

PRACTICA 1

MEDIDA DE LA APERTURA NUMÉRICA

1.1 Introducción

Es muy importante que lea detenidamente las instrucciones de cada una de las prácticas. Al principio éstas serán muy detalladas. Conforme el alumno se supone que va adquiriendo destreza las instrucciones serán menos explícitas. Si tiene alguna duda **pregunte al profesor**.

Al finalizar la práctica deje todo el material tal y como se le ha entregado.

La estructura del texto de las prácticas será:

- Objetivo de la práctica: Apartado 1.2
- Explicación de los aspectos teóricos relacionados con la práctica: Apartados 1.3, 1.4 y 1.5
- Material necesario para la realización de la práctica: Apartado 1.6
- Instrucciones para la realización de la práctica: Apartado 1.7
- Detalles del funcionamiento de algunos de los instrumentos necesarios para la realización de la práctica: Apartados 1.8, 1.9, 1.10 y 1.11

1.2 Objetivo de la práctica

En esta primera práctica se quiere medir la apertura numérica de una fibra óptica. El método propuesto para la medida de la apertura numérica es muy didáctico ya que permite ilustrar el estudio de este tipo de fibras mediante la óptica geométrica. Además con esta práctica se intentará familiarizarse con las fibras ópticas, concretamente aprenderá la preparación de la fibra para su uso en este laboratorio y el uso de parte del material básico que necesitará utilizar en estas prácticas.

1.3 La fibra óptica

La fibra óptica es el canal de comunicación más adecuado cuando se trata de transmitir señales luminosas. La sección de una fibra óptica es cilíndrica y tiene tres partes claramente diferenciadas; por un lado, en la parte central, el núcleo¹ de vidrio de sílice rodeado, en segundo término, por un revestimiento² con un índice de refracción más pequeño que el del núcleo y, todo esto, protegido por una camisa o recubrimiento.

Las fibras ópticas se pueden clasificar atendiendo a diversos criterios, a saber:

- Naturaleza del índice de refracción
 - Índice en escalón: Cuando el índice de refracción cambia de una forma brusca en la interfase del núcleo y el revestimiento de la fibra, tales fibras se las conoce por el nombre de fibra óptica de salto de índice. En la Figura 1.1 se puede ver de forma esquemática una fibra de salto de índice y el perfil del índice de refracción en las distintas zonas de la fibra óptica.
 - Índice gradual: Otro tipo de fibra distinta a la de salto de índice es la denominada fibra óptica de índice gradual, que se caracteriza por tener

¹En inglés denominado core.

²En inglés denominado cladding.

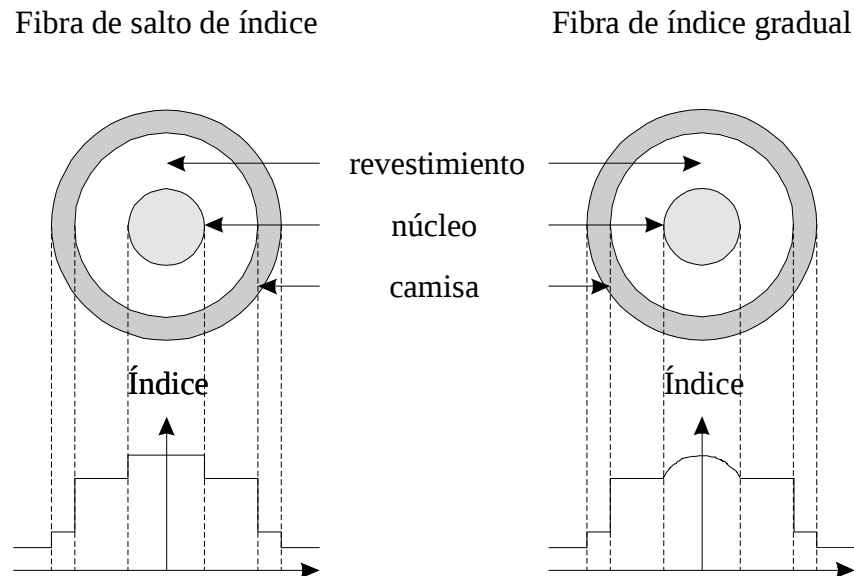


FIGURA 1.1. Secciones transversales y perfiles del índice de refracción para una fibra de salto de índice y una fibra de índice gradual.

una transición gradual desde el centro del núcleo al revestimiento (Ver también Figura 1.1)

- Modo de propagación: Otra forma de clasificar a las fibras es atendiendo al número de modos que se propagan, así podemos hablar de fibras:
 - Monomodo
 - Multimodo
- Naturaleza de los materiales: Y para finalizar la clasificación se puede hablar de distintos tipos de fibra en función de los materiales elegidos para su fabricación.

El estudio de la propagación de la luz por una fibra se puede realizar con ayuda de la óptica geométrica o recurriendo a la teoría electromagnética, conocida como teoría de modos. La teoría electromagnética es complicada y nos proporciona una gran cantidad de información, aunque el tratamiento matemático es complejo y laborioso. La óptica geométrica en cambio nos proporciona cierta información de forma relativamente sencilla.

Los diámetros típicos del núcleo de una fibra monomodo están comprendidos entre 4 y 8 μm y en las fibras multimodo entre 50 y 100 μm . Existen fibras con diámetros mayores de núcleo pero que no se utilizan en comunicaciones ópticas. El valor típico del diámetro del revestimiento para fibras monomodo son del orden de 80 μm y en las fibras multimodo están comprendidas entre 125 y 140 μm . El diámetro exterior de la camisa está comprendido entre 500 y 1000 μm .

1.4 Óptica geométrica

Se puede obtener gran información en la transmisión por una fibra óptica usando la óptica geométrica. A pesar de ser una aproximación, es válida cuando el radio del núcleo es mucho mayor que la longitud de onda. Si esto no ocurre hay que recurrir a la teoría electromagnética.

1.4.1 Rayos luminosos

Un rayo de luz es una línea en el espacio que corresponde a la dirección del flujo de la energía radiante. Como tal, es un instrumento matemático más que una entidad física. En la práctica se pueden producir finos haces de luz, con la ayuda de un láser, y podríamos imaginar que un rayo es el límite inalcanzable en la anchura de tal haz. Recuérdese que en un **medio isotrópico**, es decir, uno cuyas propiedades son las mismas en todas las direcciones, los rayos son trayectorias ortogonales de los frentes de onda. Dicho de otro modo, son líneas normales a los frentes de onda en cada punto. Evidentemente, en tal medio un rayo es paralelo al vector de propagación. Como podría sospecharse, esto no es verdad en sustancias anisotrópicas. Dentro de los materiales isotrópicos homogéneos los rayos serán líneas rectas ya que por simetría no se puede flexionar en ninguna dirección preferente, puesto que no hay ninguna. Además, como resultado del hecho de que la velocidad de propagación es idéntica en todas direcciones dentro de un medio dado, la separación espacial entre

dos frentes de onda medida a lo largo de los rayos debe ser la misma en todo el frente de ondas.

1.4.2 Índice de refracción

El índice de refracción, n , de un medio es la relación entre las velocidades de una onda electromagnética en el vacío y en el medio. Se define como

$$n = \frac{c}{v} \quad (1.1)$$

donde c representa la velocidad de propagación en el vacío, y v la velocidad de propagación en el medio considerado. Puesto que $c > v$, se verificará que $n > 1$.

1.4.3 Reflexión y refracción

En la Figura 1.2 se observa un haz de luz, viajando por el aire, llega a la superficie del agua, parte se refleja en la superficie y parte se desvía (esto es refracta) al entrar en el agua. El haz incidente está representado en dicha figura como una sola línea, **rayo incidente**, paralelo a la dirección de propagación. Se supone que el haz incidente es una **onda plana**, siendo los frentes de onda perpendiculares al rayo incidente. Los haces reflejados y refractados también se representan mediante rayos. Los **ángulos de incidencia** (θ_i), de **reflexión** (θ_r) y de **refracción** (θ_t) se miden entre la normal a la superficie y el rayo respectivo, como se puede ver en la Figura 1.2.

Las leyes que gobiernan la reflexión y la refracción se pueden encontrar fácilmente de forma experimental:

- El rayo reflejado y el rayo refractado están en el plano formado por el rayo incidente y la normal a la superficie en el punto de incidencia. En otras palabras, los vectores de propagación unitarios respectivos son coplanares.
- Para la reflexión se verifica

$$\theta_r = \theta_i \quad (1.2)$$

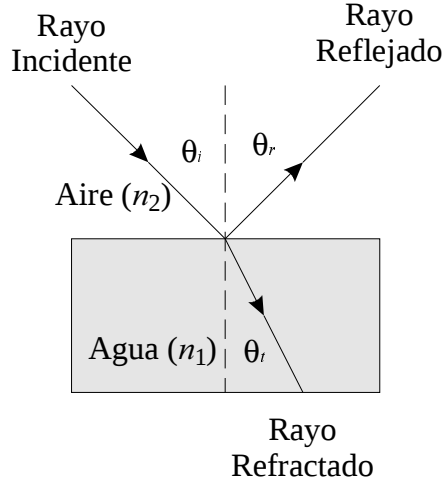


FIGURA 1.2. Representación del fenómeno de reflexión y refracción en una interfase aire-agua usando la óptica geométrica.

- Para la refracción se verifica

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_1}{n_2} \quad (1.3)$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción del medio 1 y 2. El índice de refracción de un medio varía con la longitud de onda.

1.4.4 Reflexión total interna

Consideremos varios rayos de luz en un medio con un índice de refracción de valor n_1 que llegan a otro medio con un índice n_2 menor que n_1 como se puede ver en la Figura 1.3. Conforme aumenta el ángulo de incidencia, se llega a un caso en el que el rayo refractado sale con un ángulo de refracción de 90° . Para ángulos de incidencia mayores que este ángulo crítico, θ_c , no hay rayo refractado, ocurriendo el fenómeno denominado **reflexión total interna**.

El ángulo crítico se puede obtener particularizando la ecuación (1.3) para el fenómeno de reflexión total interna:

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90 \quad (1.4)$$

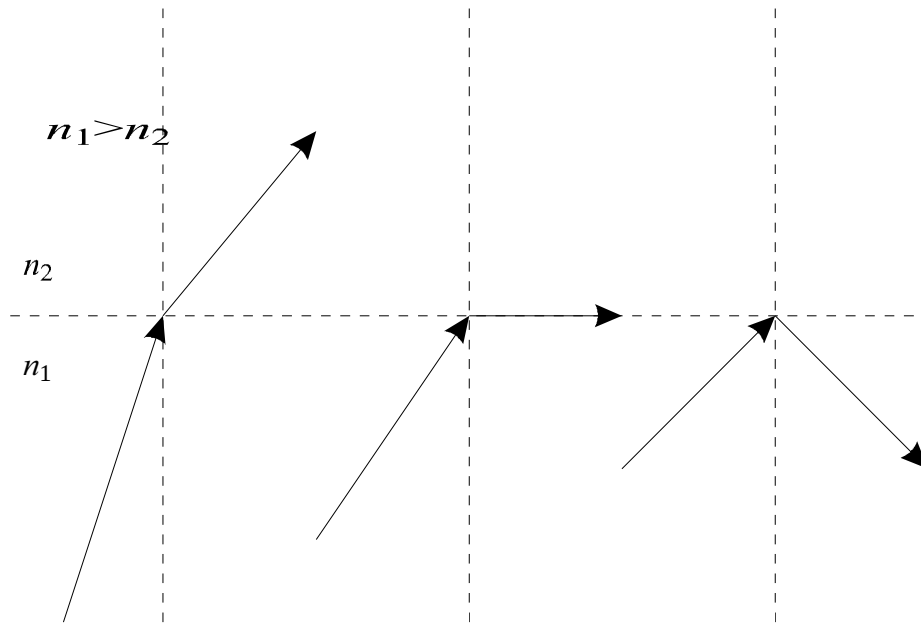


FIGURA 1.3. Representación esquemática del fenómeno de reflexión total interna.

despejando el valor del ángulo crítico se obtiene

$$\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.5)$$

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (1.6)$$

Es decir el fenómeno de reflexión total interna ocurre cuando la luz propagándose por un medio llega a la superficie de otro con un índice de refracción menor y el ángulo de incidencia supera un cierto valor crítico dado por la expresión (1.6).

1.5 Análisis mediante la óptica geométrica

Veamos que es lo que ocurre en la fibra óptica, esquemáticamente la situación se observa en la Figura 1.4 En ella se puede ver como al imponer la ley de Snell en la entrada de la fibra se obtiene

$$n_0 \sin \theta_1 = n_1 \sin \theta_2 \quad (1.7)$$

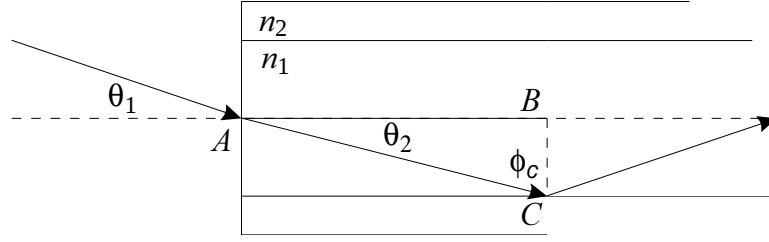


FIGURA 1.4. Representación esquemática del análisis de la propagación en una fibra utilizando la óptica geométrica.

En fibra para que se produzca el guiado de la luz hay que buscar la situación de reflexión total interna en consecuencia

$$\theta_2 \leq \frac{\pi}{2} - \phi_c \quad (1.8)$$

Si nos planteamos la situación límite es decir que $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \phi_c$ en ese caso el ángulo θ_1 es el ángulo máximo de entrada que garantiza el guiado de la luz y lo denominamos **ángulo máximo de aceptación** (θ_a), en consecuencia podemos escribir

$$n_0 \sin \theta_a = n_1 \sin \theta_2 = n_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi_c \right) = n_1 \cos \phi_c = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \phi_c} \quad (1.9)$$

teniendo en cuenta el valor del ángulo crítico dado por la expresión (1.6), podemos escribir

$$n_0 \sin \theta_a = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.10)$$

A esta última expresión hayada se le conoce con el nombre de **apertura numérica** (AN), es decir

$$AN = n_0 \sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.11)$$

Cuando el medio de incidencia es el aire la apertura numérica coincide con el seno del ángulo máximo de aceptación.

Si tenemos en cuenta la definición de diferencia relativa de índices de refracción (Δ) dada por

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \quad (1.12)$$

la apertura numérica se puede escribir como

$$AN = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{2n_1^2\Delta} = n_1\sqrt{2\Delta} \quad (1.13)$$

Muchas veces es frecuente encontrar como definición de diferencia relativa de índice

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (1.14)$$

En este caso está última expresión encontrada para la apertura numérica es válida cuando lo es la definición de diferencia relativa de índices que ocurre cuando $n_1 \approx n_2$.

