}{V^2} \quad (5.3)$$

$$q_1^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_1 - \beta^2 = k^2 n_1^2 - \beta^2 \quad (5.4)$$

$$q_2^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_2 = \beta^2 - k^2 n_2^2 \quad (5.5)$$

Recordemos en primer lugar que la ecuación característica de la fibra óptica es

$$(J_\nu + K_\nu) (k_1^2 J_\nu + k_2^2 K_\nu) = \left(\frac{\beta \nu}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right)^2 \quad (5.6)$$

donde se ha definido

$$J_\nu = \frac{J'_\nu(q_1 a)}{J_\nu(q_1 a)} \quad (5.7)$$

$$K_\nu = \frac{K'_\nu(q_2 a)}{K_\nu(q_2 a)} \quad (5.8)$$

Cada una de las soluciones a las ecuaciones de Maxwell cumplen esta ecuación. En concreto, también se debe cumplir cuando cualquiera de los modos comience a propagarse por la fibra. Un modo comienza a propagarse justo cuando $b = 0$. En ese caso, y según la ecuación 5.3, $q_2 = 0$, por lo que según la ecuación 5.2, $V|_c = q_1 a$. Analizando la ecuación característica bajo estos supuestos, se llega a que las frecuencias de corte de los modos son los ceros de la función:

$$J_\nu(V|_c) = 0 \quad (5.9)$$

Problema 8 *Para una fibra óptica dada calcule todas las frecuencias de corte a partir de las cuales uno o más modos se propagarán a través de la fibra óptica.*

5.3 Resolución de la ecuación de dispersión en una fibra de salto de índice

Una vez que sabemos a partir de que puntos se empiezan a propagar nuevos modos, sería necesario calcular con que características se están propagando. Para ello lo mejor es dibujar un diagrama V-b, donde para cada posible frecuencia normalizada se representa el parámetro b con el que los modos se propagan. El problema fundamental es que como varios modos se pueden propagar a partir una misma condición de corte, cuando resolvemos la ecuación anterior no sabemos para cual

Modos	Frecuencia de corte	Condición
TE_{0m}	u_{0m}	$\nu = 0$
TM_{0m}	u_{0m}	$\nu = 0$
HE_{11}	0	$\nu = 1$
HE_{1m}	$u_{1(m-1)}$	$\nu = 1$
$EH_{\nu m}$	$u_{\nu m}$	$\nu \geq 1$
$HE_{\nu m}$	$u_{(\nu-2)m}$	$\nu > 1$

TABLA 5.1. Frecuencias de corte para cada uno de los modos que se pueden propagar por una fibra óptica

de todos los modos la estamos resolviendo. Por ello en este apartado daremos un desarrollo matemático que permite distinguir entre modos.

Cada modo que se propaga por la fibra óptica tiene una condición de corte. Esta condición de corte la vamos a denominar en terminos generales u_{nm} , esto es, $J_\nu(u_{\nu m}) = 0$, donde por lo tanto ν sería el orden de la función de Bessel y m sería el número de cero dentro de un orden determinado. La tabla 5.1 realciona cada modo con los ceros de la ecuación 5.9.

Lo que ahora realizaremos serán una serie de operaciones sobre la ecuación de dispersión que nos llevará a separar los distintos casos. En primer lugar, sacando factor común a k

$$(J_\nu + K_\nu) (n_1^2 J_\nu + n_2^2 K_\nu) = \left(\frac{\beta \nu}{ka} \right)^2 \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right)^2 \quad (5.10)$$

y operando

$$n_1^2 J_\nu^2 + n_2^2 J_\nu K_\nu + n_1^2 J_\nu K_\nu + n_2^2 K_\nu^2 = \left[\frac{\beta \nu}{ka} \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right) \right]^2 \quad (5.11)$$

$$n_1^2 J_\nu^2 + (n_1^2 + n_2^2) J_\nu K_\nu + n_2^2 K_\nu^2 = \left[\frac{\beta \nu}{ka} \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right) \right]^2 \quad (5.12)$$

$$J_\nu^2 + \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1^2} J_\nu K_\nu + \frac{n_2^2}{n_1^2} K_\nu^2 - \left[\frac{\beta\nu}{n_1 k a} \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right) \right]^2 = 0 \quad (5.13)$$