Existe otra expresión para la apertura numérica que viene de las siguientes definiciones

$$\Delta n = n_1 - n_2 \quad (1.15)$$

y

$$n = \frac{1}{2} (n_1 + n_2) \quad (1.16)$$

en este caso la apertura numérica se puede escribir como

$$AN = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{(n_1 + n_2)(n_1 - n_2)} = \sqrt{2n\Delta n} \quad (1.17)$$

Uno puede pensar que cuanto mayor sea Δ mayor será la apertura numérica y en consecuencia mayor la potencia acoplada a la fibra. Sin embargo ésto plantea otro tipo de problemas como veremos a continuación, es lo que se conoce como dispersión intermodal o dispersión "multipath". Este concepto se puede comprender rápidamente analizando la Figura 1.5 El tiempo que tarda un rayo de luz en recorrer una distancia l atendiendo a su ángulo es:

$$t = \frac{l / \cos \theta_m}{c / n_1} = \frac{l n_1}{c \cos \theta_m} \quad (1.18)$$

Los haces que se transmiten son aquéllos que están por encima del ángulo crítico (ϕ_c) y en consecuencia t será mayor cuanto más pequeño sea el $\cos \theta_m$ y como límite,

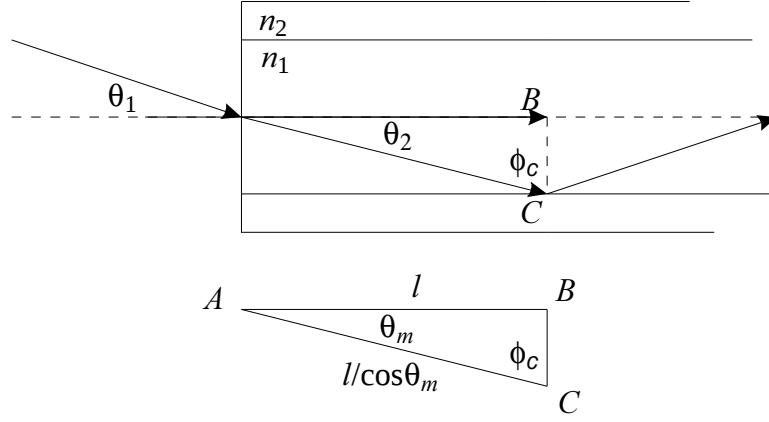


FIGURA 1.5. Representación esquemática del problema de la dispersión utilizando la óptica geométrica.

por el fenómeno de reflexión total interna, hay que tomar que $\theta_m = \pi/2 - \phi_c$ en consecuencia podemos escribir

$$t_2 = \frac{l n_1}{c \cos \theta_m} = \frac{l n_1}{c \sin \phi_c} = \frac{l n_1}{c n_2 / n_1} = \frac{l n_1^2}{c n_2} \quad (1.19)$$

Por otro lado el caso en el que el tiempo de propagación se hace mínimo es cuando se maximiza $\cos \theta_m$, esto es, cuando $\theta_m = 0$, por lo tanto obteniendo

$$t = \frac{l}{c/n_1} = \frac{l n_1}{c} \quad (1.20)$$

Luego el retardo que se produce en esta situación límite es

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \frac{l n_1^2}{c n_2} - \frac{l n_1}{c} = \frac{l n_1}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) = \frac{l n_1}{c} \frac{n_1 - n_2}{n_2} \quad (1.21)$$

Más importante que el valor absoluto de este retardo temporal es el retraso por unidad de longitud recorrida, así podemos escribir

$$\frac{\Delta T}{l} = \frac{n_1}{c} \frac{n_1 - n_2}{n_2} = \frac{n_1}{c} \frac{(n_1 - n_2)(n_1 + n_2)}{n_2(n_1 + n_2)} = \frac{n_1}{c} \frac{AN^2}{n_2(n_1 + n_2)} \quad (1.22)$$

Se puede relacionar la capacidad de un sistema de soportar información con ΔT . La capacidad se puede evaluar con los bits transmitidos por unidad de tiempo (B). Aunque una relación precisa entre B y ΔT depende de muchos detalles es muy

intuitivo que ΔT deberá ser menor que el tiempo de bit definido como $T_B = 1/B$, así pues una estimación del orden de magnitud entre B y ΔT será

$$\Delta T < T_B = \frac{1}{B} \implies B\Delta T < 1 \quad (1.23)$$

$$B \frac{n_1 l}{c} \frac{n_1 - n_2}{n_2} < 1 \implies Bl < \frac{c}{n_1} \frac{n_2}{n_1 - n_2} \quad (1.24)$$

Las fibras para comunicaciones ópticas tienen una diferencia de índice de refracción muy pequeña. Un valor típico puede ser 0,001 con lo que la capacidad $Bl < \frac{l}{\Delta T} = 297$ (Mb/s) km con lo que se pueden plantear en principio velocidades de 30 Mb/s y separación entre repetidores de 10 km. Aunque este cálculo es una expresión muy conservadora.

Una forma de reducir considerablemente la dispersión intermodal es usando fibras de índice gradual. El índice de refracción de una fibra de índice gradual parte del valor máximo en el centro del núcleo (n_1) y va disminuyendo, de forma gradual, hasta el valor (n_2) del revestimiento que se mantiene constante. La forma de la disminución se denomina perfil (α) y matemáticamente se puede expresar como:

$$n(r) = \begin{cases} n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right] & r \leq a \\ n_1^2 [1 - 2\Delta] & r \geq a \end{cases} \quad (1.25)$$

donde a es el radio del núcleo de la fibra. Otra expresión que se puede encontrar en textos de comunicaciones ópticas es la siguiente

$$n(r) = \begin{cases} n_1 \left[1 - \Delta \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right] & r \leq a \\ n_1 [1 - \Delta] & r \geq a \end{cases} \quad (1.26)$$

que proviene de la definición de Δ dada por (1.14).

Aquí se produce el mismo fenómeno de que la distancia recorrida es distinta en función del ángulo de cada rayo pero ocurre un fenómeno adicional y es que el índice de refracción cambia y en consecuencia la velocidad. Es decir, el rayo que recorre la distancia más corta (el que sigue el eje de la fibra) viaja a una velocidad inferior que

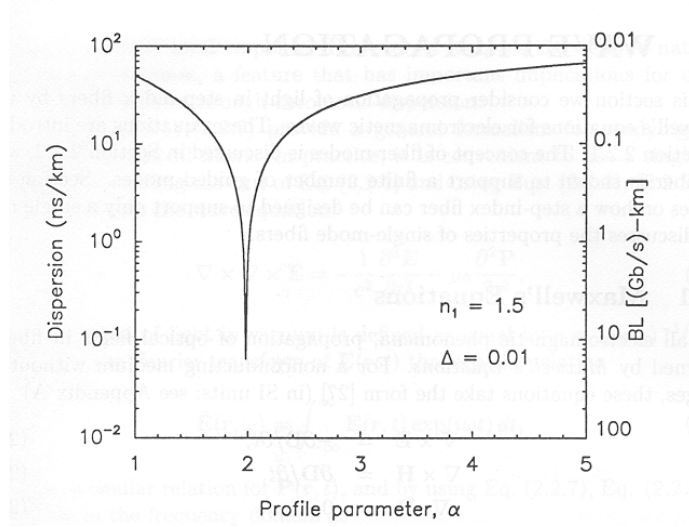


FIGURA 1.6. Dispersión intermodal en función del perfil de índice elegido para la fibra óptica

los que recorren una distancia mayor. Entonces es posible paliar de alguna manera el fenómeno de la dispersión eligiendo el perfil de forma adecuada. Se puede calcular cual es la dispersión y se obtiene una dependencia de la siguiente forma

El mínimo de la dispersión se sitúa para un valor g dado por

$$g = 2(1 - \Delta) \quad (1.27)$$

La capacidad viene dada por

$$Bl < \frac{8c}{n_1 \Delta^2} \quad (1.28)$$

1.6 Material necesario para la práctica

Para el desarrollo de esta práctica es necesario el siguiente material:

- F-MLD-50: Fibra 100/140MM
- XSN-22: Tablero 2x2 que se puede ver en la Figura 1.7.



FIGURA 1.7. Fotografía de un tablero óptico donde se situarán los elementos para realizar la práctica y en la fotografía se puede observar los agujeros para poder fijar los diversos elementos con ayuda de tornillos.



FIGURA 1.8. Fotografía del láser 1100P de Uniphase. Este elemento junto con la fuente de alimentación 1201-X forman el sistema U-1301P de Uniphase.

- U-1301P: Sistema de láser HeNe formado por el láser propiamente dicho y la fuente de alimentación. En la Figura 1.8 se puede ver el láser donde se puede observar el empaquetado cilíndrico del láser.
- ULM: Montura para el láser, en la Figura 1.9 se puede ver una fotografía de dos monturas de Newport. Como se puede observar en la Figura, en esta montura se puede alojar un láser con un empaquetado cilíndrico y con la ayuda del tornillo que se observa en la montura ULM fijar el láser a la montura.



FIGURA 1.9. Fotografía de las monturas, para láser, de Newport, concretamente el modelo ULM-TILT y el ULM que es el que utilizaremos en el laboratorio.



FIGURA 1.10. Fotografía de las abrazaderas modelos 340-RC y 370-RC de Newport.

- 340RC: Abrazadera que sirve para fijar a ésta la montura ULM del láser. Esta abrazadera se fijará a una barra concretamente el modelo 41 que se describirá a continuación. En la Figura 1.10 se observa una fotografía de las abrazaderas.
- 41: Barra (ver Figura 1.11) que introducida en la abrazadera 340RC y fijada al tablero nos servirá para fijar el láser.
- 1815-C: Medidor de potencia cuya fotografía se puede ver en la Figura 1.12
- 818-SL: Detector semiconductor de baja potencia cuya fotografía se puede ver en la Figura 1.13.



FIGURA 1.11. Fotografía de diversas barras de Newport.



FIGURA 1.12. Fotografía del medidor de potencia óptica de Newport modelo 1815-C.



FIGURA 1.13. Fotografía de los detectores basados en diodos semiconductores de baja potencia, concretamente los modelos 818-SL y 818-IR de Newport.



FIGURA 1.14. Fotografía de un sencillo cortador de fibra. Modelo F-CL1 de Newport.



FIGURA 1.15. Fotografía de un cortador de fibra, modelo F-BK2 de Newport.

- F-CL1: Cortador de fibra cuya fotografía se puede ver en la Figura 1.14.
- F-BK2: Cortador de fibra cuya fotografía se puede ver en la Figura 1.15.
- FK-BLX: Conjunto de llaves ALLEN
- SK-25: Kit de tornillos 1/4-20
- SK-08: Kit de tornillos 8-32
- RSP-2: Etapa de rotación cuya fotografía se puede ver en la Figura 1.16
- MPH-1: Soporte para postes cuya fotografía se puede ver en la Figura 1.17
- MSP-1: Poste cuyas fotografía se puede ver en la Figura 1.18.

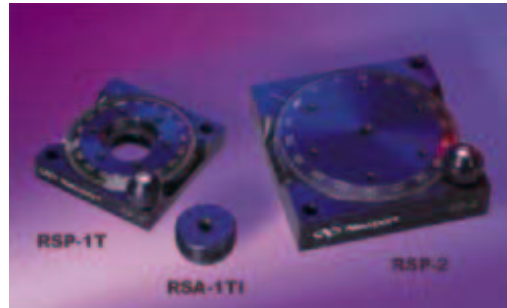


FIGURA 1.16. Fotografías de varias etapas de rotación (muy sencillas) de Newport.



FIGURA 1.17. Fotografías de diversos modelos de soportes incluido el MPH-1.



FIGURA 1.18. Fotografía de diversos postes MSP de Newport.

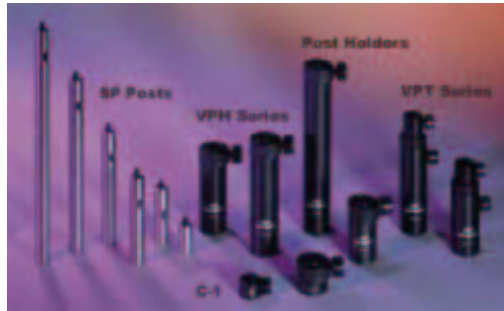


FIGURA 1.19. Fotografía de diversos elementos de sujeción incluidos los soportes para postes de Newport modelo VPH.

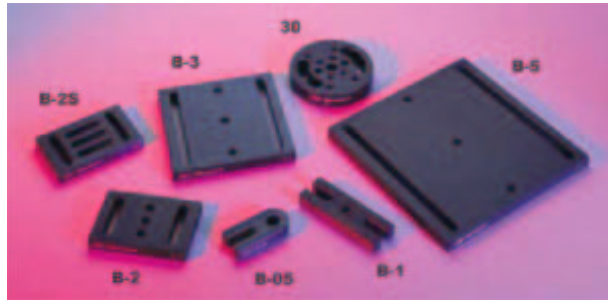


FIGURA 1.20. Fotografías de distintas bases deslizantes incluyendo el modelo B-2 de Newport.

- VPH-2: Soporte de postes cuya fotografía podemos ver en la Figura 1.19.
- VPH-4: Este soporte de poste junto con una base deslizante modelo B-2 y un poste SP-2 servirán para fijar al detector.
- B-2: Base deslizante cuya fotografía se puede ver en la Figura 1.20.
- SP-2: Poste cuya fotografía se puede ver en la Figura 1.21.
- SP-4: Poste cuya fotografía se puede ver en la Figura 1.21.
- FP-1: Posicionador fibra (2 unidades) cuya fotografía se puede ver en la Figura 1.22.



FIGURA 1.21. Fotografía de los postes SP de Newport.



FIGURA 1.22. Fotografía de un posicionador de fibra. En la fotografía se observa perfectamente dos tornillos que sirven para posionar y alinear en las direcciones X e Y la fibra óptica. El alineamiento en Z se consigue introduciendo más o menos el fiador en el posicionador.

1.7 Instrucciones para la realización de la práctica

1.7.1 Introducción

En esta práctica se medirá la apertura de una fibra multimodo de salto de índice cuyo núcleo tiene un diámetro de $100\text{ }\mu\text{m}$. Para ello se hará incidir la radiación de un láser de He-Ne directamente sobre el extremo de la fibra variándose el ángulo de incidencia. El ancho del haz emitido por el láser tiene aproximadamente un 1 mm de diámetro, de manera que se puede considerar localmente, en la región del núcleo de la fibra, como una onda plana. Para determinar el máximo valor de ángulo de aceptación se considerará el punto para el que la luz acoplada se reduce a un 5% del valor máximo. Este es un compromiso habitual para reducir los efectos de la radiación proveniente del entorno.

1.7.2 Montaje de la práctica

A continuación se recogen los pasos para realizar el montaje de la práctica:

1. Fije la barra (41) al tablero por medio de un tornillo y con la ayuda del destornillador.
2. Coja la montura ULM para el láser y observe como en la Figura 1.9 se ven tres orificios en el frente. Pues por los orificios de los extremos y con dos tornillos se va a fijar la montura ULM a la abrazadera 340-RC. Los tornillos se puede ajustar con la ayuda de la llave ALLEN correspondiente.
3. Introduzca la abrazadera 340-RC a la barra 41
4. Coja el láser e introdúzcalo en la montura y fíjelo con el tornillo que se observa perfectamente en la Figura 1.9. Tenga cuidado de no apretar demasiado el tornillo ya que puede dañar el empaquetado del láser.

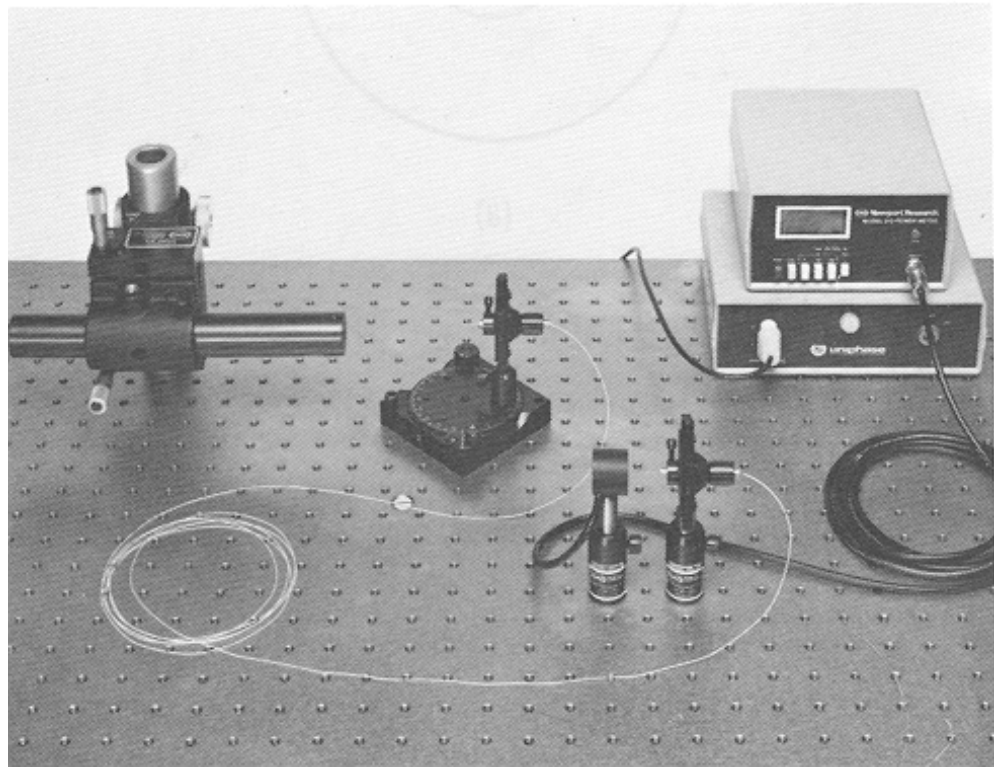


FIGURA 1.23. Fotografía del montaje de la práctica. En la parte de la derecha se observa la fuente de alimentación del láser y encima el medidor de potencia óptica. En la izquierda se observa el montaje para fijar el láser al tablero. En el centro se observa el soporte de la fibra para que incida la radiación del láser y un poco más a la derecha el otro extremo de la fibra en un posicionador FP-1 y enfrente el detector.

5. Fije la etapa de rotación RSP-2 al tablero (observe la posición relativa de la etapa de rotación con respecto al láser en la Figura 1.23). Esta etapa se fija con dos tornillos y con la ayuda de una llave ALLEN.
6. El soporte MPH-1 se fija con un tornillo a la etapa de rotación.
7. El poste MSP-1 se introduce en el soporte MPH-1 y se bloquea con el tornillo que tiene el soporte MPH-1 para tal efecto.
8. Ahora el posicionador de la fibra FP-1 se enrosca en el extremo del poste MSP-1
9. El soporte VPH-2 se fija a la base por medio de un tornillo. Este soporte servirá para fijar el posicionador que incluirá al otro extremo de la fibra.
10. El poste SP-4 se introduce en el soporte VPH-2 y se bloquea con el tornillo que tiene el soporte VPH-2.
11. En el extremo del poste SP-4 se enrosca el otro posicionador de fibra FP-1. Con lo que ya tenemos fijo el otro extremo de la fibra.
12. En frente se situa el detector, para ello utilizamos el conjunto formado por la base B-2 y el soporte VPH-4.
13. En el soporte VPH-4 se fija el poste SP-2.
14. En el final del poste SP-2 se fija el detector.

1.7.3 Consejos para una mejor realización de la práctica

Para la realización del montaje y de la práctica siga estos consejos:

- Lea en primer lugar los detalles de cómo funciona el medidor de potencia que va utilizar en la práctica (apartado 1.9).
- A continuación lea los detalles de cómo funciona el láser (apartado 1.11).

- Una vez preparada la fibra, sitúela en el posicionador que se encuentra sobre la plataforma giratoria próxima a la salida del láser. Esta plataforma estará formando un cierto ángulo con respecto a la matriz de orificios del tablero para que el alineamiento con el láser sea el adecuado.
- Coloque el medidor de potencia óptica de manera que recoja la radiación a la salida de la fibra.
- Es esencial que el extremo de la fibra en el que incide la radiación del láser se encuentre sobre la vertical que pasa por el eje de rotación de la estructura. Para comprobarlo, gire apreciablemente la plataforma en ambas direcciones; el extremo de la fibra deberá permanecer en el mismo punto.
- Cuando todo el sistema esté convenientemente alineado, empiece a variar el ángulo de incidencia con respecto al de máximo acoplamiento, anotando los valores de desplazamiento angular y potencia acoplada.
- Para evitar cualquier pequeño error residual, haga los desplazamientos en ambas direcciones, calculando el doble del máximo ángulo de aceptación.
- Una vez terminadas las medidas retire con cuidado el medidor de potencia óptica. Coloque, a continuación, una pantalla de papel a cierta distancia de la salida de la fibra. Mida el diámetro del círculo de la luz y la distancia entre la fibra y la pantalla. A partir de estos datos estime el valor de la apertura numérica.

1.7.4 Preparación de la fibra

Es fundamental, a la hora de obtener medidas fiables, la preparación de los extremos de la fibra tanto el extremo en el que acoplará la luz del láser como el extremo por el que saldrá la luz para su medida en el detector.

Para la preparación de la fibra lo primero que hay que hacer es eliminar la protección de plástico que recubre la fibra, en cada uno de los extremos que se

desea preparar, en una longitud aproximada de 6 a 10 cm. Se puede emplear una cuchilla, un disolvente o un pelador de fibra. Si se utilizara un pelador, que no es el caso, hay que recordar que el pelador sólo se podrá utilizar con aquellas fibras con dimensiones compatibles con el pelador.

Una vez eliminada la protección plástica de la fibra hay que realizar un corte limpio en el extremo de la fibra. Para este paso se utilizará el cortador de fibra. Para más detalles consulte la sección de cortado de la fibra (apartado 1.8).

Una de las ventajas de emplear radiación visible es que la inspección de la calidad de los cortes se puede hacer visualizando la radiación de salida de la luz acoplada. Si el corte es limpio, la proyección de la luz sobre una superficie plana perpendicular a la dirección de propagación será un círculo perfecto de luz.

1.7.5 Medida de la apertura numérica

Nota. Antes de realizar ninguna medida, recuerde que debe calibrar adecuadamente el medidor de potencia con respecto al detector que tenga. En la entrega que realice deberá indicar el número de serie del detector, la responsividad que tiene, la posición que ha elegido del DIP Switch, el exponente elegido y la calibración.

1.7.5.1 Método 1

En esta primera medida se pretende determinar la cantidad de potencia óptica acoplada al variar el ángulo de incidencia para determinar el máximo ángulo de aceptación.

Para ello:

- Situe la fibra en el posicionador FP-1. Para ello saque del posicionador un fiador o eje de color bronce. Observe que el posicionador FP-1 dispone de un tornillo para bloquear el fiador. Este fiador tiene una pequeña hendidura con una fina lámina. Extraiga la lámina e introduzca la fibra y para fijar la fibra vuelva a colocar la fina lámina y ya puede introducir el conjunto en el posicionador.

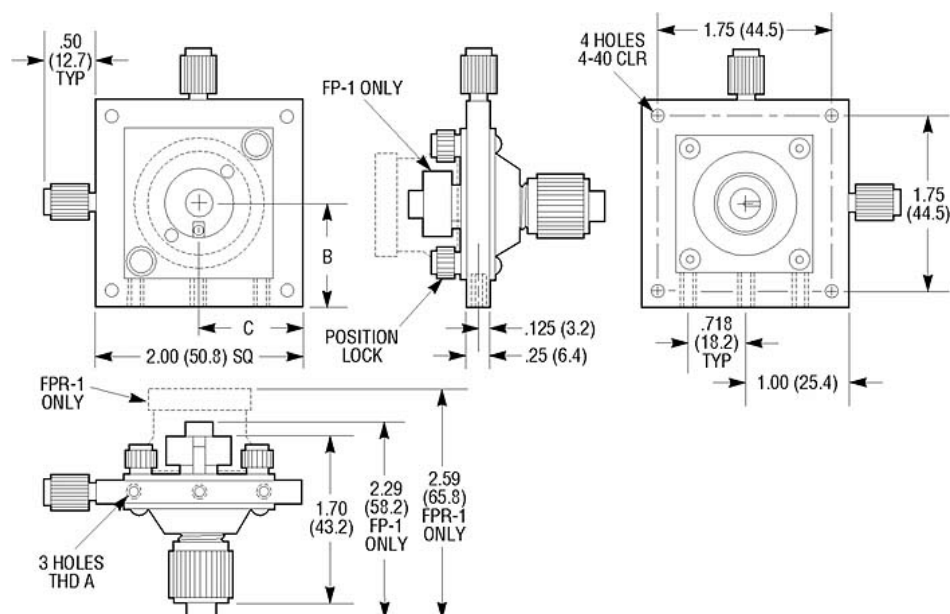


FIGURA 1.24. Representación esquemática del posicionador de fibra FP-1.

- Sitúe un extremo de la fibra sobre la plataforma giratoria de manera que el haz del láser incida en todo momento sobre el eje de giro y, a la vez, el extremo de la fibra se sitúe sobre dicho eje. Esta situación se puede comprobar mediante inspección visual de la incidencia del láser sobre la fibra: al girar ésta, en todo momento deberá incidir la radiación del láser sobre el extremo de la fibra.
- Una vez posicionado la luz del láser sobre la fibra de forma óptima sitúe el medidor de potencia en el extremo de salida de la fibra.

Para hacerlo observe el esquema de posicionador de fibra FP-1 (ver Figura 1.24). Tiene dos tornillos que permite desplazar la fibra en dos direcciones X e Y, estos tornillos se observan perfectamente en la Figura 1.22. También dispone de dos tornillos para que una vez que esté alineada la fibra bloquear la etapa de desplazamiento e impedir que se mueva. Estos tornillos se pueden ver en la Figura 1.24 que están marcados como POSITION LOCK. Además dispone de otro tornillo para fijar el fiador donde va la fibra y evitar que se desplace.

- Ahora localice el ángulo de incidencia para el que se obtiene un valor máximo de potencia en la salida.
- Haga desplazamientos del ángulo, anotando los valores de potencia obtenidos. Los desplazamientos han de ser tanto hacía la derecha como hacía la izquierda del máximo.
- Represente gráficamente los resultados obtenidos, y calcule los dos ángulos para los que la potencia cae a un 5% del máximo
- A partir de estos dos valores determine el ángulo máximo de aceptación que sería la mitad de la separación angular absoluta entre estos dos puntos.

1.7.5.2 Método 2

Como medida alternativa se determinará de manera aproximada al apertura numérica mediante la observación de la salida de la fibra óptica.

Para ellos situará una pantalla de papel en el extremo de salida a una cierta distancia de la fibra (L). A partir del diámetro del spot (W) y la distancia de separación podrá obtener una estimación grosera del máximo ángulo de aceptación (emisión) y, por tanto, de la apertura numérica.

1.8 Corte de la fibra

La mayoría del material utilizado en este laboratorio es de la firma Newport, por lo que si nos referimos a un elemento utilizado en el laboratorio que no sea de esta firma mencionaremos el fabricante. Si desea obtener más información de los elementos utilizados en el Laboratorio puede consultar con el Profesor o visitar su página Web, cuya dirección es: www.newport.com, también puede consultar la página Web del distribuidor en España www.innovainst.com.

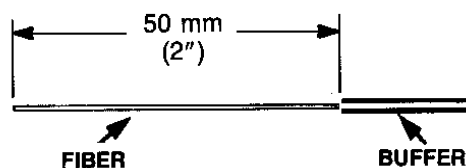


FIGURA 1.25. Representación esquemática de como preparar la fibra para usar el cortador F-BK2.

1.8.1 Uso del cortador F-CL1

Con el cortador se realiza una pequeña incisión sobre la fibra que al ser doblada se produce un corte limpio al propagarse la incisión realizada. Es muy importante la utilización cuidadosa de este cortador ya que se utilizará muchas veces por parte de todos los alumnos a lo largo del curso.

El uso del cortador F-CL1 requiere cierta destreza y resulta algunas veces complicado obtener un corte limpio de la fibra. En ese caso se puede usar el F-BK2.

Ejercicio teórico. En general la fibra tiene un número determinado de formas de ruptura que están sobradamente descritas en la bibliografía. En caso de que obtenga un mal corte intente determinar cuál de las rupturas se ha producido. En cualquier caso busque en la bibliografía y dé una lista de las mismas.

1.8.2 Uso del cortador F-BK2

En primer lugar para realizar un corte con el cortador F-BK2 deber preparar la fibra de acuerdo con la Figura 1.25.

Este cortador dispone de una escala para regular la longitud de fibra cortada. Este indicador se puede ver en la Figura 1.26 y en dicha Figura se observa el DIAL para regular la longitud de corte.

Libere el CLAMP que fija a la fibra mientras se realiza el corte. Una vez liberado el CLAMP introduzca la fibra tal y como está representado en la Figura 1.27 y cuando

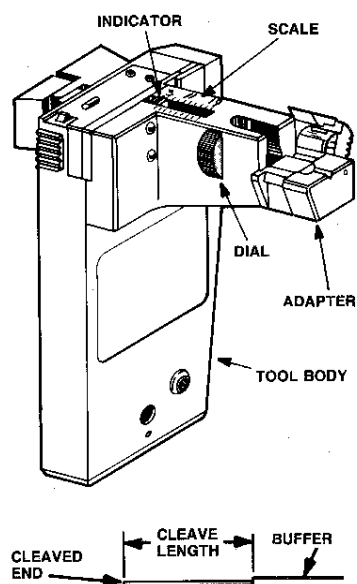


FIGURA 1.26. Representación general del cortador F-BK2.

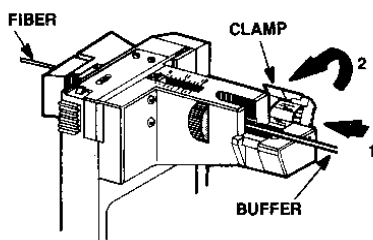


FIGURA 1.27. Representación esquemática de como se introduce la fibra en el cortador F-BK2.

vea salir la fibra por el otro lado del cortador vuelva a fijar el CLAMP inmovilizando la fibra.

Una vez inmovilizada la fibra desplace hacia abajo el SAFETY CATCH y en esa posición apriete el LEVER una sola vez y vuelva a dejar el LEVER en su posición de reposo y el SAFETY CATCH.

Una vez producida la incisión en la fibra de acuerdo con la Figura 1.29 deberá presionar el FIBER BREAKING CLAMP y estirar hacia fuera de la herramienta. Observará que la fibra se ha cortado. Deseche el trozo pequeño de fibra.

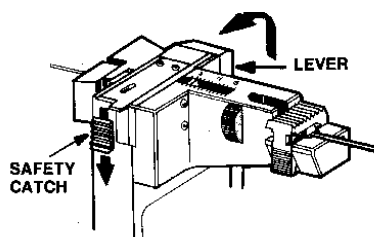


FIGURA 1.28. Representación esquemática del proceso para realizar la incisión en la fibra.

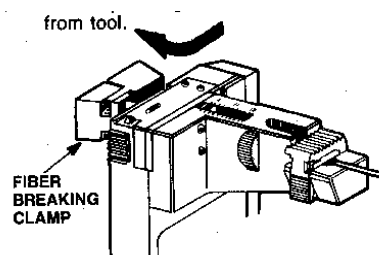


FIGURA 1.29. Representación esquemática del último proceso para realizar el corte. Es decir realizar una tensión en la fibra.

1.9 Manual de instrucciones del medidor de potencia óptica

El medidor de potencia óptica del que se dispone en el laboratorio para la realización de las prácticas es el modelo 1815-C. Como característica más importante a destacar es que es un medidor que permite medir potencias en un amplio rango sin más que elegir el detector adecuado. Para este laboratorio el detector utilizado es el modelo 818-SL que es un detector de silicio capaz de medir de 0,4 a 1,1 μm con un atenuador que se puede quitar.