Tenemos una ecuación de segundo grado en J_ν , que podemos resolver

$$J_\nu = \frac{-\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1^2} K_\nu \pm \sqrt{\left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1^2} K_\nu \right)^2 - 4 \left\{ \frac{n_2^2}{n_1^2} K_\nu^2 - \left[\frac{\beta\nu}{n_1 k a} \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right) \right]^2 \right\}}}{2} \quad (5.14)$$

y operando se llega a:

$$J_\nu = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} K_\nu \pm \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \right)^2 K_\nu^2 + \left[\frac{\beta\nu}{n_1 k a} \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right) \right]^2} \quad (5.15)$$

Si definimos el parámetro C como

$$C = \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \right)^2 K_\nu^2 + \left[\frac{\beta\nu}{n_1 k a} \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right) \right]^2} \quad (5.16)$$

la ecuación (5.15) se puede escribir como

$$J_\nu = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} K_\nu \pm C \quad (5.17)$$

si dividimos la ecuación anterior por a , se obtiene

$$\frac{J_\nu}{a} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K_\nu}{a} \pm \frac{C}{a} \quad (5.18)$$

sustituyendo las funciones J_ν y K_ν por sus valores se obtiene

$$\frac{J'_\nu(q_1 a)}{q_1 a J_\nu(q_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_\nu(q_2 a)}{q_2 a K_\nu(q_2 a)} \pm \frac{C}{a} \quad (5.19)$$

Si tenemos en cuenta las siguientes relaciones para las funciones de Bessel

$$J'_\nu(q_1 a) = -J_{\nu+1}(q_1 a) + \frac{\nu}{q_1 a} J_\nu(q_1 a) \quad (5.20)$$

$$J'_\nu(q_1 a) = J_{\nu-1}(q_1 a) - \frac{\nu}{q_1 a} J_\nu(q_1 a) \quad (5.21)$$

Si en la expresión (5.19) nos quedamos con el signo $+$ y se introduce la relación (5.20) obtenemos

$$-\frac{J_{\nu+1}(q_1 a)}{q_1 a J_\nu(q_1 a)} + \frac{\nu}{q_1^2 a^2} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_\nu(q_2 a)}{q_2 a K_\nu(q_2 a)} + \frac{C}{a} \quad (5.22)$$

$$\frac{J_{\nu+1}(q_1 a)}{q_1 a J_{\nu}(q_1 a)} = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_{\nu}(q_2 a)}{q_2 a K_{\nu}(q_2 a)} + \left(\frac{\nu}{q_1^2 a^2} - \frac{C}{a} \right) \quad (5.23)$$

que resulta ser la condición para los modos EH. Si ahora en la ecuación (5.19) utilizamos el signo $-$ y utilizamos ahora la relación (5.21) nos queda

$$\frac{J_{\nu-1}(q_1 a)}{q_1 a J_{\nu}(q_1 a)} - \frac{\nu}{q_1^2 a^2} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_{\nu}(q_2 a)}{q_2 a K_{\nu}(q_2 a)} - \frac{C}{a} \quad (5.24)$$

$$\frac{J_{\nu-1}(q_1 a)}{q_1 a J_{\nu}(q_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_{\nu}(q_2 a)}{q_2 a K_{\nu}(q_2 a)} + \left(\frac{\nu}{q_1^2 a^2} - \frac{C}{a} \right) \quad (5.25)$$

en este caso obtenemos la condición para los modos HE.

Analicemos ahora que ocurre en las condiciones para los modos EH y HE cuando se particulariza para el caso en que $\nu = 0$. Si partimos de la condición para los modos EH, expresión (5.23), obtenemos

$$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_0(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} - \frac{C}{a} \quad (5.26)$$

si ahora en la expresión de C , expresión (5.16), particularizamos para $\nu = 0$ obtenemos

$$C|_{\nu=0} = \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \right)^2 K_0^2} \quad (5.27)$$

$$C|_{\nu=0} = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} K_0 = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_0(q_2 a)}{q_2 K_0(q_2 a)} \quad (5.28)$$

e introduciendo este valor de C en la expresión (5.26) se obtiene

$$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_0(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} - \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_0(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} \quad (5.29)$$

$$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K'_0(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} \quad (5.30)$$

Si tenemos en cuenta la siguiente relación de las funciones de Bessel

$$K'_0(q_2 a) = -K_1(q_2 a) \quad (5.31)$$

ahora la expresión (5.30) se puede escribir como

$$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = -\frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K_1(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} \quad (5.32)$$

La condición encontrada para los modos EH si se particulariza para $\nu = 0$ se obtiene la condición para los modos TM. Por eso se les conoce a los modos TM como modos E.