El panel frontal del medidor 1815-C se puede ver en la Figura 1.30 y dispone de los siguientes controles:

- **POWER:** Sirve para encender y apagar el medidor simplemente presionando el botón. Si observa que el display indica BAT, entonces es necesario cambiar las baterías.
- **CAL:** Presionando este pulsador el display del medidor nos indicará el valor de la mantisa del parámetro factor de calibración. Este parámetro, el factor de

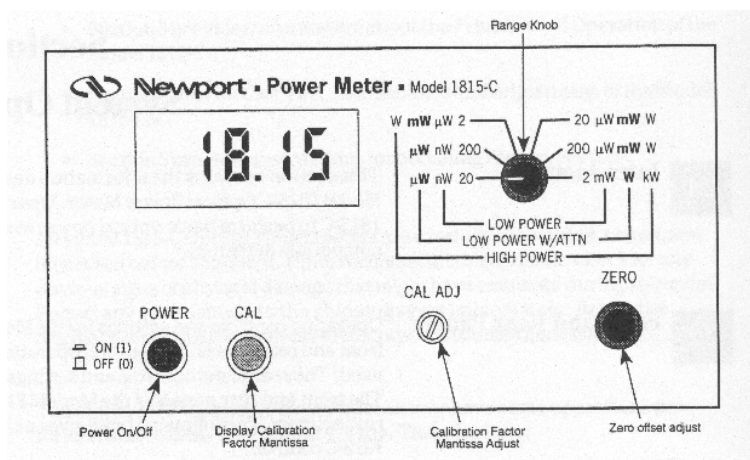


FIGURA 1.30. Representación esquemática del panel frontal del medidor 1815-C.

calibración, se puede ajustar dentro de un rango usando el control CAL ADJ del panel frontal y del DIP Switch del panel posterior.

- CAL ADJ: Con este ajuste podemos variar la mantisa del factor de calibración. Para más detalles consulte en el apartado 1.9.2. (Ajuste del factor de calibración del detector).
 - ZERO: Con este potenciómetro se puede ajustar la lectura del medidor bien la presentación visual o la salida analógica que dispone el medidor. Con este ajuste se puede eliminar el efecto de la iluminación ambiente al realizar la medida.
 - Conmutador: Este conmutador permite seleccionar el rango de la medida. El conmutador tiene seis posiciones tal y como se observa en la Figura 1.31 y dependiendo del tipo de detector los rangos de medida se pueden ver en la Tabla 1.1.
- Además en el panel posterior, que se puede ver en la Figura 1.32 dispone de los siguientes controles:
- INPUT: En este conector BNC es donde se conecta el BNC del detector para realizar la medida

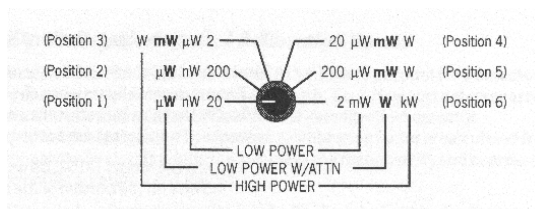


FIGURA 1.31. Representación esquemática del conmutador para seleccionar el rango de medida.

	Posición del conmutador					
	1	2	3	4	5	6
Baja potencia	20 nW	200 nW	2 μ W	20 μ W	200 μ W	2 mW
Baja potencia con atenuador	20 μ W	200 μ W	2 mW	20 mW	200 mW	2 W
Alta potencia			2 W	20 W	200 W	2 kW

TABLA 1.1. Posibles rangos de medida del 1815C en función del tipo de detector

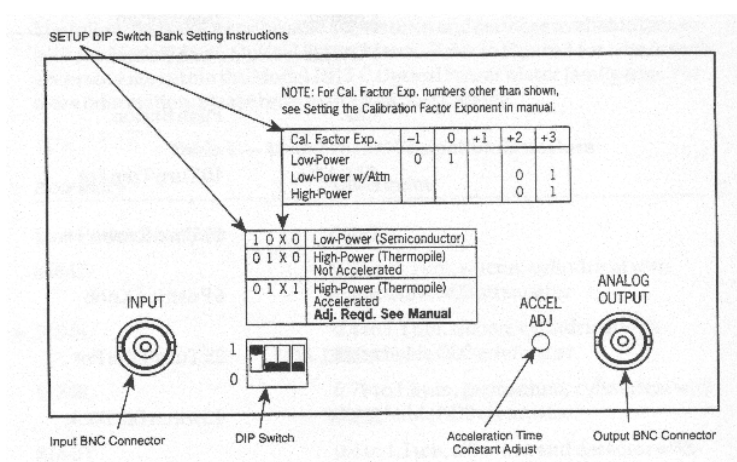


FIGURA 1.32. Representación esquemática del panel posterior del medidor 1815-C.

Tipo de detector	Unidades Responsividad	DIP Switch			
		1	2	3	4
Baja potencia	A/W	1	0	X	0
Alta potencia (no acelerado)	V/W	0	1	X	0
Alta potencia (acelerado)	V/W	0	1	X	1

TABLA 1.2. Posición de los interruptores del DIP Switch para seleccionar los distintos tipos de detectores

- ACCEL ADJ: Con este control se ajusta la constante de tiempo de aceleración del detector. En nuestro caso no juega ningún papel.
- ANALOG OUTPUT: Esta salida del tipo BNC nos proporciona una señal analógica que nos da el valor de la medida. Si el display indica 1,560 la salida nos proporcionará un valor de 1,560 V.
- DIP Switch: Este conjunto de interruptores permite configurar al medidor para utilizar distintos tipos de medidores (para más detalles ver Tabla 1.2) y para ajustar el exponente del factor de calibración (para más detalles ver Tabla 1.3). En nuestro caso el detector es un semiconductor de baja potencia luego la posición de los interruptores 1 y 2 debe ser 1 y 0 respectivamente.

En relación con el ajuste del exponente del factor de calibración consulten el apartado correspondiente.

En la Tabla 1.3 se observa que la misma posición del 3 DIP Switch sirve para dos exponentes distintos del factor de calibración. Entonces hay que tomar las siguientes medidas:

- Detector de baja potencia, exponente -2: Divida la mantisa por 10 y vuelva a ajustar con el pontenciometro su valor. Ejemplo 9,00E-2 es también 0,90E-1. Ahora la mantisa es 0,90 y el exponente -1.

Exponente del factor de calibración	-2	-1	0	1	2	3	4
Baja potencia	0	0	1	1			
Alta potencia (no acelerado)				0	0	1	1
Alta potencia (acelerado)				0	0	1	1

TABLA 1.3. Posición del conumtador 3 para la selección del exponente del Factor de Calibración

- Detector de baja potencia, exponente 1: Multiplique la mantisa por 10 y vuelva a ajustar con el pontenciometro su valor. Ejemplo 1,5E+1 es también 15,00E0. Ahora la mantisa es 15,00 y el exponente 0.
- Detector de alta potencia no acelerado, exponente 1: Divida la mantisa por 10 y vuelva a ajustar con el pontenciometro su valor. Ejemplo 9,00E+1 es también 0,90E+2. Ahora la mantisa es 0,90 y el exponente +2.
- Detector de alta potencia no acelerado, exponente 4: Multiplique la mantisa por 10 y vuelva a ajustar con el pontenciometro su valor. Ejemplo 1,5E+4 es también 15,00E+3. Ahora la mantisa es 15,00 y el exponente +3.
- Detector de alta potencia acelerado, exponente 1: Divida la mantisa por 10 y vuelva a ajustar con el pontenciometro su valor. Ejemplo 9,00E+1 es también 0,90E+2. Ahora la mantisa es 0,90 y el exponente +2.
- Detector de alta potencia acelerado, exponente 4: Multiplique la mantisa por 10 y vuelva a ajustar con el pontenciometro su valor. Ejemplo 1,5E+4 es también 15,00E+3. Ahora la mantisa es 15,00 y el exponente +3.

1.9.1 Procedimiento de medida

El procedimiento para realizar una medida es el siguiente:

1. Encienda el medidor

2. Ajuste del factor de calibración del detector (ver apartado 1.9.2)
3. Ajuste del cero (ver apartado 1.9.3)
4. Ajuste la escala: Seleccione la escala para que la medida resulte más adecuada.
5. Realice la medida: tenga en cuenta la escala que está seleccionada.

1.9.2 Ajuste del factor de calibración del detector

El factor de calibración informa al medidor 1815-C el tipo de detector que tiene de tal forma que conoce la responsividad del detector a la longitud de onda de trabajo. Cada detector disponible en el laboratorio tiene su hoja de calibración. Es decir que tiene que conocer el número de serie del detector (que se encuentra en la parte posterior) y acudir a la correspondiente hoja de calibración (ver el apartado 1.10 de esta práctica donde se recogen una serie de Tablas con las responsividades de los distintos detectores disponibles en el laboratorio) para conocer la responsividad del diodo a la longitud de onda de trabajo. El factor de calibración se calcula directamente de la responsividad del detector, concretamente es el inverso de la responsividad. Una vez calculado el factor de calibración lo expresamos de esta forma $d_{ddE} \pm d$.

El exponente se ajusta por medio del DIP Switch que se encuentra en la parte posterior de acuerdo con la información proporcionada en la Tabla 1.3.

La mantisa del factor de calibración se ajusta por medio del potenciómetro marcado como CAL ADJ. Previamente hay que pulsar el botón CAL, que también se encuentra en el panel frontal del medidor. Una vez presionado CAL el display nos informa del valor de la mantisa del factor de calibración, si éste no es correcto, por medio del CAL ADJ se ajusta el valor correcto de la mantisa. Una vez ajustado se vuelve a presionar el botón CAL para que el display nos indique la información sobre la potencia óptica medida.

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,1891E-1	3,2742E-1	3,8976E-1	4,4271E-1	4,9637E-1	5,3801E-1	5,3845E-1
10	2,3553E-1	3,3479E-1	3,9696E-1	4,4770E-1	5,0148E-1	5,4152E-1	5,1922E-1
20	2,5107E-1	3,4149E-1	4,0095E-1	4,5304E-1	5,0681E-1	5,4685E-1	4,8949E-1
30	2,6340E-1	3,4817E-1	4,0594E-1	4,5826E-1	5,1144E-1	5,4938E-1	4,4988E-1
40	2,7302E-1	3,5464E-1	4,1182E-1	4,6364E-1	5,1546E-1	5,5629E-1	3,9757E-1
50	2,8358E-1	3,6072E-1	4,1790E-1	4,6897E-1	5,1884E-1	5,5642E-1	3,3712E-1
60	2,9355E-1	3,6689E-1	4,2277E-1	4,7430E-1	5,2189E-1	5,5857E-1	2,7287E-1
70	3,0268E-1	3,7284E-1	4,2752E-1	4,7982E-1	5,2492E-1	5,5814E-1	2,1950E-1
80	3,1136E-1	3,7840E-1	4,3251E-1	4,8540E-1	5,3059E-1	5,5670E-1	1,7983E-1
90	3,1972E-1	3,8401E-1	4,3757E-1	4,9084E-1	5,3303E-1	5,5042E-1	1,4679E-1

TABLA 1.4. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8437) 818-SL en función de la longitud de onda (micras)

1.9.3 Ajuste del cero

Para el ajuste del cero debe situar el rango de medida en la menor escala posible con la finalidad de realizar una medida con tres cifras significativas. Ajuste con el potenciómetro ZERO hasta obtener una lectura nula.

1.10 Hojas de calibración de los diodos

En las Tablas 1.4 y 1.5 se recogen las responsividades del detector modelo 818-SL (número de serie del detector 8437) con o sin atenuador (número de serie del atenuador 8437).

En las Tablas 1.6 y 1.7 se recogen las responsividades del detector modelo 818-SL (número de serie del detector 8438) con o sin atenuador (número de serie del atenuador 8438).

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,5152E-4	4,1692E-4	4,7649E-4	7,4360E-4	8,6810E-4	7,2491E-4	5,5570E-4
10	2,8798E-4	4,2117E-4	4,8584E-4	7,9786E-4	8,5864E-4	7,0970E-4	5,2574E-4
20	3,0984E-4	4,3419E-4	4,9432E-4	8,3518E-4	8,4873E-4	6,9464E-4	4,8757E-4
30	3,4220E-4	4,5661E-4	5,0029E-4	8,8558E-4	8,3623E-4	6,7748E-4	4,4193E-4
40	3,4668E-4	4,8498E-4	5,0117E-4	8,7335E-4	8,2114E-4	6,6663E-4	3,8654E-4
50	3,7288E-4	5,0789E-4	5,0445E-4	8,8106E-4	8,0414E-4	6,4810E-4	3,2566E-4
60	4,1884E-4	5,2019E-4	5,1778E-4	8,8413E-4	7,8650E-4	6,3304E-4	2,6305E-4
70	4,3383E-4	5,1631E-4	5,4820E-4	8,8446E-4	7,6939E-4	6,1603E-4	2,1198E-4
80	4,2722E-4	4,9828E-4	6,0242E-4	8,8188E-4	7,5616E-4	5,9976E-4	1,7378E-4
90	4,1908E-4	4,8032E-4	6,7414E-4	8,7600E-4	7,3745E-4	5,7980E-4	1,4198E-4

TABLA 1.5. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8437) 818-SL con el atenuador (número de serie 8437) en función de la longitud de onda (micras)

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,2053E-1	3,2714E-1	3,8880E-1	4,4127E-1	4,9422E-1	5,3528E-1	5,2912E-1
10	2,3687E-1	3,3433E-1	3,9541E-1	4,4617E-1	4,9937E-1	5,3876E-1	5,0918E-1
20	2,5225E-1	3,4102E-1	3,9974E-1	4,5146E-1	5,0459E-1	5,4310E-1	4,7927E-1
30	2,6430E-1	3,4758E-1	4,0477E-1	4,5665E-1	5,0908E-1	5,4557E-1	4,3995E-1
40	2,7431E-1	3,5393E-1	4,1066E-1	4,6196E-1	5,1296E-1	5,5119E-1	3,8844E-1
50	2,8405E-1	3,5996E-1	4,1675E-1	4,6724E-1	5,1620E-1	5,5103E-1	3,2898E-1
60	2,9382E-1	3,6606E-1	4,2145E-1	4,7248E-1	5,1906E-1	5,5212E-1	2,6603E-1
70	3,0270E-1	3,7194E-1	4,2614E-1	4,7787E-1	5,2190E-1	5,5119E-1	2,1390E-1
80	3,1124E-1	3,7747E-1	4,3114E-1	4,8347E-1	5,2779E-1	5,4884E-1	1,8526E-1
90	3,1952E-1	3,8305E-1	4,3622E-1	4,8889E-1	5,2993E-1	5,4156E-1	1,4285E-1

TABLA 1.6. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8438) 818-SL en función de la longitud de onda (micras)

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,6508E-4	4,3174E-4	4,8628E-4	7,9819E-4	9,1057E-4	8,1739E-4	6,6230E-4
10	3,0490E-4	4,3796E-4	4,9219E-4	8,5497E-4	9,0399E-4	8,0697E-4	6,2761E-4
20	3,2337E-4	4,5668E-4	4,9865E-4	8,8917E-4	8,9762E-4	7,9644E-4	5,8264E-4
30	3,5902E-4	4,8871E-4	4,9954E-4	9,0904E-4	8,8960E-4	7,8351E-4	5,2878E-4
40	3,6320E-4	5,2856E-4	4,9258E-4	9,1986E-4	8,7976E-4	7,7538E-4	4,6270E-4
50	3,9121E-4	5,5625E-4	4,8997E-4	9,2447E-4	8,6836E-4	7,5837E-4	3,9000E-4
60	4,4206E-4	5,6335E-4	5,0357E-4	9,2516E-4	8,5649E-4	7,4426E-4	3,1550E-4
70	4,5740E-4	5,4888E-4	5,4159E-4	9,2416E-4	8,4502E-4	7,2764E-4	2,5417E-4
80	4,4634E-4	5,1967E-4	6,1360E-4	9,2132E-4	8,3770E-4	7,1115E-4	2,0837E-4
90	4,3443E-4	4,9280E-4	7,1122E-4	9,1635E-4	8,2409E-4	6,8942E-4	1,7036E-4

TABLA 1.7. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8438) 818-SL con el atenuador (número de serie 8438) en función de la longitud de onda (micras)

En las Tablas 1.8 y 1.9 se recogen las responsividades del detector modelo 818-SL (número de serie del detector 8475) con o sin atenuador (número de serie del atenuador 8475).

En las Tablas 1.10 y 1.11 se recogen las responsividades del detector modelo 818-SL (número de serie del detector 8476) con o sin atenuador (número de serie del atenuador 8476).

En las Tablas 1.12 y 1.13 se recogen las responsividades del detector modelo 818-SL (número de serie del detector 8477) con o sin atenuador (número de serie del atenuador 8477).

En las Tablas 1.14 y 1.15 se recogen las responsividades del detector modelo 818-SL (número de serie del detector 8505) con o sin atenuador (número de serie del atenuador 8505).

En las Tablas 1.16 y 1.17 se recogen las responsividades del detector modelo 818-SL (número de serie del detector 8506) con o sin atenuador (número de serie del atenuador 8506).

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,0450E-1	3,1382E-1	3,7594E-1	5,2798E-1	4,7811E-1	5,2294E-1	5,2893E-1
10	2,2124E-1	3,2142E-1	3,8267E-1	4,3274E-1	4,8294E-1	5,2779E-1	5,1238E-1
20	2,3718E-1	3,2799E-1	3,8704E-1	4,3781E-1	4,8799E-1	5,3212E-1	4,8664E-1
30	2,4970E-1	3,3459E-1	3,9225E-1	4,4270E-1	4,9258E-1	5,3528E-1	4,5189E-1
40	2,5968E-1	3,4096E-1	3,9736E-1	4,4795E-1	4,9707E-1	5,4039E-1	4,0463E-1
50	2,7044E-1	3,4713E-1	4,0279E-1	4,5302E-1	5,0111E-1	5,4139E-1	3,4839E-1
60	2,8031E-1	3,5317E-1	4,0796E-1	4,5796E-1	5,0493E-1	5,4469E-1	2,8672E-1
70	2,8936E-1	3,5906E-1	4,1257E-1	4,6289E-1	5,0871E-1	5,4492E-1	2,3383E-1
80	2,9811E-1	3,6467E-1	4,1781E-1	4,6814E-1	5,1521E-1	5,4404E-1	1,9368E-1
90	3,0622E-1	3,7031E-1	4,2284E-1	4,7317E-1	5,1877E-1	5,3867E-1	1,5920E-1

TABLA 1.8. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8475) 818-SL en función de la longitud de onda (micras)

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,3343E-4	4,0066E-4	4,6120E-4	7,2070E-4	8,4160E-4	7,1144E-4	5,5532E-4
10	2,6963E-4	4,0519E-4	4,6981E-4	7,7365E-4	8,3254E-4	6,9842E-4	5,2857E-4
20	2,9148E-4	4,1800E-4	4,7861E-4	8,1022E-4	8,2291E-4	6,8493E-4	4,9454E-4
30	3,2325E-4	4,3985E-4	4,8473E-4	8,3318E-4	8,1145E-4	6,6895E-4	4,5420E-4
40	3,2925E-4	4,6765E-4	4,8508E-4	8,4758E-4	7,9804E-4	6,5546E-4	4,0382E-4
50	3,5511E-4	4,9030E-4	4,8766E-4	8,5522E-4	7,8302E-4	6,3906E-4	3,4775E-4
60	3,9952E-4	5,0256E-4	5,0105E-4	8,5795E-4	7,6757E-4	6,2577E-4	2,8733E-4
70	4,1527E-4	4,9923E-4	5,3059E-4	8,5765E-4	7,5226E-4	6,1027E-4	2,3616E-4
80	4,0982E-4	4,8233E-4	5,8310E-4	8,5516E-4	7,4130E-4	5,9520E-4	1,9667E-4
90	4,0229E-4	4,6508E-4	6,5280E-4	8,4946E-4	7,2522E-4	5,7685E-4	1,6285E-4

TABLA 1.9. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8475) 818-SL con el atenuador (número de serie 8475) en función de la longitud de onda (micras)

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,1026E-1	3,1574E-1	3,7596E-1	4,2771E-1	4,7839E-1	5,2462E-1	5,2793E-1
10	2,2653E-1	3,2276E-1	3,8255E-1	4,3254E-1	4,8328E-1	5,2960E-1	5,1131E-1
20	2,4193E-1	3,2929E-1	3,8705E-1	4,3765E-1	4,8832E-1	5,3336E-1	4,8561E-1
30	2,5385E-1	3,3571E-1	3,9208E-1	4,4265E-1	4,9302E-1	5,2681E-1	4,5106E-1
40	2,6324E-1	3,4196E-1	3,9764E-1	4,4775E-1	4,9747E-1	5,4229E-1	4,0452E-1
50	2,7367E-1	3,4788E-1	4,0306E-1	4,5276E-1	5,0150E-1	5,4245E-1	3,4862E-1
60	2,8308E-1	3,5383E-1	4,0813E-1	4,5776E-1	5,0526E-1	5,4465E-1	2,8772E-1
70	2,9183E-1	3,5961E-1	4,1288E-1	4,6294E-1	5,0904E-1	5,4427E-1	2,3515E-1
80	3,0025E-1	3,6502E-1	4,1776E-1	4,6806E-1	5,1671E-1	5,4334E-1	1,9532E-1
90	3,0823E-1	3,7050E-1	4,2276E-1	4,7306E-1	5,2088E-1	5,3771E-1	1,6119E-1

TABLA 1.10. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8476) 818-SL en función de la longitud de onda (micras)

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,4993E-4	4,1532E-4	4,6945E-4	7,7249E-4	8,7955E-4	8,0100E-4	6,6416E-4
10	2,8680E-4	4,2138E-4	4,7589E-4	8,2742E-4	8,7314E-4	7,9262E-4	6,3422E-4
20	3,0736E-4	4,3969E-4	4,8217E-4	8,6046E-4	8,6720E-4	7,8260E-4	5,9531E-4
30	3,4220E-4	4,7063E-4	4,8318E-4	8,7965E-4	8,6009E-4	7,7114E-4	5,4815E-4
40	3,4692E-4	5,0920E-4	4,7640E-4	8,8998E-4	8,5170E-4	7,6199E-4	4,8922E-4
50	3,7463E-4	5,3605E-4	4,7364E-4	8,9446E-4	8,4225E-4	7,4726E-4	4,2231E-4
60	4,2374E-4	5,4313E-4	4,8700E-4	8,9480E-4	8,3239E-4	7,3461E-4	3,5039E-4
70	4,3864E-4	5,2936E-4	5,2386E-4	8,9350E-4	8,2282E-4	7,2022E-4	2,8915E-4
80	4,2846E-4	5,0145E-4	5,9361E-4	8,9038E-4	8,1949E-4	7,0591E-4	2,4177E-4
90	4,1745E-4	4,7574E-4	6,8826E-4	8,8525E-4	8,0867E-4	6,8703E-4	2,0085E-4

TABLA 1.11. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8476) 818-SL con el atenuador (número de serie 8476) en función de la longitud de onda (micras)

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,1375E-1	3,1921E-1	3,7940E-1	4,3082E-1	4,8075E-1	5,2635E-1	5,2427E-1
10	2,2977E-1	3,2616E-1	3,8607E-1	4,3560E-1	4,8550E-1	5,3054E-1	5,06691E-1
20	2,4529E-1	3,3272E-1	3,9048E-1	4,4061E-1	4,9052E-1	5,3443E-1	4,8014E-1
30	2,5718E-1	3,3910E-1	3,9546E-1	4,4559E-1	4,9507E-1	5,3718E-1	4,4476E-1
40	2,6662E-1	3,4541E-1	4,0102E-1	4,5062E-1	4,9943E-1	5,4223E-1	3,9731E-1
50	2,7688E-1	3,5132E-1	4,0660E-1	4,5566E-1	5,0330E-1	5,4240E-1	3,4142E-1
60	2,8650E-1	3,5725E-1	4,1145E-1	4,6054E-1	5,0687E-1	5,4373E-1	2,8055E-1
70	2,9525E-1	3,6300E-1	4,1614E-1	4,6566E-1	5,1045E-1	5,4296E-1	2,2882E-1
80	3,0367E-1	3,6848E-1	4,2094E-1	4,7073E-1	5,1901E-1	5,4127E-1	1,8945E-1
90	3,1164E-1	3,7395E-1	4,2587E-1	4,7558E-1	5,2201E-1	5,3503E-1	1,5599E-1

TABLA 1.12. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8477) 818-SL en función de la longitud de onda (micras)

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,5777E-4	4,1841E-4	4,6853E-4	7,6602E-4	8,7081E-4	7,9267E-4	6,4907E-4
10	2,9617E-4	4,2403E-4	4,7469E-4	8,2005E-4	8,6468E-4	7,8343E-4	6,1833E-4
20	3,1475E-4	4,4169E-4	4,8065E-4	8,5254E-4	8,5880E-4	7,7431E-4	5,7859E-4
30	3,4918E-4	4,7245E-4	4,8136E-4	8,7137E-4	8,5162E-4	7,6191E-4	5,3091E-4
40	3,5332E-4	5,1046E-4	4,7434E-4	8,8166E-4	8,4327E-4	7,5294E-4	4,7208E-4
50	3,8033E-4	5,3684E-4	4,7125E-4	8,8586E-4	8,3382E-4	7,3737E-4	4,0579E-4
60	4,2931E-4	5,4342E-4	4,8452E-4	8,8635E-4	8,2408E-4	7,2416E-4	3,3533E-4
70	4,4361E-4	5,2992E-4	5,2083E-4	8,8495E-4	8,1445E-4	7,0871E-4	2,7583E-4
80	4,3277E-4	5,0101E-4	5,8970E-4	8,8167E-4	8,1202E-4	6,9338E-4	2,2978E-4
90	4,2112E-4	4,7510E-4	6,8283E-4	8,7647E-4	8,0093E-4	6,7347E-4	1,9059E-4

TABLA 1.13. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8477) 818-SL con el atenuador (número de serie 8477) en función de la longitud de onda (micras)

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,0312E-1	3,1620E-1	3,8009E-1	4,3314E-1	4,8523E-1	5,2538E-1	5,2470E-1
10	2,2001E-1	3,2379E-1	3,8603E-1	4,3817E-1	4,9027E-1	5,2942E-1	5,0715E-1
20	2,3632E-1	3,3088E-1	3,9120E-1	4,4337E-1	4,9535E-1	5,3376E-1	4,8034E-1
30	2,4890E-1	3,3759E-1	3,9672E-1	4,4855E-1	4,9990E-1	5,3580E-1	4,4470E-1
40	2,6008E-1	3,4425E-1	4,0199E-1	4,56364E-1	5,0398E-1	5,4027E-1	3,9683E-1
50	2,7105E-1	3,5061E-1	4,0770E-1	4,5910E-1	5,0742E-1	5,4152E-1	3,4073E-1
60	2,8129E-1	3,5678E-1	4,1256E-1	4,6403E-1	5,1055E-1	5,4378E-1	2,7963E-1
70	2,9071E-1	3,6272E-1	4,1778E-1	4,6939E-1	5,1371E-1	5,4335E-1	2,2707E-1
80	2,9968E-1	3,6851E-1	4,2286E-1	4,7498E-1	5,1846E-1	5,4170E-1	1,8763E-1
90	3,0808E-1	3,7426E-1	4,2798E-1	4,8011E-1	5,2102E-1	5,3543E-1	1,5405E-1

TABLA 1.14. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8505) 818-SL en función de la longitud de onda (micras)

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,3889E-4	4,1466E-4	4,7645E-4	7,8008E-4	8,9250E-4	8,0430E-4	6,5967E-4
10	2,7736E-4	4,2140E-4	4,8144E-4	8,3579E-4	8,8659E-4	7,9596E-4	6,2815E-4
20	2,9785E-4	4,4042E-4	4,8871E-4	8,6953E-4	8,8040E-4	7,8630E-4	5,8731E-4
30	3,3344E-4	4,7180E-4	4,9049E-4	8,8930E-4	8,7298E-4	7,7203E-4	5,3837E-4
40	3,4101E-4	5,1129E-4	4,8332E-4	9,0030E-4	8,6381E-4	7,6293E-4	4,7783E-4
50	3,6730E-4	5,4000E-4	4,8022E-4	9,0523E-4	8,5343E-4	7,4824E-4	4,1014E-4
60	4,1707E-4	5,4861E-4	4,9310E-4	9,0626E-4	8,4272E-4	7,3581E-4	3,3806E-4
70	4,3459E-4	5,3612E-4	5,2992E-4	9,0506E-4	8,3199E-4	7,2055E-4	2,7664E-4
80	4,2602E-4	5,0881E-4	5,9953E-4	9,0295E-4	8,2309E-4	7,0479E-4	2,2982E-4
90	4,1590E-4	4,8309E-4	6,9434E-4	8,9806E-4	8,1521E-4	6,8457E-4	1,8981E-4

TABLA 1.15. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8505) 818-SL con el atenuador (número de serie 8505) en función de la longitud de onda (micras)

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,0572E-1	3,1512E-1	3,7775E-1	4,3062E-1	4,8301E-1	5,2321E-1	5,2787E-1
10	2,2229E-1	3,2246E-1	3,8384E-1	4,3563E-1	4,8827E-1	5,2828E-1	5,1136E-1
20	2,3822E-1	3,2935E-1	3,8878E-1	4,4083E-1	4,9338E-1	5,3253E-1	4,8560E-1
30	2,5029E-1	3,3598E-1	3,9422E-1	4,4592E-1	4,9802E-1	5,3494E-1	4,5108E-1
40	2,6107E-1	3,4242E-1	3,9936E-1	4,5126E-1	5,0210E-1	5,3953E-1	4,0419E-1
50	2,7158E-1	3,4866E-1	4,0478E-1	4,5663E-1	5,0563E-1	5,4109E-1	3,4850E-1
60	2,8134E-1	3,5465E-1	4,0997E-1	4,6158E-1	5,0883E-1	5,4408E-1	2,8713E-1
70	2,9056E-1	3,6062E-1	4,1517E-1	4,6705E-1	5,1210E-1	5,4392E-1	2,3428E-1
80	2,9923E-1	3,6627E-1	4,2028E-1	4,7269E-1	5,1612E-1	5,4309E-1	1,9416E-1
90	3,0727E-1	3,7195E-1	4,2545E-1	4,7780E-1	5,2002E-1	5,3756E-1	1,5992E-1

TABLA 1.16. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8506) 818-SL en función de la longitud de onda (micras)

λ	400	500	600	700	800	900	1000
0	2,9692E-4	4,9019E-4	5,8234E-4	8,9906E-4	1,0138E-3	9,0581E-4	7,4867E-4
10	3,4346E-4	4,9694E-4	5,5830E-4	9,6373E-4	1,0056E-3	8,9552E-4	7,1474E-4
20	3,6499E-4	5,1868E-4	5,6557E-4	1,0017E-3	9,9738E-4	8,8458E-4	6,7022E-4
30	4,0609E-4	5,5571E-4	5,6634E-4	1,0227E-3	9,8804E-4	8,6939E-4	6,1651E-4
40	4,1427E-4	6,0227E-4	5,5629E-4	1,0334E-3	9,7676E-4	8,5875E-4	5,4917E-4
50	4,4421E-4	6,3563E-4	5,5084E-4	1,0375E-3	9,6414E-4	8,4321E-4	4,7363E-4
60	5,0078E-4	6,4441E-4	5,6452E-4	1,0359E-3	9,5118E-4	8,2995E-4	3,9198E-4
70	5,1890E-4	6,2768E-4	6,0676E-4	1,0333E-3	9,3853E-4	8,1399E-4	3,2215E-4
80	5,0674E-4	5,9332E-4	6,8779E-4	1,0290E-3	9,2896E-4	7,9692E-4	2,6839E-4
90	4,9310E-4	5,6100E-4	7,9923E-4	1,0218E-3	9,1626E-4	7,7515E-4	2,2224E-4

TABLA 1.17. Responsividad (A/W) del detector (número de serie 8506) 818-SL con el atenuador (número de serie 8506) en función de la longitud de onda (micras)

1.11 Manual de instrucciones del láser

Las fuentes de luz utilizadas habitualmente para transmitir información en sistemas de comunicaciones ópticas son los diodos emisores de luz o LED y los láser de semiconductor. En la mayoría de las prácticas utilizaremos un láser distinto al láser semiconductor, concretamente el láser de Helio-Neón³. Las razones de su utilización son:

- Como todos los láseres, frente a los LED, emiten luz monocromática, es decir con una anchura espectral reducida.
- La longitud de onda de emisión es 633 nm con la ventaja de ser una emisión láser visible para el ojo humano frente a los láseres usados en los sistemas de comunicaciones ópticas que no son visibles.
- Su coste.