Continuando con el análisis para $\nu = 0$, ahora le toca el turno a la condición de los modos HE, expresión (5.25), y entonces podemos escribir

$$\frac{J_{-1}(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_0(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} - \frac{C}{a} \quad (5.33)$$

Ahora teniendo en cuenta las siguientes relaciones de las funciones de Bessel

$$K'_0(q_2 a) = -K_1(q_2 a) \quad (5.34)$$

$$J_{-1}(q_1 a) = -J_1(q_1 a) \quad (5.35)$$

y la relación obtenida para C en el caso particular de que $\nu = 0$, expresión (5.28), ahora la condición (5.33) se puede escribir

$$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K_1(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} + \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \frac{-K_1(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} \quad (5.36)$$

$$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K_1(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} - \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \frac{K_1(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} \quad (5.37)$$

$$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = -\frac{K_1(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} \quad (5.38)$$

La condición encontrada para los modos HE si se particulariza para $\nu = 0$ se obtiene la condición para los modos TE. Por eso, los modos TE son conocidos como modos H.

Para resumir recordemos las condiciones de los distintos modos, recogidas en la Tabla (5.2).

TABLA 5.2. Ecuaciones características de los distintos modos.

Condición Modos TM	$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = -\frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K_1(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)}$
Condición Modos TE	$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = -\frac{K_1(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)}$
Condición Modos HE	$\frac{J_{\nu-1}(q_1 a)}{q_1 a J_{\nu}(q_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_{\nu}(q_2 a)}{q_2 a K_{\nu}(q_2 a)} + \left(\frac{\nu}{q_1^2 a^2} - \frac{C}{a} \right)$
Condición Modos EH	$\frac{J_{\nu+1}(q_1 a)}{q_1 a J_{\nu}(q_1 a)} = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_{\nu}(q_2 a)}{q_2 a K_{\nu}(q_2 a)} + \left(\frac{\nu}{q_1^2 a^2} - \frac{C}{a} \right)$

Veamos ahora el procedimiento gráfico para resolver las ecuaciones. Analicemos el caso de los modos TE, recordemos su condición

$$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = -\frac{K_1(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} \quad (5.39)$$

Representemos en primer lugar la condición dada

$$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} \Rightarrow y = \frac{J_1(x)}{x J_0(x)} \quad (5.40)$$

En la Figura 5.1 se ha representado y . En dicha figura se obser como aparecen los polos en los ceros del denominador de la expresión anterior. Estos ceros son $u_{01} = 2,405$, $u_{02} = 5,520$, $u_{03} = 8,654$ y $u_{04} = 11,792$ y se observa como en esos valores aparecen las asíntotas. Además la función y presenta los ceros marcados por las raíces de $J_1(x)$. Estas raíces son $u_{11} = 3,832$, $u_{12} = 7,016$ y $u_{13} = 10,573$.

Veamos el valor de la función y en el origen

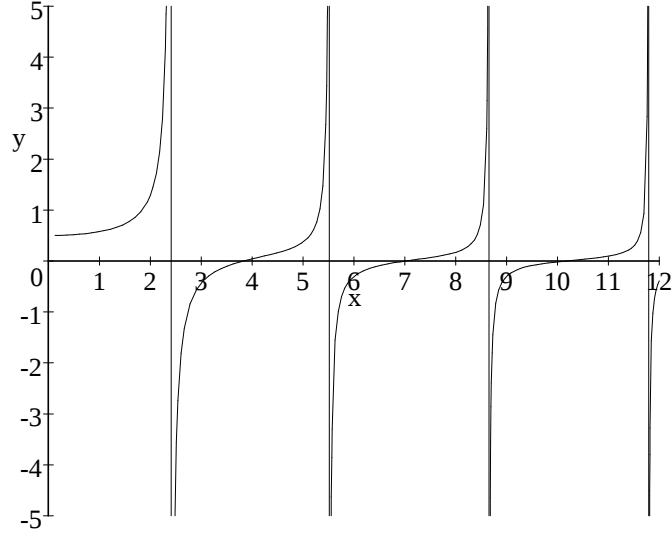
$$J_{\nu}(x)|_{x \ll 1} = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2} \right)^{\nu} \quad (5.41)$$