El láser que vamos a utilizar en esta práctica está compuesto por el láser propiamente dicho (modelo 1101 de Uniphase cuya imagen se puede ver en la Figura 1.8) junto con la fuente de alimentación 1201-X de Uniphase.

Una representación esquemática del conjunto se puede ver en la Figura 1.33.

Si desea más información puede consultar el sitio WEB del fabricante www.uniphase.com.

El láser dispone de un conector para unirlo a la fuente de alimentación en el panel posterior de la fuente. **Tenga en cuenta que los voltajes a los que funciona el láser son muy peligrosos.** Además en la parte posterior la fuente de alimentación dispone de un "interlock" que tiene que estar correctamente conectado. En el panel frontal la fuente tiene una llave para encender o apagar el láser. **Como norma fundamental no mire directamente al haz del láser**

³También conocido como láser He-Ne.

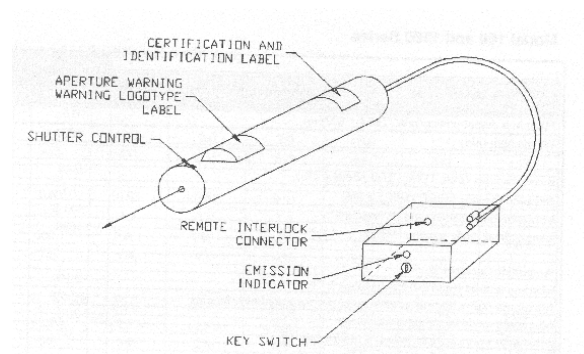


FIGURA 1.33. Representación esquemática del láser junto con su fuente de alimentación. En la Figura se destacan los elementos más importantes.

sfdñskdjfñjfljfnj

1.12 Apendice: Teoría de Errores

1.12.1 *Introducción*

Podemos definir error como el hecho de que exista una diferencia entre el valor de una determinada magnitud física y la medida que nosotros tomamos de esa magnitud.

El error es algo inherente al proceso de medida. Siempre al medir se introduce un error por la perturbación que supone sobre el sistema nuestro aparato de medida, que es ajeno a él. Esta perturbación puede ser más o menos importante. Así, introducir un termómetro en una botella de un cierto líquido para averiguar su temperatura la modificará a un nuevo valor fruto del equilibrio térmico en el sistema termómetro-líquido, pero esto en principio puede ser apenas perceptible. Sin embargo, al introducir un voltímetro de no muy alta impedancia en un circuito podemos alterar totalmente la configuración de éste y en consecuencia obtener una lectura errónea.

No son estas las únicas fuentes de error que acompañan al proceso de medida. Por otro lado están los errores propios del aparato que estamos utilizando, tanto de exactitud o sesgo (diferencia constante entre las magnitudes reales y los valores que da el aparato) como de precisión o poder de resolución (capacidad para distinguir variaciones muy pequeñas en la magnitud controlada). Estos son los errores que conocemos como sistemáticos. También estarán presentes en nuestra medida, aunque con buenos aparatos se puedan reducir bastante.

Pero aparte de estos errores están otros que no responden a algo determinístico como la impedancia de entrada de un voltímetro o el error de fondo de escala de un galvanómetro. Son estos los errores que llamaremos accidentales o aleatorios. Representan en realidad la influencia de la infinidad de parámetros que escapan a nuestro control al hacer una medida: temperatura, presión, humedad, vibraciones de la mesa de trabajo, defectos en la estructura interna del componente, fluctuaciones de la red, interferencias, etc.. Cuantificar su influencia sería una labor tan ardua como

inútil, así pues se prescinde de ella y se acude al empleo de métodos estadísticos para su caracterización.

El presente capítulo trata de los fundamentos teóricos de estos métodos estadísticos y da una justificación de por qué son adecuados los términos que se emplean, sin pretender ser excesivamente rigurosos. Después se estudiarán unos métodos estadísticos rápidos de caracterización de los errores, para terminar con unas breves indicaciones sobre cómo estudiar la influencia de los errores a través de funciones, de cómo calcular el intervalo de confianza de una función dados los intervalos de confianza de las variables, y algunos casos particulares necesarios de conocer.

1.12.2 El error aleatorio en la medida

Como ya hemos dicho, la medida va a diferir del valor real de la magnitud que se mide por una serie de perturbaciones externas. Se pueden tomar dos enfoques matemáticos de esta única realidad. En primer lugar, se puede considerar que la magnitud a medir tiene un valor real, absoluto e independiente de nuestra medida, al cual se superponen ciertas perturbaciones durante el proceso de medida. En segundo lugar, se puede suponer que el propio valor de la magnitud a medir presenta fluctuaciones que, añadidas a las perturbaciones antes citadas, impiden conocer el valor que se trata de determinar.

Llamando θ a la magnitud a medir y θ_m al valor medido, se obtiene, en ambos casos:

$$\theta = \theta_m + \varepsilon \tag{1.29}$$

Con independencia del tratamiento matemático que se decida adoptar en la caracterización de la medida, el resultado final es que el valor medido θ_m ha de ser representado por una variable aleatoria. En la caracterización de esta variable resulta de gran utilidad el teorema del límite central, que recordamos a continuación:

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes, tales que el valor esperado $E(X_i) = m_i$ y la varianza $V(X_i) = \sigma_i^2 (i = 1, 2, \dots, n)$. Sea X una nueva variable aleatoria definida como $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Para un número muy grande de variables aleatorias ($n \rightarrow \infty$) y bajo ciertas condiciones, la función de variable aleatoria Z definida como:

$$Z = \frac{X - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \quad (1.30)$$

tiene una función de distribución normal de media 0 y varianza 1. Es decir, si $G(X)$ es la f.d.p. de X

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(X) = \Phi(X) \quad (1.31)$$

siendo $\Phi(X)$ la f.d.p. normal $N(\mu, \sigma)$:

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(X - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.32)$$

Este resultado es de gran interés. Como ya se ha indicado, son muchas las influencias aleatorias e indeterminadas que influyen sobre la medida, circunstancia que hace imposible su caracterización exacta. Por tanto es aplicable este teorema de forma que se puede afirmar que el resultado de la medida es una variable aleatoria que tiende a presentar una distribución normal.

La influencia externa sobre la medida es de esperar que sea tal que su valor medio -excluidos los errores sistemáticos- sea nulo. En cuanto a la magnitud en sí, las fluctuaciones que experimente tendrán como media lo que se ha dado en denominar como el valor real. Por tanto parece lógico que el valor medio de dicha distribución sea el valor real de la magnitud en cuestión. Si continuamos llamando θ a este valor se llega a la situación representada en la Figura 1.34 cuya varianza, que es desconocida, será mayor o menor según existan más o menos perturbaciones.

En general, el objeto de la medida es la obtención de un número que se aproxime a θ tanto como sea posible. En consecuencia, este valor habrá de ser estimado a partir de la distribución supuesta para θ_m , intentando obtener así mismo algún parámetro que indique la calidad de la estimación efectuada.

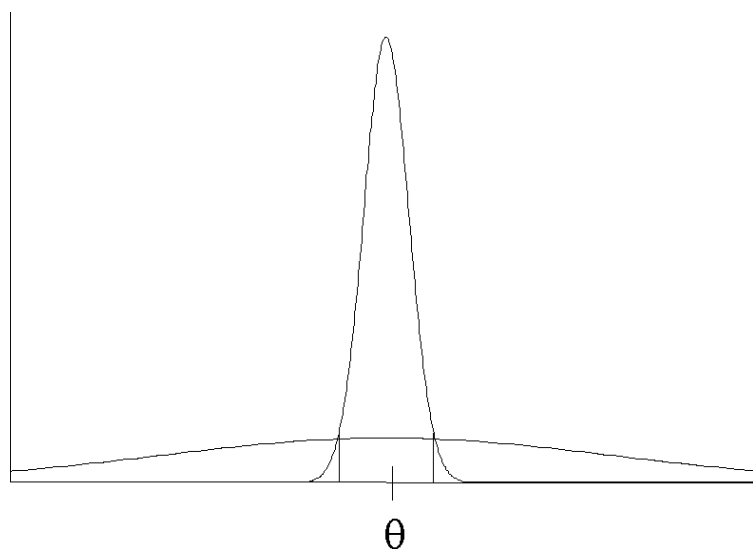


FIGURA 1.34. Representación de la distribución de los resultados de un proceso de medida

1.12.3 Estimadores

La teoría de estimadores, de los que sólo trataremos algunos casos relevantes, trata de dar respuesta a dos cuestiones fundamentales. En primer lugar, *¿cuál es el valor que, como consecuencia de un conjunto de medidas, cabe asignar a la manifestación de una cierta magnitud en un cierto caso?*. En segundo lugar, *¿qué confianza se puede depositar en la respuesta dada a la anterior pregunta?*, o, en otras palabras, *¿cuál es la calidad de la medida?*.

En el desarrollo de este tema es necesario tratar con algunos entes estadísticos que comenzaremos por definir.

A un conjunto de variables aleatorias independientes $\{X_1, \dots, X_n\}$ se denomina muestra aleatoria de la variable aleatoria X , cuando cada variable aleatoria perteneciente a dicho conjunto tiene la misma distribución de probabilidades que X .

La aplicación a la situación de las medidas es inmediata. En efecto, si se considera la medida de una cierta magnitud X como una variable aleatoria, la realización de n medidas de esa magnitud en las mismas condiciones generará una muestra aleatoria $\{X_1, \dots, X_n\}$, si las medidas son independientes una de otra.

Al conjunto de valores particulares $\{x_1, \dots, x_n\}$ que toma la muestra aleatoria se denomina conjunto de valores muestrales de la variable aleatoria X .

La aplicación al caso que nos ocupa, de nuevo, es inmediata. Los valores muestrales de la variable aleatoria X , medida de la magnitud X son el conjunto de n números resultado de las n medidas efectuadas en las mismas condiciones.

Sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ una muestra aleatoria de X y $\{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de valores muestrales. Sea H un función de la muestra aleatoria. Se define que la variable aleatoria $Y = H(X_1, \dots, X_n)$ es un estadígrafo que toma el valor $y = H(x_1, \dots, x_n)$.

El estimador será, según lo visto, una nueva variable aleatoria con unos parámetros que es preciso calcular.

Sea X una variable aleatoria con una distribución de probabilidades que depende de un parámetro desconocido θ . Sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ una muestra de X y sean $\{x_1, \dots, x_n\}$ los valores muestrales correspondientes. Si $H(X_1, \dots, X_n)$ es un estadígrafo que va a ser usado para estimar θ nos referimos a H como un estimador de θ . El valor que toma H para los valores muestrales, es decir, $H(x_1, \dots, x_n)$ se denomina estimación de θ y se representa como $\hat{\theta}$.

Decimos que un estimador $H(X_1, \dots, X_n)$ de θ es insesgado si se verifica que $E[H(X_1, \dots, X_n)] = \theta$. Es frecuente, aunque algo incorrecto, escribir esta última expresión como $E[\hat{\theta}] = \theta$.

Si no se verifica esto, es decir, $E[H(X_1, \dots, X_n)] = \theta + K$, a K se le denomina sesgo de la estimación. Físicamente el sesgo es muy importante en las estimaciones de nuestras magnitudes. Un sesgo es, por ejemplo, el error de cero de un aparato. En general, el problema del sesgo no es grave si éste es conocido, porque se puede restar del estimador al final del proceso para obtener la magnitud de interés.

Decimos que una estimación de θ es convergente, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left[\left| \hat{\theta} - \theta \right| \leq \varepsilon \right] = 1, \forall \varepsilon > 0 \quad (1.33)$$

o bien:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left[\left| \hat{\theta} - \theta \right| > \varepsilon \right] = 0, \forall \varepsilon > 0 \quad (1.34)$$

Estas dos expresiones equivalentes definen una forma operativa que permite determinar si un estimador es convergente. En la práctica, sin embargo, suele ser difícil determinar el límite, por lo cual se prefiere hacer uso del siguiente teorema:

Teorema: Sea una estimación de θ basada en una muestra de tamaño n . Si se cumple que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\hat{\theta} \right] &= \theta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} V \left[\hat{\theta} \right] &= 0\end{aligned}\tag{1.35}$$

se puede afirmar que es una estimación convergente de θ . Este teorema puede ser demostrado mediante la desigualdad de Chebyshev

Mediante lo expuesto hasta aquí es posible determinar cuando un estimador es insesgado, condición inexcusable para establecer un estadígrafo de suficiente calidad como para servir de estimador de un cierto parámetro θ . Conviene encarar ahora el problema inverso, es decir, supuesta la existencia de varios estimadores insesgados, ¿cual se debe adoptar para una mejor estimación?.

Para contestar a esta cuestión se define como mejor estimador insesgado aquél que cumple:

1. $E \left(\hat{\theta} \right) = \theta$
2. $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n a_i X_i$. Es decir, $\hat{\theta}$ es una función lineal de la muestra.
3. $V(\hat{\theta}) \leq V(\hat{\theta}')$ donde $\hat{\theta}'$ es cualquier otro estimador que cumple 1) y 2). Es decir, ha de ser el estimador de varianza mínima.

1.12.4 Estimadores de uso más frecuente

1.12.4.1 Media

Este estadígrafo sirve para determinar el valor esperado o esperanza de una variable aleatoria. Se define para una muestra aleatoria $\{X_1, \dots, X_n\}$ de una variable aleatoria

$\bar{X}$ y lo representaremos por como:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1.36)$$

Como toda la teoría anteriormente vista, consideraremos esto válido independientemente de la f.d.p. que tenga la variable aleatoria X .

Sea $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$, $\forall i | 1 \leq i \leq n$. Los parámetros estadísticos más interesantes de este estimador son:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} n\mu = \mu \quad (1.37)$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (1.38)$$

Su desviación típica, $\sigma(\bar{X}) = \sqrt{\sigma^2/n} = \sigma/\sqrt{n}$, es conocida con el nombre de error cuadrático medio.

Por otro lado, si n es grande, $\bar{X}$ tiene una distribución normal de media μ y varianza σ^2/n , como se puede demostrar aplicando directamente el teorema del límite central, de modo que puede ser descrita como:

$$\bar{X} = \frac{\sigma Z}{\sqrt{n}} + \mu \quad (1.39)$$

donde Z tiene una f.d.p. Normal (0,1)

Aplicando la teoría de estimadores desarrollada más arriba, podemos decir que:

1. es una estimación convergente de μ , ya que:

$$E(\bar{X}) = \mu \quad (1.40)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sigma^2}{n}\right) = 0 \quad (1.41)$$

2. $\bar{X}$ es el mejor estimador insesgado de μ para todos los de coeficientes que cumplen $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Para demostrarlo, basta estudiar la definición de mejor estimador insesgado:

- $E(\bar{X}) = \mu$
- $\bar{X} = \sum_{i=1}^n a_i X_i$, donde $a_i = 1/n \forall i$
- Para ver que es el de mínima varianza dentro de los que cumplen $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, basta con calcular la varianza de un estimador genérico de este tipo $\hat{X}$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (1.42)$$

ya que todos los X_i son variables aleatorias independientes de varianza σ^2 . Escribiendo estos coeficientes como $a_i = b_i + 1/n$, de modo que:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(b_i + \frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(b_i^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2b_i}{n}\right) \quad (1.43)$$

por otra parte, para que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, debe ser $\sum_{i=1}^n b_i = 0$. Luego:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (1.44)$$

, que es mínimo para $b_i = 0, \forall i$.

1.12.4.2 Varianza muestral

Durante el desarrollo de la teoría hasta aquí expuesta se ha considerado conocida la varianza de la distribución estudiada. Es evidente que este no será el caso habitualmente, por lo que se hace preciso estimarla. Uno de los estimadores más frecuentemente utilizados en la evaluación de la varianza es la denominada Varianza muestral, que se define como:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (1.45)$$

Se puede demostrar que este estimador lo es insesgado de la varianza, es decir que $E(S^2) = \sigma^2$, y que es convergente. En algunos textos de estadística descriptiva este estimador es definido como:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (1.46)$$

en cuyo caso se obtiene:

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad (1.47)$$

que no es insesgado, aunque para n muy grande, cosa que sucede casi siempre en los problemas de estadística descriptiva, el error es muy pequeño y ambos son prácticamente iguales.

En cuanto a su función densidad de probabilidad podemos decir que presenta una distribución chi-cuadrado⁴, χ^2 , con $n-1$ grados de libertad:

$$S^2 = \frac{\sigma^2 \chi_{n-1}^2}{n-1} \quad (1.48)$$

La demostración es compleja. Intuitivamente se puede justificar considerando que el estimador se define como la suma de n cuadrados de variables aleatorias distribuidas normalmente. Si todas fuesen independientes tendría S^2 una distribución χ_n^2 , es decir, con n grados de libertad. Sin embargo, entre ellas existe la condición de ligadura:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^n X_i - n\bar{X} = 0 \quad (1.49)$$

con lo que tendremos $n-1$ grados de libertad para la variable aleatoria S^2 .

Cuando estudiamos que la f.d.p. de $\bar{X}$ era normal se suponía que σ^2 era conocida, y así la tratábamos como constante. Normalmente no será conocida, por lo que habrá que estimarla conforme lo visto aquí. Por tanto ya no será una constante sino una variable aleatoria.

⁴La distribución de la suma de los cuadrados de n variables aleatorias independientes se llama distribución chi-cuadrado de n grados de libertad. Las variables aleatorias tienen que reunir una serie de condiciones como son: función de distribución normal, valor medio cero y varianza uno.

Para estudiar la f.d.p. de $\bar{X}$ en el caso de no conocer la varianza creamos la nueva variable aleatoria:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \quad (1.50a)$$

Definimos dos nuevas variables aleatorias (Z y χ_{n-1}^2) independientes como:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (1.51)$$

que tendrá una distribución $N(0,1)$ y la variable aleatoria

$$\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \quad (1.52)$$

que tendrá una distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad. Z y χ_{n-1}^2 son independientes. Según esto:

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\chi_{n-1}^2/(n-1)}} \quad (1.53)$$

y su f.d.p. es la llamada distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad. Al igual que la normal y otras funciones se halla tabulada.

Tendremos por tanto para $\bar{X}$:

$$\bar{X} = \frac{St}{\sqrt{n} + \mu} \quad (1.54)$$

Se puede demostrar que si $n \rightarrow \infty$, la f.d.p. de la t de Student tiende a ser una distribución $N(0,1)$. Esto es de sumo interés, pues representa que para un tamaño de la muestra grande siempre se puede considerar $\bar{X}$ distribuida normalmente.

1.12.4.3 Intervalos de confianza

Hasta ahora se han considerado estimadores puntuales de un parámetro desconocido. Vamos ahora a tratar de establecer un intervalo en el cual tendremos una determinada probabilidad de que el parámetro que intentamos estimar esté contenido en él.

Supongamos que tratamos de estimar el valor esperado de una variable aleatoria X de varianza desconocida a través de una muestra aleatoria $\{X_1, \dots, X_n\}$ y el posterior

cálculo del promedio muestral. Sea la variable $X(\mu, \sigma^2)$. Como ya hemos visto, $\bar{X}$ tiende a una distribución $N(\mu, \sigma^2/n)$, en cuyo caso la variable:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (1.55)$$

tiene una distribución $N(0,1)$.

Considerando la función:

$$\Phi(Z) = \int_{-\infty}^z f(Z) dZ = \Pr(Z \leq z) \quad (1.56)$$

es posible calcular ahora la probabilidad de que μ esté contenido en un intervalo arbitrario de $\bar{X}$. Sea:

$$\begin{aligned} \Pr\left(\bar{X} - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \Pr\left(-z \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \\ &= \Phi(z) - [1 - \Phi(z)] = 2\Phi(z) - 1 \end{aligned} \quad (1.57)$$

Este valor representa la probabilidad de que el intervalo

$$\left(\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad (1.58)$$

contenga a μ . Debe tenerse cuidado en no interpretarlo como la probabilidad de que μ "caiga" dentro de ese intervalo, ya que μ es fijo y lo que puede variar es donde esté situado el intervalo.

El valor de z es calculado de modo que esta probabilidad sea igual a $(1 - \alpha)$, que es la confianza fijada arbitrariamente. Por tanto $\Phi(z) = 1 - \alpha/2$ es el valor a localizar en las Tablas de la $N(0, 1)$ para obtener así el valor de z , que llamaremos $z_{1-\alpha/2}$. En resumen, podemos decir que el intervalo:

$$\left(\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad (1.59)$$

es un intervalo de confianza para el parámetro μ con un coeficiente de confianza $(1 - \alpha)$. Nuestra estimación de μ será por tanto:

$$X \pm \frac{\sigma z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \quad (1.60)$$

y el segundo sumando es lo que normalmente llamaremos el "error de medida".

Conviene destacar que sucede cuando se toma como intervalo de confianza el propio error cuadrático medio en torno α , es decir, cuando el intervalo de confianza es de la forma

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (1.61)$$

Esto quiere decir que $z_{1-\alpha/2} = 1$. De las tablas de la normal obtenemos que $F(1) = 0.8413$ con lo que $1 - \alpha = 0.6826$.

Es decir, que $(\bar{X} \pm \sigma/\sqrt{n})$ es un intervalo de confianza de μ con un coeficiente de confianza del 68%

Consideremos ahora el caso más normal, en que es desconocida la varianza de la variable aleatoria bajo muestreo. Como sabemos:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \quad (1.62)$$

y su f.d.p. será una cierta $h_{n-1}(t)$ tabulada. Se tabula también su integral:

$$H_{n-1}(t) = \int_{-\infty}^t h_{n-1}(t) dt \quad (1.63)$$

Siguiendo un razonamiento análogo al efectuado anteriormente:

$$\begin{aligned} \Pr \left(\bar{X} - \frac{tS}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{tS}{\sqrt{n}} \right) &= \Pr \left(-t \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t \right) = \\ &= \Pr \left(t \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \right) - \Pr \left(-t \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \right) = \\ &= H_{n-1}(t) - H_{n-1}(-t) = 2H_{n-1}(t) - 1 \end{aligned} \quad (1.64)$$

Calculando t para que esta probabilidad sea $1 - \alpha$, que puede ser escogida arbitrariamente, es decir, tomando $H_{n-1}(t) = 1 - \alpha/2$ se obtiene de las tablas pertinentes un valor de t que denominaremos $t_{n-1, 1-\alpha/2}$, y el intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{X} - \frac{St_{n-1, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{St_{n-1, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) \quad (1.65)$$

Cuando el número de muestras es grande (típicamente $n > 10$) se puede suponer válida la distribución normal para $\bar{X}$. Si se quiere ser más riguroso, o para $n < 10$, se debe realizar el cálculo del intervalo basado en la distribución de la t de Student.

Conviene antes de finalizar hacer una breve observación. Todas estas fórmulas son la confianza obtenida "a priori" de que la medida va a estar próximo al valor real. Una vez realizada la medida, el intervalo de confianza dado contendrá o no el valor de estimar, esto es:

$$\Pr(X - K \leq \mu \leq X + K) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (1.66)$$

Si la probabilidad es 0 ó 1 no se conoce normalmente. Sin embargo, tomando un valor a suficientemente pequeño (a costa de agrandar el intervalo) se puede afirmar que es más seguro que esa probabilidad sea 1 que 0, precisamente con un coeficiente de $1 - \alpha$.

1.12.5 Métodos de cálculo de propagación de errores

El problema al que nos debemos enfrentar a continuación es el siguiente: Supongamos que hemos medido n magnitudes $x_1, x_2, \dots, x_n$ de las cuales conocemos sus intervalos de error en general $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ y que deseamos utilizar estos valores en la determinación del valor de algún parámetro relacionado con la magnitud mediante una expresión analítica $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Como es lógico, si tenemos una cierta incertidumbre en las variables la función y tendrá también un margen de incertidumbre que es preciso calcular.

Comencemos particularizando al caso de una única variable.

Tendremos pues $y = f(x)$, donde x vendrá afectada por un error Δx . Si representamos gráficamente la función:

Es evidente como el intervalo de error que tenemos para x se refleja, a través de la función, en y . Existirá, pues, un intervalo de error en y que vendrá dado por:

$$y_{\min} \leq y \leq y_{\max} \quad (1.67)$$

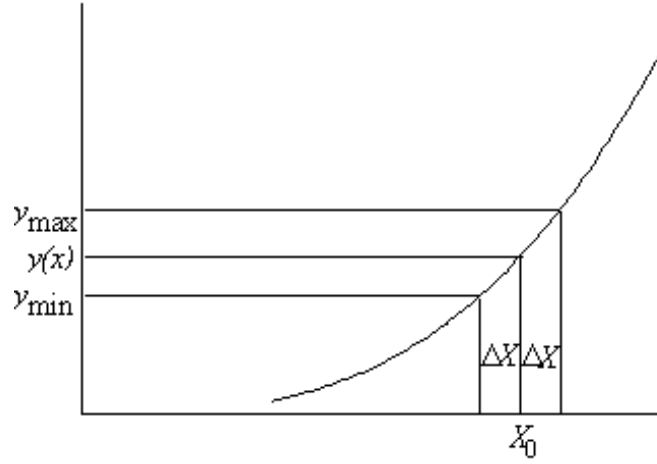


FIGURA 1.35. Representación esquemática de la propagación de errores en una función $y = f(x)$

Donde en el caso dibujado,

$$y_{\max} = f(X_0 + \Delta X) \quad (1.68)$$

que estará sujeto a si la función es creciente o decreciente.

Esto es inmediatamente generalizable para n variables. Aquí habría que considerar el crecimiento o decrecimiento para cada variable para tomar el límite de y , o bien calcular todas las variaciones posibles. Por ejemplo, para una función de dos variables se hace preciso evaluar:

$$\begin{aligned} y_1 &= f(X_1 + \Delta X_1, X_2 + \Delta X_2) & y_2 &= f(X_1 + \Delta X_1, X_2 - \Delta X_2) \\ y_3 &= f(X_1 - \Delta X_1, X_2 + \Delta X_2) & y_4 &= f(X_1 - \Delta X_1, X_2 - \Delta X_2) \end{aligned} \quad (1.69)$$

y tendremos:

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \max[y_1, y_2, y_3, y_4] \\ y_{\min} &= \min[y_1, y_2, y_3, y_4] \end{aligned} \quad (1.70)$$

Es obvio que para funciones de varias variables o para funciones un poco complicadas esto es largo y tedioso, por lo que se hace preciso acudir a otros procedimientos.

Consideremos de nuevo una función de una sola variable $y = f(x)$, que desarrollada en un entorno del punto x (valor de la medida) en serie de Taylor resulta:

$$y = f(X) + \frac{f'(X)}{1!} \Delta X + \frac{f''(X)}{2!} \Delta X^2 + \dots \quad (1.71)$$

Normalmente ΔX (que tomamos como el error de la medida), es pequeño y podemos despreciar los términos de orden superior al 1, con lo que

$$y - f(X) = \Delta y = f'(X) \Delta X \quad (1.72)$$

que es la fórmula comunmente usada.

Si ahora extendemos el concepto para n variables, aplicando también el Teorema de Taylor y quedándonos con los términos de primer orden obtendríamos:

$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \right|_{X_1, X_2, \dots, X_n} \Delta X_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \right|_{X_1, X_2, \dots, X_n} \Delta X_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial X_n} \right|_{X_1, X_2, \dots, X_n} \Delta X_n \quad (1.73)$$

donde se consideran los valores absolutos, pues los errores deben considerarse siempre en el caso peor.

Consideremos ahora el caso general, en que x es una variable aleatoria de la que resulta conocida su media μ_X y su varianza σ_X^2 . Este es el caso de una medida sometida a errores aleatorios que hemos estado considerando. Cualquier nueva variable relacionada con éste mediante una relación analítica $y = f(x)$ es también una variable aleatoria función de x con media μ_Y . Es necesario calcular su varianza para así establecer un intervalo de confianza para la nueva variable dependiente.

Desarrollando la función $f(x)$ en Serie de Taylor en un entorno de μ_X y reteniendo tan sólo el primer término:

$$y = f(\mu_X) + f'(\mu_X)(X - \mu_X) \quad (1.74)$$

para $y \cong \mu_Y$.

De donde la varianza puede ser estimada como:

$$V(Y) = V[f(\mu_X)] + [f'(\mu_X)]^2 V(X - \mu_X) \quad (1.75)$$

$$\sigma_Y^2 = [f'(\mu_X)]^2 \sigma_X^2 \quad (1.76)$$

Este resultado es generalizable para una función de variable aleatoria de n variables:

$$\sigma_Y^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial X_1} \Big|_{X_1, X_2, \dots, X_n} \right]^2 \sigma_{X_1}^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial X_2} \Big|_{X_1, X_2, \dots, X_n} \right]^2 \sigma_{X_2}^2 + \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial X_n} \Big|_{X_1, X_2, \dots, X_n} \right]^2 \sigma_{X_n}^2 \quad (1.77)$$

El resultado es igualmente válido particularizando en otro punto, no tan solo en los valores esperados.

Si se particulariza en las estimaciones hechas del parámetro, se obtiene:

$$\bar{Y} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \quad (1.78)$$

y para obtener el intervalo de confianza aplicaremos la fórmula vista para σ_Y^2 .

Hay que destacar la necesidad de prestar atención a los cálculos en puntos próximos a puntos críticos de las funciones (máximos y mínimos), que pueden dar lugar a la obtención de resultados erróneos. Por ejemplo, la función $y = \sin(a)$, para valores de $a = 90^\circ (\pm 10^\circ)$:

$$y = \sin 90^\circ = 1$$

$$\Delta y = \Delta \alpha \cos \alpha$$

Este resultado es absurdo, pues no podemos obtener un parámetro sin error a partir de otro con error.

Otro ejemplo: $a = 80^\circ (\pm 10^\circ)$, $\Delta a = 8^\circ = 0.1396 \text{ rad.}$:

$$\Delta y = \Delta \alpha \cos \alpha = 0.024$$

$$y = 0.98 \pm 0.024$$

de donde $y_{\max} = 1.004$. Este resultado erróneo también es consecuencia de la aproximación lineal en un intervalo no adecuado.

Hay que tener en cuenta, por tanto, que los cálculos efectuados para determinar la propagación del error en funciones se basan en unas aproximaciones realizadas bajo ciertas hipótesis, y si éstas no se cumplen los resultados serán falsos.

1.12.6 Ejemplos prácticos de la aplicación de la teoría de errores

A continuación vamos a ver unos pequeños ejemplos numéricos donde se pone de manifiesto todo lo visto hasta ahora.

En la Tabla 1.18 se recogen los resultados de una serie de medidas realizadas (concretamente 40). El objetivo es contestar con ayuda de las tablas de los apéndices a una serie de preguntas sobre la probabilidad de diversos intervalos de confianza, en diversos casos.