$$J_1(x)|_{x \ll 1} = \frac{1}{1!} \left(\frac{x}{2} \right)^1 = \frac{x}{2} \quad (5.42)$$

$$J_0(x)|_{x \ll 1} = \frac{1}{0!} \left(\frac{x}{2} \right)^0 = 1 \quad (5.43)$$

en consecuencia

$$\left. \frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} \right|_{q_1 a \rightarrow 0} = \frac{\frac{q_1 a}{2}}{q_1 a} = \frac{1}{2} \quad (5.44)$$

FIGURA 5.1. Representación de la función y dada por la expresión (5.40).

Representemos ahora el otro miembro de la igualdad

$$-\frac{K_1(q_2a)}{q_2aK_0(q_2a)} \quad (5.45)$$

Lo que nos interesa ahora es representar no en función de q_2a sino en función de q_1a , luego si tenemos en cuenta la definición de frecuencia normalizada

$$(q_1a)^2 + (q_2a)^2 = V^2 \quad (5.46)$$

podemos expresar q_2a en función de q_1a y escribir

$$-\frac{K_1(q_2a)}{q_2aK_0(q_2a)} = -\frac{K_1\left(\sqrt{V^2 - (q_1a)^2}\right)}{\sqrt{V^2 - (q_1a)^2}K_0\left(\sqrt{V^2 - (q_1a)^2}\right)} \quad (5.47)$$

y representar

$$g = -\frac{K_1(\sqrt{V^2 - x^2})}{\sqrt{V^2 - x^2}K_0(\sqrt{V^2 - x^2})} \quad (5.48)$$

para distintos valores de V , en este caso hemos representado para un valor de $V = 8$, y el resultado obtenido se muestra en la Figura 5.2.

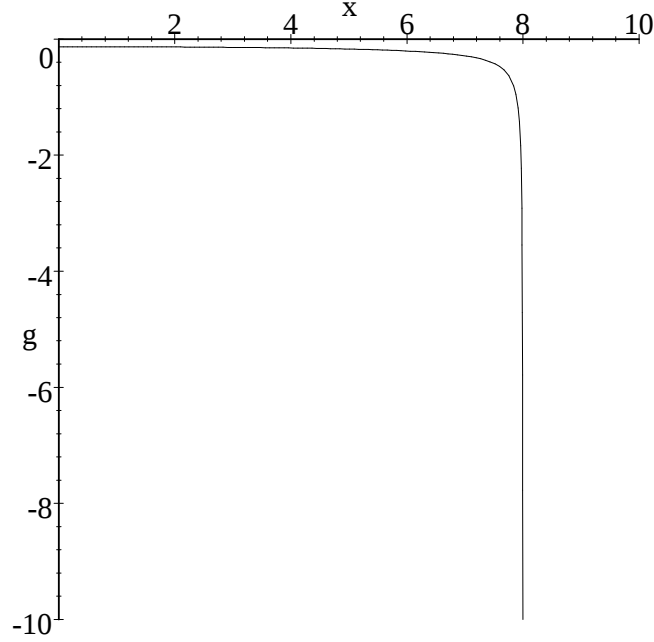


FIGURA 5.2. Representación de la función g dada por la expresión (5.48).

Si representamos superpuestas ambas gráficas el resultado que se obtiene es el representado en la Figura 5.3, además podemos añadir otra gráfica donde el valor de $V = 5$ para ver lo que ocurre.

Analicemos el caso de los modos TM, recordemos su condición

$$\frac{J_1(q_1 a)}{q_1 a J_0(q_1 a)} = -\frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K_1(q_2 a)}{q_2 a K_0(q_2 a)} \quad (5.49)$$

condición que es exactamente igual a la de los modos TE luego sólo cambiará la forma de la curva g en el factor el cociente de los índices al cuadrado como se observa en la Figura 5.4. En dicha Figura como casi coinciden las curvas g para los modos TE y TM.

Este mismo método se puede aplicar tanto para los modos EH como los modos HE.

Problema 9 Una vez visto el método para calcular cada uno de los parámetros para cada V , se le pide que dibuje un diagrama V - b para una fibra óptica cualquiera.

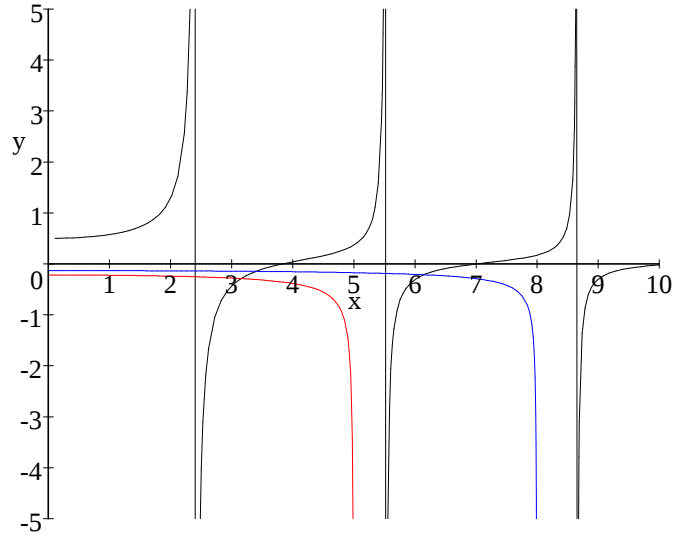


FIGURA 5.3. Representación esquemática de los modos TE para dos valores de $V = 8$ y $V = 5$.

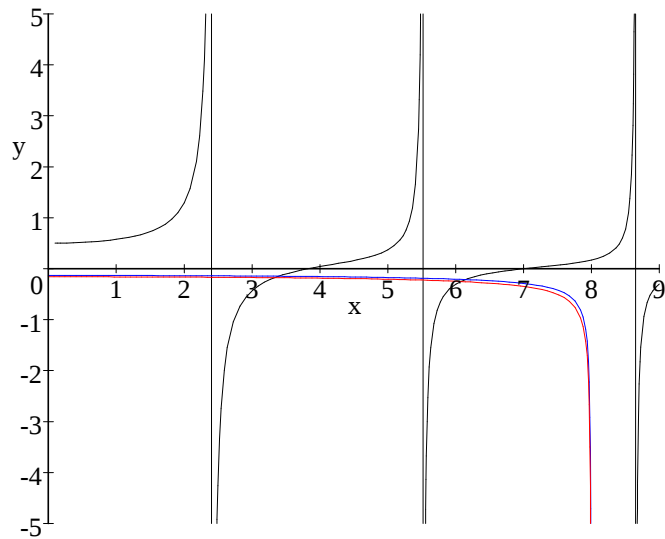


FIGURA 5.4. Representación esquemática de los modos TE y TM.

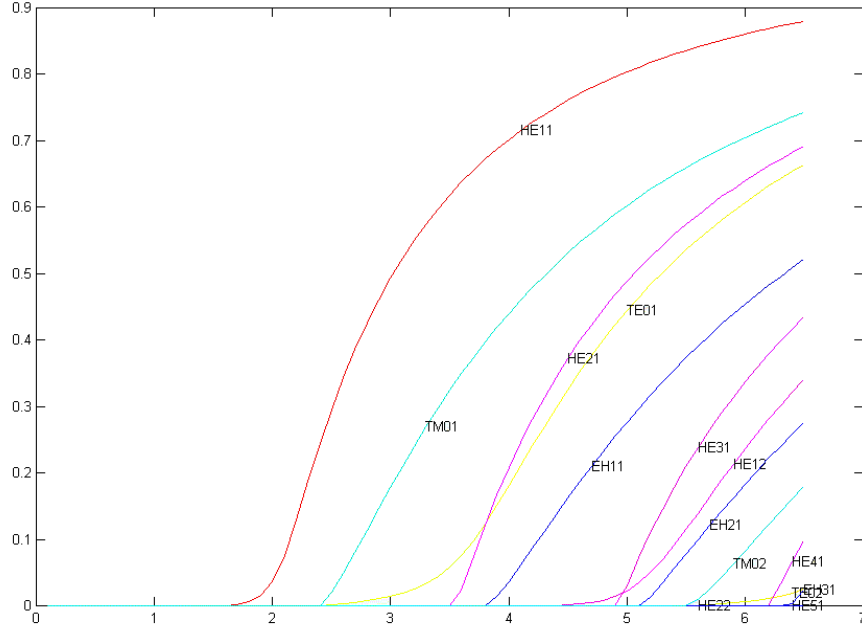


FIGURA 5.5. Ejemplo de diagrama V-b para una fibra de salto de índice

Debería quedarle algo como se ve en la Figura 5.5. Pruebe a variar los parámetros de la fibra e indique si encuentra algún caso especial.