En la Tabla 1.19 se han calculado a partir de los datos obtenidos de las medidas una serie de parametros estadísticos sobre los que se van a realizar estos ejercicios. En dicha Tabla se recogen el valor del estimador Media muestral, Varianza muestral para los casos de haber realizado 5, 10, 20 y 40 medidas. Además se recoge el valor de calculado en función de los otros datos.

A continuación vamos veamos los ejemplos:

En el caso de haber realizado 5 medidas cuál sería la probabilidad del siguiente intervalo de confianza $[218.986, 219.655]$.

Para 5 medidas ($n = 5$), los parametros que nos interesan son:

$$\bar{X} = 219.32$$

$$S^2 = 0.24$$

Entonces el intervalo $[218.986, 219.655]$ es simétrico con centro $\bar{X}$ y semianchura de 0.335.

Medida número	Resultado medida	Medida número	Resultado medida
1	219.8	21	218.0
2	219.4	22	217.5
3	219.3	23	218.3
4	218.5	24	219.6
5	219.6	25	222.2
6	219.9	26	218.2
7	219.5	27	219.0
8	220.5	28	219.5
9	220.1	29	219.0
10	219.9	30	219.4
11	220.1	31	218.6
12	220.0	32	219.0
13	218.9	33	217.6
14	219.1	34	218.1
15	218.7	35	217.8
16	218.8	36	217.3
17	218.6	37	217.7
18	219.0	38	218.1
19	219.1	39	217.3
20	219.2	40	218.2

TABLA 1.18. Resultados numéricos de 40 medidas realizadas

n	$\bar{X}$	S^2	$S/\sqrt{n}$
5	219.32	0.24	0.22
10	219.65	0.29	0.17
20	219.20	0.32	0.13
40	218.96	0.97	0.16

TABLA 1.19. Valor de los estimadores Media Muestral y Varianza muestral para los casos de haber realizado 5, 10, 20 y 40 medidas

En este caso no conocemos ni el valor esperado ni la varianza con lo que necesitamos estimarla. Para ello recurrimos a los estimadores media y varianza muestral (vistos a lo largo del capítulo). Además realizamos el siguiente cambio de variable

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

que presentará una función de distribución t de Student con 4 grados de libertad. Ahora el intervalo en cuestión es el siguiente:

$$X - t_{n-a, 1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq X + t_{n-a, 1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

de donde se obtiene:

$$t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} = 0.335$$

que corresponde a un valor de

$$t_{n-1, 1-\alpha/2}$$

De acuerdo con lo visto en el capítulo la probabilidad será la siguiente:

$$\Pr(218.985 \leq X_i \leq 219.655) = 2H_4(1.5291) - 1$$

De la Tabla 1.21 se obtiene un valor para $H_4(1.5291)$ de 0.9 con lo que la probabilidad es de un 0.8 (80%).

También en este momento podríamos plantearnos cual sería la probabilidad si la distribución tomada para calcularla hubiese sido gaussiana.

En este caso realizamos el siguiente cambio de variable

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Ahora el intervalo en cuestión es el siguiente:

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

de donde se obtiene:

$$z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.335$$

Ahora dependerá del valor que se use para la desviación típica. Supongamos en primer lugar que tomamos como desviación típica el valor 1, entonces el valor de z es

$$z_{1-\alpha/2} = 0.7491$$

De acuerdo con lo visto en el capítulo la probabilidad será la siguiente:

$$\Pr(218.985 \leq X_i \leq 219.655) = 2\Phi(0.7491) - 1$$

De la Tabla 1.22 se obtiene un valor para $\Phi(0.7491)$ de 0.7734 con lo que la probabilidad es de un 0.5468 (54.68%). Valor que difiere con el anteriormente calculado y eso es debido además del distinto valor usado para la desviación típica, a la diferencia de valores para la función de distribución.

Supongamos ahora que tomamos que como desviación típica usamos S , teniendo, por supuesto una distribución gaussiana. El valor obtenido para

También de la Tabla 1.22 se obtiene un valor para $\Phi(1.5291)$ de 0.937 con lo que la probabilidad es de un 0.874 (87.40%). Valor que no difiere tanto con el anteriormente calculado de acuerdo con una distribución t de Student.

1.12.7 Aplicando todo esto a nuestro caso concreto

El alumno habrá realizado al menos cinco series de medidas tanto para el primer método como para el segundo. El error además lo dividirá en tres segmentos, de tal forma que quedaría:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{acc} + \varepsilon_{sis} + \varepsilon_{esc} \quad (1.79)$$

donde ε_t es el error total de la medida, ε_{acc} es el error accidental en la medida, ε_{sis} es el error sistemático y ε_{esc} es el error de escala. Para simplificar el problema se supone que el error sistemático es cero y sólo resta calcular los otros dos.

El error escalar se calcular de la siguiente forma:

- Si se trata de un dispositivo analógico, el error escalar es la mitad de la unidad mínima de medida del dispositivo. Por ejemplo, en nuestro caso el error escalar de la plataforma rotatoria es de medio grado. Por lo tanto, de existir sólo el error escalar la medida se representaría como

$$\theta = \theta_m \pm 0.5^\circ$$

- Si se trata de un dispositivo analógico, el error escalar es la unidad mínima de la medida del dispositivo.

Para el error accidental, vamos a suponer que optamos por un intervalo de confianza del 95%, esto es, $1 - \alpha/2 = 0.05$. Utilizaremos la distribución t de Student. Realizaríamos las operaciones que se indican en el apartado anterior, esto es

1. El valor será la media aritmética de las cinco series
2. El error accidental se calcula

$$\varepsilon_{acc} = t_{n-1, 1-\alpha/2}(f) \frac{S(x)}{\sqrt{n}} \quad (1.80)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (1.81)$$

De aquí sólo faltaría calcular $t_{n-1, 1-\alpha/2}(f)$, que se obtiene de las tablas que se adjuntan.

Sin embargo tenga en cuenta que esto sólo es cierto en el caso de que la medida sea directa. Considere que tiene que dar el grado exacto donde se produce la caída en un 5% de la potencia máxima. Probablemente no tenga una medida donde dé exactamente este valor, sino que tendrá un par de medidas una por encima del valor y otra por debajo. En ese caso, no le queda más remedio que interporlar, y como la medida pasa a ser indirecta tendrá que aplicar la teoría de propagación de errores. Esta teoría la tendrá que aplicar tanto para el error escalar como para el error accidental.

1. Para calcular el error escalar, en este caso se aplica la expresión 1.73, donde los ΔX_i corresponden a los errores escalares de las variables de partida.
2. Para calcular el error accidental, en este caso se aplica la expresión 1.77, pero aplicada a S^2 , de tal forma que la nueva expresión quedaría

$$S_y^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial X_1} \Big|_{X_1, X_2, \dots, X_n} \right]^2 S_{X_1}^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial X_2} \Big|_{X_1, X_2, \dots, X_n} \right]^2 S_{X_2}^2 + \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial X_n} \Big|_{X_1, X_2, \dots, X_n} \right]^2 S_{X_n}^2 \quad (1.82)$$

A partir de este dato se calcular el error accidental como se ha explicado más arriba. Recuerde que en la medida indirecta la $t_{n-1, 1-\alpha/2}(f)$ se toma para grados de libertad infinitos, esto es, $n = \infty$ (no así para calcular las $S_{X_i}^2$ donde si se utiliza $n - 1$ donde n es el número de series de medidas que se han realizado)

1.12.8 Ajuste por mínimos cuadrados

La teoría de ajuste por mínimos cuadrados está sobradamente desarrollada en la asignatura de algebra. Así, en estas notas simplemente se recordará un método

X	Y	XY	X^2	Y^2
x_1	y_1	x_1y_1	x_1^2	y_1^2
x_2	y_2	x_2y_2	x_2^2	y_2^2
...	...	...	...	...
x_n	y_n	x_ny_n	x_n^2	y_n^2
$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_iy_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i^2$
A	B	C	D	E

TABLA 1.20. Tabla de operaciones a realizar para calcular una regresión lineal

para realizar el ajuste por mínimos cuadrados a una recta. Supongamos que tenemos una serie de medidas en donde la magnitud de referencia se va incrementando y la magnitud que se desea se supone que debe tener una relación lineal con la magnitud de referencia. En ese caso las medidas seguirán aproximadamente esa relación lineal, pero debido al error en la medida no será posible calcular exactamente la pendiente de la recta. Para ello se utiliza el ajuste por mínimos cuadrados. Para ello se forma una tabla como la 1.20

Si suponemos que las medidas siguen una recta de la expresión

$$y = a + bx \quad (1.83)$$

entonces

$$a = \frac{BD - AC}{nD - A^2} \quad (1.84)$$

$$b = \frac{nC - AB}{nD - A^2} \quad (1.85)$$

Sin embargo, en nuestro caso, la recta podemos suponer que va a partir del origen, con lo que $a = 0$. En este caso la expresión de b se modifica y queda de la siguiente forma:

$$y = bx \quad (1.86)$$

$$b = \frac{C}{D} \quad (1.87)$$

Para este caso también se debe calcular tanto el error escalar como el accidental:

1. El error escalar se calcular igual que en el caso anterior, despejando b de la expresión lineal y derivando respecto de las dos variables.
2. El error accidental se calcularía aplicando las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{acc}(b) = t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{S(b)}{\sqrt{n}} \quad (1.88)$$

$$S(b) = \sqrt{\frac{\sum (b_i - b)^2}{n - 1}} \quad (1.89)$$

De nuevo, a partir de esta variable se obtendrá una segunda, es decir, estamos realizando medidas indirectas, y por lo tanto se debe aplicar todo lo que se vió en el apartado anterior.

1.13 Bibliografía

Paul L. Meyer. Probabilidad y aplicaciones estadísticas. Fondo Educativo Interamericano, S.A.

Sixtos Rios. Métodos estadísticos.

J. S. Bendat y A.G. Piersol; (1.986). Random data: Analysis and measurement procedures. Jhon Wiley and Sons. Nueva York.

E. Gaughan. Intoducción al análisis. De. Alhambra, S.A.

J. R. Taylor; (1.982). An introduction to error analysis. The study of uncertainties in physical measurements. University Science Books. California.

1.14 Tablas de interés

A continuación (Tabla 1.21) se encuentra tabulada la distribución t de Student para distintos grados de libertad (n). El valor que se encuentra tabulado es el valor de t para distintos valores de $H_n(t)$.

$n \setminus (1 - \frac{\alpha}{2})$	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	636.62
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	31.598
3	0.756	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	12.924
4	0.741	0.941	1.190	1.553	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.832	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.997	3.326	4.120
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	4.037
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.965

En la siguiente tabla (Tabla 1.22) se encuentra tabulada la función de distribución normal en función del valor de x .

En la Tabla 1.23 se encuentra tabulada la Probabilidad de un determinado intervalo de confianza de acuerdo con la notación seguida en el Apéndice que a continuación se reproduce para mayor comodidad

$$\Pr(\bar{X} - z \leq \mu \leq \bar{X} + z) = 2\Phi(z) - 1$$

Denominaremos $A_z = 2\Phi_z$

$n \setminus (1 - \frac{\alpha}{2})$	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.096	2.500	2.807	3.104	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.090	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.056	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.551
60	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.460
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.291

TABLA 1.21. Distribucion de la función t de Student

$\mathcal{X}$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.500	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9060	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

$\mathcal{X}$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.50	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.60	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

TABLA 1.22. Tabla de probabilidades de una distribución de función $N(0,1)$

A_z	z	A_z	z	A_z	z	A_z	z
0.000	0	0.135	0.1692	0.265	0.3382	0.395	0.5172
0.005	0.006267	0.140	0.1755	0.270	0.3449	0.400	0.5244
0.010	0.01253	0.145	0.1817	0.275	0.3515	0.405	0.5316
0.015	0.01880	0.150	0.1880	0.280	0.3581	0.410	0.5388
0.020	0.02507	0.155	0.1943	0.285	0.3648	0.415	0.5461
0.025	0.03133	0.160	0.2019	0.290	0.3715	0.420	0.5534
0.030	0.03760	0.165	0.2083	0.295	0.3782	0.425	0.5607
0.035	0.04387	0.170	0.2147	0.300	0.3849	0.430	0.5680
0.040	0.05013	0.175	0.2211	0.305	0.3916	0.435	0.5754
0.045	0.05640	0.180	0.2275	0.310	0.3983	0.440	0.5828
0.050	0.06267	0.185	0.2339	0.315	0.4051	0.445	0.5903
0.055	0.06893	0.190	0.2404	0.320	0.4118	0.450	0.5977
0.060	0.07520	0.195	0.2468	0.325	0.4186	0.455	0.6052
0.065	0.08147	0.200	0.2533	0.330	0.4254	0.460	0.6128
0.070	0.08773	0.205	0.2598	0.335	0.4322	0.465	0.6203
0.075	0.0940	0.210	0.2662	0.340	0.4391	0.470	0.6280
0.080	0.1003	0.215	0.2727	0.345	0.4459	0.475	0.6356
0.085	0.1065	0.220	0.2792	0.350	0.4528	0.480	0.6433
0.090	0.1128	0.225	0.2857	0.355	0.4597	0.485	0.6510
0.095	0.1191	0.230	0.2923	0.360	0.4666	0.490	0.6588
0.100	0.1253	0.235	0.2988	0.365	0.4735	0.495	0.6666
0.105	0.1316	0.240	0.3053	0.370	0.4804	0.500	0.6744
0.110	0.1379	0.245	0.3119	0.375	0.4888	0.505	0.6823
0.115	0.1441	0.250	0.3185	0.380	0.4958	0.510	0.6902
0.120	0.1504	0.255	0.3250	0.385	0.5029	0.515	0.6981
0.125	0.1567	0.260	0.3316	0.390	0.5101	0.520	0.7062

A_z	z	A_z	z	A_z	z	A_z	z
0.525	0.7142	0.645	0.9235	0.765	1.187	0.885	1.576
0.530	0.7223	0.650	0.9331	0.770	1.200	0.890	1.598
0.535	0.7304	0.655	0.9427	0.775	1.213	0.895	1.620
0.540	0.7386	0.660	0.9524	0.780	1.226	0.900	1.644
0.545	0.7469	0.665	0.9622	0.785	1.239	0.905	1.668
0.550	0.7551	0.670	0.9741	0.790	1.253	0.910	1.694
0.555	0.7635	0.675	0.9842	0.795	1.266	0.915	1.720
0.560	0.7719	0.680	0.9944	0.800	1.280	0.920	1.748
0.565	0.7803	0.685	1.005	0.805	1.295	0.925	1.777
0.570	0.7888	0.690	1.015	0.810	1.309	0.930	1.807
0.575	0.7974	0.695	1.026	0.815	1.324	0.935	1.840
0.580	0.8060	0.700	1.036	0.820	1.339	0.940	1.880
0.585	0.8146	0.705	1.047	0.825	1.354	0.945	1.918
0.590	0.8234	0.710	1.058	0.830	1.370	0.950	1.959
0.595	0.8321	0.715	1.069	0.835	1.386	0.955	2.003
0.600	0.8410	0.720	1.080	0.840	1.402	0.960	2.051
0.605	0.8499	0.725	1.091	0.845	1.422	0.965	2.105
0.610	0.8588	0.730	1.103	0.850	1.439	0.970	2.164
0.615	0.8679	0.735	1.114	0.855	1.457	0.975	2.230
0.620	0.8770	0.740	1.126	0.860	1.476	0.980	2.324
0.625	0.8862	0.745	1.138	0.865	1.494	0.985	2.427
0.630	0.8954	0.750	1.150	0.870	1.514	0.990	2.559
0.635	0.9047	0.755	1.162	0.875	1.534	0.995	2.792
0.640	0.9141	0.760	1.175	0.880	1.554	1.000	3.427

TABLA 1.23. Tabla de probabilidades de un determinado intervalo de confianza