5.4 Estudio de los modos linealmente polarizados

5.4.1 Análisis de la ecuación de dispersión bajo guiado débil

Veamos que ocurre en el caso de que los índices de refracción sean muy próximos, es decir que $n_1 \approx n_2$, en este caso las constantes de propagación en medios de índices n_1 y n_2 se pueden escribir como

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = n_1 k \\ k_2 = n_2 k \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 \approx k_2 \quad (5.50)$$

teniendo en cuenta la condición impuesta a la constante de propagación en la fibra para que los modos sean guiados

$$n_2 k = k_2 \leq \beta \leq k_1 = n_1 k \quad (5.51)$$

TABLA 5.3. Ecuaciones de dispersión para los distintos modos bajo la hipótesis de guiado débil

Condición Modos TE y TM	$q_1 \frac{J_0(q_1 a)}{J_1(q_1 a)} = -q_2 \frac{K_0(q_2 a)}{K_1(q_2 a)}$
Condición Modos HE	$q_1 \frac{J_\nu(q_1 a)}{J_{\nu-1}(q_1 a)} = q_2 \frac{K_\nu(q_2 a)}{K_{\nu-1}(q_2 a)}$
Condición Modos EH	$q_1 \frac{J_\nu(q_1 a)}{J_{\nu+1}(q_1 a)} = -q_2 \frac{K_\nu(q_2 a)}{K_{\nu+1}(q_2 a)}$

en consecuencia

$$k_1 \approx \beta \approx k_2 \quad (5.52)$$

En consecuencia la ecuación característica de la fibra, que reproducimos a continuación,

$$(J_\nu + K_\nu) (k_1^2 J_\nu + k_2^2 K_\nu) = \left(\frac{\beta \nu}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right)^2 \quad (5.53)$$

se transforma en

$$(J_\nu + K_\nu) \beta^2 (J_\nu + K_\nu) = \left(\frac{\beta \nu}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right)^2 \quad (5.54)$$

Analizando esta ecuación se puede llegar a las expresiones de las condiciones de los modos bajo la hipótesis de Guiado débil, que se encuentra resumidas en la Tabla 5.3.

Las condiciones de esta tabla se pueden escribir de forma compacta como sigue

$$q_1 \frac{J_{l-1}(q_1 a)}{J_l(q_1 a)} = -q_2 \frac{K_{l-1}(q_2 a)}{K_l(q_2 a)} \begin{cases} l = 1 & \text{Condición Modos TE y TM} \\ l = \nu + 1 & \text{Condición Modos EH}_{\nu m} \\ l = \nu - 1 & \text{Condición Modos HE}_{\nu m} \end{cases} \quad (5.55)$$

Por lo tanto observamos que para varios modos se tiene la misma condición, y de esta forma serían modos degenerados. Gloge propone para estos modos una notación especial, los denomina modos linealmente polarizados (LP), de acuerdo con la siguiente regla

- LP_{0m} para los modos HE_{1m}

- LP_{1m} para los modos TE_{0m} , TM_{0m} y HE_{2m}
- $LP_{\nu m}$ para los modos $HE_{(\nu+1)m}$ y $EH_{(\nu-1)m}$

Además la notación propuesta por Gloge tiene otro significado, un modo $LP_{\nu m}$ significa que tiene 2ν máximos de intensidad a lo largo del perímetro y m máximos a lo largo del radio

5.4.2 Análisis de los modos bajo guiado débil

Estudiemos los modos que se propagan en una fibra en la que se cumple la aproximación de guiado débil. Las expresiones del campo eléctrico y magnético se pueden expresar en sus tres componentes en un sistema de coordenadas cilíndricas como sigue:

$$\mathbf{E} = E_r \hat{e}_r + E_\phi \hat{e}_\phi + E_z \hat{e}_z \quad (5.56)$$

$$\mathbf{H} = H_r \hat{e}_r + H_\phi \hat{e}_\phi + H_z \hat{e}_z \quad (5.57)$$

A partir de las ecuaciones de Maxwell se puede obtener las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + j\beta E_\phi = -j\omega\mu H_r \quad (5.58)$$

$$j\beta E_r + \frac{\partial E_z}{\partial r} = j\omega\mu H_\phi \quad (5.59)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial (rE_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right] = -j\omega\mu H_z \quad (5.60)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + j\beta H_\phi = j\omega\varepsilon E_r \quad (5.61)$$

$$j\beta H_r + \frac{\partial H_z}{\partial r} = -j\omega\varepsilon E_\phi \quad (5.62)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \phi} \right] = j\omega\mu E_z \quad (5.63)$$

A partir de estas ecuaciones se pueden obtener unas expresiones que relacionan las componentes transversales en función de las componentes longitudinales, a saber

$$E_r = -\frac{j}{q^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega\mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \quad (5.64)$$

$$E_\phi = -\frac{j}{q^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (5.65)$$

$$H_r = -\frac{j}{q^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\omega\varepsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \quad (5.66)$$

$$H_\phi = -\frac{j}{q^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \quad (5.67)$$

donde el parámetro q^2 está definido como

$$q^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2 \quad (5.68)$$

Introduciendo las ecuaciones (5.64), (5.65), (5.66) y (5.67) en (5.60) y (5.63) se obtienen las ecuaciones diferenciales para las componentes longitudinales

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + q^2 E_z = 0 \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + q^2 H_z = 0 \quad (5.70)$$

que se pueden resolver por el tradicional método de separación de variables introduciendo soluciones de la forma

$$E_z = A F_1(r) e^{j\nu\phi} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.71)$$

$$H_z = B G_1(r) e^{j\nu\phi} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.72)$$

donde ν es una constante positiva o negativa pero ha de ser entera para que se cumpla la periodicidad en 2π . Introduciendo estas expresiones en (5.69) y (5.70), las ecuaciones diferenciales que tenemos que resolver son

$$\frac{d^2 F_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_1(r)}{dr} + \left(q^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) F_1(r) = 0 \quad (5.73)$$

$$\frac{d^2 G_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_1(r)}{dr} + \left(q^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) G_1(r) = 0 \quad (5.74)$$

Para resolver las ecuaciones (5.73) y (5.74) hay que recurrir a las funciones de Bessel de primera y segunda especies, además tenemos que encontrar la soluciones dentro del núcleo y fuera de este, es decir para $r < a$ y para $r > a$. Además si se tiene en cuenta el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel en el origen y en el infinito, las soluciones son

$$E_z(r \leq a) = A J_\nu(q_1 r) e^{j\nu\phi} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.75)$$

$$H_z(r \leq a) = B J_\nu(q_1 r) e^{j\nu\phi} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.76)$$

donde

$$q_1^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_1 - \beta^2 = k_1^2 - \beta^2 = k^2 (n_1^2 - n_{eff}^2) \quad (5.77)$$

Estas soluciones son válidas para $r \leq a$. Fuera del núcleo las soluciones para las componentes longitudinales se obtienen por las funciones de Bessel modificadas, normalmente representadas por $K_\nu(z)$ e $I_\nu(z)$. Así las soluciones son

$$E_z(r \geq a) = C K_\nu(q_2 r) e^{j\nu\phi} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.78)$$

$$H_z(r \geq a) = D K_\nu(q_2 r) e^{j\nu\phi} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.79)$$

donde

$$q_2^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_2 = \beta^2 - k_2^2 = k^2 (n_{eff}^2 - n_2^2) \quad (5.80)$$

Si se impone las condiciones de continuidad se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} J_\nu(q_1 a) & 0 & -K_\nu(q_2 a) & 0 \\ \frac{\beta\nu}{q_1^2 a} J_\nu(q_1 a) & \frac{j\omega\mu}{q_1} J'_\nu(q_1 a) & \frac{\beta\nu}{q_2^2 a} K_\nu(q_2 a) & \frac{j\omega\mu}{q_2} K'_\nu(q_2 a) \\ 0 & J_\nu(q_1 a) & 0 & -K_\nu(q_2 a) \\ -\frac{j\omega\varepsilon_1}{q_1} J'_\nu(q_1 a) & \frac{\beta\nu}{q_1^2 a} J_\nu(q_1 a) & -\frac{j\omega\varepsilon_2}{q_2} K'_\nu(q_2 a) & \frac{\beta\nu}{q_2^2 a} K_\nu(q_2 a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

5.4.2.1 Expresiones de campo de los modos híbridos HE y EH

Problema 10 Expresar B , C y D en función de A a partir del sistema de ecuaciones tanto para los modos EH como HE .

Para conseguir esto utilice las expresiones de las ecuaciones de Bessel:

$$J'_\nu(q_1 a) = \frac{\nu}{q_1 a} J_\nu(q_1 a) - J_{\nu+1}(q_1 a) \quad (5.82)$$

$$K'_\nu(q_2 a) = \frac{\nu}{q_2 a} K_\nu(q_2 a) - K_{\nu+1}(q_2 a) \quad (5.83)$$

y utilice también:

$$J'_\nu(q_1 a) = -\frac{\nu}{q_1 a} J_\nu(q_1 a) + J_{\nu-1}(q_1 a) \quad (5.84)$$

$$K'_\nu(q_2 a) = -\frac{\nu}{q_2 a} K_\nu(q_2 a) - K_{\nu-1}(q_2 a) \quad (5.85)$$

Problema 11 Una vez calculadas las componentes longitudinales del campo en función de A , calcular las componentes transversales del campo. Tenga en cuenta para su simplificación que:

$$J'_\nu(q_1 r) = \pm \frac{\nu}{q_1 r} J_\nu(q_1 r) \mp J_{\nu\pm 1}(q_1 r) \quad (5.86)$$

y que

$$K'_\nu(q_2 r) = \pm \frac{\nu}{q_2 r} K_\nu(q_2 r) - K_{\nu\pm 1}(q_2 r) \quad (5.87)$$

Por comodidad no arrastre la dependencia en ϕ , t y z . Pero tenga en cuenta la dependencia en ϕ en el caso de que tenga que derivar.

Problema 12 *Para comprobar la polarización lineal de los modos nos interesa trabajar con coordenadas cartesianas. Previamente hay que tener en cuenta la dependencia en ϕ .*

Exercise 13 *Tenga en cuenta las siguientes ecuaciones de cambio de coordenadas*

$$P_x = P_r \cos \phi - P_\phi \sin \phi \quad (5.88)$$

$$P_y = P_r \sin \phi + P_\phi \cos \phi \quad (5.89)$$

y tenga también en cuenta la expresión para el coseno de la suma y diferencia y las expresiones para el seno

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad (5.90)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad (5.91)$$

En este momento debe tener las componentes en cartesianas de los modos HE y EH tanto para $r \leq a$ como para $r \geq a$.

5.4.2.2 Análisis de los modos TE y TM

Problema 14 *Siga los pasos anteriores pero tenga en cuenta que para TE $E_z = 0$ y para TM $H_z = 0$.*

5.4.2.3 Estudio de los modos LP_{0m}

Problema 15 *Realice combinaciones lineales de los modos HE_{1m} para conseguir que sólo estén polarizados en la dirección x o en la dirección y . Las expresiones que obtenga son las denominadas modos LP_{0m} .*

5.4.2.4 Estudio de los modos LP_{1m}

Problema 16 *Calcule las expresiones de los modos LP_{1m} igual que en caso anterior. Recuerde que estos modos son combinaciones de $TE_{0m} \pm HE_{2m}$ y $TM_{0m} \pm HE_{2m}$.*

5.4.2.5 Estudio de los modos $LP_{\nu m}$

Problema 17 *Calcule las expresiones de los modos $LP_{\nu m}$ igual que en caso anterior. Recuerde que estos modos son combinaciones de $HE_{(\nu+1)m}$ y $HE_{(\nu-1)m}$.*

5.5 Realización de la práctica

Una vez que todos los pasos anteriores han sido cumplimentados, deberá implementar un programa en MATLAB que para unos parámetros de la fibra dados y la longitud de onda a la cual se trabaja sea capaz de representar gráficamente la distribución de intensidad de todos y cada uno de los modos LP que por ella se pueden propagar.

Part II

Prácticas con MATLAB